

نهالی در جمع

گسسته دوازدهم

اثبات مستقیم و مثال نقص



اپیزود ۱: اثبات مستقیم، اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها و مثال نقض

۱- اثبات مستقیم: اثبات با استفاده از حقایق است که درستی آنها را قبلاً پذیرفته‌ایم. (با اطلاعات خودمان - فرض مسأله - قضایای اثبات شده - اصول اولیه - تعاریف - مفاهیم و ...)

۲ تا تیپ مسائل اثبات مستقیم:

الف) کار با اعداد گویا

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

ب) کار با اعداد زوج و فرد $2k + 1 = \text{فرد}$ $2k = \text{زوج}$



مثال : ثابت کنید مجموع، تفاضل و حاصلضرب هر دو عدد گویا، عددی گویاست.

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \quad \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd} \in \mathbb{Z} \in \mathbb{Q} \checkmark$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \in \mathbb{Z} \in \mathbb{Q} \checkmark$$



تجربا العربیة

مثال : ثابت کنید مجموع هر سه عدد متوالی مضرب ۳ است.

$$\underbrace{(n + n + 1)} + \underbrace{(n + 2)} = 3n + 3 = 3(n + 1) = 3q \quad \checkmark$$



مجموع هر سه عدد متوالی مضرب ۳ است

مثال : اگر k حاصلضرب دو عدد متوالی باشد ثابت کنید $k+1$ مربع کامل است.

$$k = n(n+1) = n^2 + n$$

$$\Sigma k + 1 = \Sigma (n^2 + n) + 1 = \Sigma n^2 + \Sigma n + 1 = (n+1)^2 \checkmark$$

مجموعه
مفاهیم
هندسه
جبر
حساب
تفاضل
و
یک
متغیره
عربی
الف

مثال: ثابت کنید میانگین پنج عدد متوالی همان عدد وسطی است.

$$\frac{n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4)}{5} = \frac{5n+10}{5} = n+2$$



المعربية
الرياض
2017

مثال: ثابت کنید مجموع هر سه عدد زوج متوالی مضرب ۶ است.

$$2k + \underbrace{2k+2}_{q} + 2k+4 = 4k+6 = 4 \underbrace{(k+1)}_q = 4q \checkmark$$



الماتریة
مجموع
زوج
متوالی

مثال: ثابت کنید مجموع هر چهار عدد فرد متوالی مضرب ۸ است.

$$\begin{aligned}(\underline{2k+1}) + (\underline{2k+3}) + (\underline{2k+5}) + (\underline{2k+7}) &= 8k+14 \\ &= 8(k+2) = 8q \quad \checkmark\end{aligned}$$



مثال: اگر a, b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد ثابت کنید $a^2 + b^2$ زوج است.

a فرد و b فرد

$$\begin{aligned} 2k+1 + 2k'+1 &= 2k + 2k' + 2 \\ &= 2(k+k'+1) = 2q \quad \checkmark \end{aligned}$$



المبرهنه
 ۱+۱=۲
 ۲+۲=۴
 ۳+۳=۶
 ۴+۴=۸
 ۵+۵=۱۰
 ۶+۶=۱۲
 ۷+۷=۱۴
 ۸+۸=۱۶
 ۹+۹=۱۸
 ۱۰+۱۰=۲۰
 ۱۱+۱۱=۲۲
 ۱۲+۱۲=۲۴
 ۱۳+۱۳=۲۶
 ۱۴+۱۴=۲۸
 ۱۵+۱۵=۳۰
 ۱۶+۱۶=۳۲
 ۱۷+۱۷=۳۴
 ۱۸+۱۸=۳۶
 ۱۹+۱۹=۳۸
 ۲۰+۲۰=۴۰

مثال: ثابت کنید حاصلضرب هر سه عدد صحیح متوالی مضرب ۶ است.



۲- اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها : گاهی اوقات در اثبات یک حکم لازم است که حالت‌های مختلف آن مسئله را در نظر گرفته و اثبات کنیم. به این روش «اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها» می‌گوییم.

$$p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$$

$$(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$$



تجربیات

مثال: ثابت کنید حاصلضرب هر دو عدد متوالی زوج است.

$$n(n+1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 2k \rightarrow \underbrace{2k(2k+1)}_q = 2q \checkmark \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 2k+1 \rightarrow \underbrace{(2k+1)(2k+2)}_q = 2 \left(\frac{q}{2} \right) = 2q \checkmark \end{array} \right.$$



صفحه ۲
 ۲۰۲۰/۲۰۲۱
 امتحان نهایی
 ریاضیات پایه
 دوره اول متوسطه
 آبان ۱۴۰۰

مثال: ثابت کنید برای هر عدد طبیعی عبارت $n^2 - 5n + 7$ همواره عددی فرد است.

$$\left. \begin{array}{l} n=2k : \sum k^2 - 10k + \underbrace{7}_{4+1} = 2\left(\frac{\quad}{2}\right) + 1 = 2q + 1 \checkmark \\ n=2k+1 : () () () \dots \end{array} \right\}$$



مثال: اگر $a \times b = 0$ باشد ثابت کنید $a = 0$ یا $b = 0$

صورت اول: $a = 0$ همیشه درست است.

صورت دوم: $a \neq 0$ اگر $\frac{1}{a}$ معکوس a است.
 $a \times b = 0 \xrightarrow{\times \frac{1}{a}}$ $\frac{1}{a} \times a \times b = 0 \times \frac{1}{a} \rightarrow b = 0$



مجموعه
 آزمون
 های
 تخصصی
 و
 عمومی
 در
 سراسر
 کشور
 در
 دسترس
 شماست

مثال: مجموعه $A = \{3, 4\}$ یک زیرمجموعه از مجموعه $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و عبارت $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ به ازای $n \in S$ یک عدد زوج است. ثابت کنید $n \in A$.

$$n = 1$$

$$n = 2$$

$$n = 3$$

$$n = 4$$

$$n = 5$$

$$n = 6$$

$$\frac{9 \times 16}{4} = 36 \checkmark$$



نکته : گاهی اوقات در اثبات‌های مستقیم از احکامی که قبلاً اثبات کرده‌ایم استفاده می‌کنیم. در اینصورت نیازی به اثبات آن احکام نیست فقط باید خود حکم را بیان کنیم.



الکیمیاء
المعربیه
۲۰۲۰
۱۴۴۱
۱۴۴۰
۱۴۳۹
۱۴۳۸
۱۴۳۷
۱۴۳۶
۱۴۳۵
۱۴۳۴
۱۴۳۳
۱۴۳۲
۱۴۳۱
۱۴۳۰
۱۴۲۹
۱۴۲۸
۱۴۲۷
۱۴۲۶
۱۴۲۵
۱۴۲۴
۱۴۲۳
۱۴۲۲
۱۴۲۱
۱۴۲۰
۱۴۱۹
۱۴۱۸
۱۴۱۷
۱۴۱۶
۱۴۱۵
۱۴۱۴
۱۴۱۳
۱۴۱۲
۱۴۱۱
۱۴۱۰
۱۴۰۹
۱۴۰۸
۱۴۰۷
۱۴۰۶
۱۴۰۵
۱۴۰۴
۱۴۰۳
۱۴۰۲
۱۴۰۱
۱۴۰۰
۱۳۹۹
۱۳۹۸
۱۳۹۷
۱۳۹۶
۱۳۹۵
۱۳۹۴
۱۳۹۳
۱۳۹۲
۱۳۹۱
۱۳۹۰
۱۳۸۹
۱۳۸۸
۱۳۸۷
۱۳۸۶
۱۳۸۵
۱۳۸۴
۱۳۸۳
۱۳۸۲
۱۳۸۱
۱۳۸۰
۱۳۷۹
۱۳۷۸
۱۳۷۷
۱۳۷۶
۱۳۷۵
۱۳۷۴
۱۳۷۳
۱۳۷۲
۱۳۷۱
۱۳۷۰
۱۳۶۹
۱۳۶۸
۱۳۶۷
۱۳۶۶
۱۳۶۵
۱۳۶۴
۱۳۶۳
۱۳۶۲
۱۳۶۱
۱۳۶۰
۱۳۵۹
۱۳۵۸
۱۳۵۷
۱۳۵۶
۱۳۵۵
۱۳۵۴
۱۳۵۳
۱۳۵۲
۱۳۵۱
۱۳۵۰
۱۳۴۹
۱۳۴۸
۱۳۴۷
۱۳۴۶
۱۳۴۵
۱۳۴۴
۱۳۴۳
۱۳۴۲
۱۳۴۱
۱۳۴۰
۱۳۳۹
۱۳۳۸
۱۳۳۷
۱۳۳۶
۱۳۳۵
۱۳۳۴
۱۳۳۳
۱۳۳۲
۱۳۳۱
۱۳۳۰
۱۳۲۹
۱۳۲۸
۱۳۲۷
۱۳۲۶
۱۳۲۵
۱۳۲۴
۱۳۲۳
۱۳۲۲
۱۳۲۱
۱۳۲۰
۱۳۱۹
۱۳۱۸
۱۳۱۷
۱۳۱۶
۱۳۱۵
۱۳۱۴
۱۳۱۳
۱۳۱۲
۱۳۱۱
۱۳۱۰
۱۳۰۹
۱۳۰۸
۱۳۰۷
۱۳۰۶
۱۳۰۵
۱۳۰۴
۱۳۰۳
۱۳۰۲
۱۳۰۱
۱۳۰۰
۱۲۹۹
۱۲۹۸
۱۲۹۷
۱۲۹۶
۱۲۹۵
۱۲۹۴
۱۲۹۳
۱۲۹۲
۱۲۹۱
۱۲۹۰
۱۲۸۹
۱۲۸۸
۱۲۸۷
۱۲۸۶
۱۲۸۵
۱۲۸۴
۱۲۸۳
۱۲۸۲
۱۲۸۱
۱۲۸۰
۱۲۷۹
۱۲۷۸
۱۲۷۷
۱۲۷۶
۱۲۷۵
۱۲۷۴
۱۲۷۳
۱۲۷۲
۱۲۷۱
۱۲۷۰
۱۲۶۹
۱۲۶۸
۱۲۶۷
۱۲۶۶
۱۲۶۵
۱۲۶۴
۱۲۶۳
۱۲۶۲
۱۲۶۱
۱۲۶۰
۱۲۵۹
۱۲۵۸
۱۲۵۷
۱۲۵۶
۱۲۵۵
۱۲۵۴
۱۲۵۳
۱۲۵۲
۱۲۵۱
۱۲۵۰
۱۲۴۹
۱۲۴۸
۱۲۴۷
۱۲۴۶
۱۲۴۵
۱۲۴۴
۱۲۴۳
۱۲۴۲
۱۲۴۱
۱۲۴۰
۱۲۳۹
۱۲۳۸
۱۲۳۷
۱۲۳۶
۱۲۳۵
۱۲۳۴
۱۲۳۳
۱۲۳۲
۱۲۳۱
۱۲۳۰
۱۲۲۹
۱۲۲۸
۱۲۲۷
۱۲۲۶
۱۲۲۵
۱۲۲۴
۱۲۲۳
۱۲۲۲
۱۲۲۱
۱۲۲۰
۱۲۱۹
۱۲۱۸
۱۲۱۷
۱۲۱۶
۱۲۱۵
۱۲۱۴
۱۲۱۳
۱۲۱۲
۱۲۱۱
۱۲۱۰
۱۲۰۹
۱۲۰۸
۱۲۰۷
۱۲۰۶
۱۲۰۵
۱۲۰۴
۱۲۰۳
۱۲۰۲
۱۲۰۱
۱۲۰۰
۱۱۹۹
۱۱۹۸
۱۱۹۷
۱۱۹۶
۱۱۹۵
۱۱۹۴
۱۱۹۳
۱۱۹۲
۱۱۹۱
۱۱۹۰
۱۱۸۹
۱۱۸۸
۱۱۸۷
۱۱۸۶
۱۱۸۵
۱۱۸۴
۱۱۸۳
۱۱۸۲
۱۱۸۱
۱۱۸۰
۱۱۷۹
۱۱۷۸
۱۱۷۷
۱۱۷۶
۱۱۷۵
۱۱۷۴
۱۱۷۳
۱۱۷۲
۱۱۷۱
۱۱۷۰
۱۱۶۹
۱۱۶۸
۱۱۶۷
۱۱۶۶
۱۱۶۵
۱۱۶۴
۱۱۶۳
۱۱۶۲
۱۱۶۱
۱۱۶۰
۱۱۵۹
۱۱۵۸
۱۱۵۷
۱۱۵۶
۱۱۵۵
۱۱۵۴
۱۱۵۳
۱۱۵۲
۱۱۵۱
۱۱۵۰
۱۱۴۹
۱۱۴۸
۱۱۴۷
۱۱۴۶
۱۱۴۵
۱۱۴۴
۱۱۴۳
۱۱۴۲
۱۱۴۱
۱۱۴۰
۱۱۳۹
۱۱۳۸
۱۱۳۷
۱۱۳۶
۱۱۳۵
۱۱۳۴
۱۱۳۳
۱۱۳۲
۱۱۳۱
۱۱۳۰
۱۱۲۹
۱۱۲۸
۱۱۲۷
۱۱۲۶
۱۱۲۵
۱۱۲۴
۱۱۲۳
۱۱۲۲
۱۱۲۱
۱۱۲۰
۱۱۱۹
۱۱۱۸
۱۱۱۷
۱۱۱۶
۱۱۱۵
۱۱۱۴
۱۱۱۳
۱۱۱۲
۱۱۱۱
۱۱۱۰
۱۱۰۹
۱۱۰۸
۱۱۰۷
۱۱۰۶
۱۱۰۵
۱۱۰۴
۱۱۰۳
۱۱۰۲
۱۱۰۱
۱۱۰۰
۱۰۹۹
۱۰۹۸
۱۰۹۷
۱۰۹۶
۱۰۹۵
۱۰۹۴
۱۰۹۳
۱۰۹۲
۱۰۹۱
۱۰۹۰
۱۰۸۹
۱۰۸۸
۱۰۸۷
۱۰۸۶
۱۰۸۵
۱۰۸۴
۱۰۸۳
۱۰۸۲
۱۰۸۱
۱۰۸۰
۱۰۷۹
۱۰۷۸
۱۰۷۷
۱۰۷۶
۱۰۷۵
۱۰۷۴
۱۰۷۳
۱۰۷۲
۱۰۷۱
۱۰۷۰
۱۰۶۹
۱۰۶۸
۱۰۶۷
۱۰۶۶
۱۰۶۵
۱۰۶۴
۱۰۶۳
۱۰۶۲
۱۰۶۱
۱۰۶۰
۱۰۵۹
۱۰۵۸
۱۰۵۷
۱۰۵۶
۱۰۵۵
۱۰۵۴
۱۰۵۳
۱۰۵۲
۱۰۵۱
۱۰۵۰
۱۰۴۹
۱۰۴۸
۱۰۴۷
۱۰۴۶
۱۰۴۵
۱۰۴۴
۱۰۴۳
۱۰۴۲
۱۰۴۱
۱۰۴۰
۱۰۳۹
۱۰۳۸
۱۰۳۷
۱۰۳۶
۱۰۳۵
۱۰۳۴
۱۰۳۳
۱۰۳۲
۱۰۳۱
۱۰۳۰
۱۰۲۹
۱۰۲۸
۱۰۲۷
۱۰۲۶
۱۰۲۵
۱۰۲۴
۱۰۲۳
۱۰۲۲
۱۰۲۱
۱۰۲۰
۱۰۱۹
۱۰۱۸
۱۰۱۷
۱۰۱۶
۱۰۱۵
۱۰۱۴
۱۰۱۳
۱۰۱۲
۱۰۱۱
۱۰۱۰
۱۰۰۹
۱۰۰۸
۱۰۰۷
۱۰۰۶
۱۰۰۵
۱۰۰۴
۱۰۰۳
۱۰۰۲
۱۰۰۱
۱۰۰۰

مثال: ثابت کنید مربع هر عدد فرد بصورت $8q + 1$ است.

$$(2k+1)^2 = \underbrace{\sum k^2 + \sum k + 1}_{2q} = \underbrace{\sum k(k+1)}_{2q} + 1 = 8q + 1$$

هر دو عدد متوالی $2q$



۳- اثبات به روش مثال نقض : اگر حکم ارائه شده درست نباشد برای اثبات نادرستی آن باید مثال نقض بیاوریم. مثال نقض، مثالی است که برای ردّ یک حکم کلی آورده می‌شود.

مثلا برای حکم «عدد $2^{2^n} + 1$ به ازای همه اعداد طبیعی n اول است» مثال نقض $n = 5$ وجود دارد که در اینصورت حاصل عدد بر 641 بخشپذیر خواهد بود.

$$2^{2^5} + 1 = 641$$



تجربیات

مثال: برای ردّ احکام زیر مثال نقض بیاورید :

(الف) به ازای هر عدد طبیعی n عدد $3^n + 4$ عددی اول است.

$n=6$: $3^6 + 4 = 729 + 4 = 733 = 17 \times 43$ X

(ب) برای هر عدد حقیقی x, y داریم: $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

$x=9$
 $y=2$
 $\sqrt{11} \neq 3 + \sqrt{2}$

(پ) اگر برای هر سه مجموعه C, B, A داشته باشیم $A \cup B = A \cup C$ آنگاه $B = C$

(ت) برای هر عدد طبیعی بزرگتر از ۱ عدد $2^n - 1$ اول است.

$n=4$: $2^4 - 1 = 15 = 3 \times 5$ X

$\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$
 $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

(ث) اگر x, y دو عدد گنگ باشند آنگاه $x+y$ و $x-y$ و x^y اعدادی گنگ هستند.

$x=2$
 $y=\sqrt{2}$

$2 = 2$



باسمه تعالی

| | | | |
|---|-----------------------|--|------------------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته | نام و نام خانوادگی: | ساعت شروع: ۸ صبح | رشته: ریاضی فیزیک |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه: ۲ | تاریخ امتحان: ۱۳۹۹/۰۴/۰۸ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۹ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد | | |
| نمره | | | |

| | | |
|---|--|------|
| ۱ | گزاره درست را اثبات کنید و برای گزاره نادرست، مثال نقض ارائه دهید. الف) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. ب) اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش پذیر است. | ۱/۷۵ |
|---|--|------|

$$19 + 1$$

$$(2k + 1)^2 - 1 = 19$$

باسمه تعالی

| | | | |
|---|-----------------------|--|------------------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته | نام و نام خانوادگی: | ساعت شروع: ۸ صبح | رشته: ریاضی فیزیک |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه: ۲ | تاریخ امتحان: ۱۴۰۰/۰۳/۰۸ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه ، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۴۰۰ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد | | |
| نمره | | | |

| | | |
|---|---|-----|
| ۱ | درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است. ب) هیچ عدد صحیحی مانند x و y وجود ندارند که رابطه $x^2 + y^2 = (x + y)^2$ برقرار باشد. | ۰/۵ |
|---|---|-----|



باسمه تعالی

| | | | |
|--|--|--|-------------------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته | رشته : ریاضی فیزیک | نام و نام خانوادگی : | ساعت شروع : ۸ صبح |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه : ۲ | تاریخ امتحان : ۱۴۰۱/۰۳/۲۸ | مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۴۰۱ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد. (استفاده از ماشین حساب ساده، با چهار عمل اصلی، مجاز است.) | | |
| نمره | | | |

| | | |
|---|--|---|
| ۲ | ثابت کنید برای هر عدد طبیعی زوج n ، $n^2 - 5n + 7$ عددی فرد است. | ۱ |
|---|--|---|

باسمه تعالی

| | | | |
|---|--|--|-------------------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته | نام و نام خانوادگی : | ساعت شروع : ۸ صبح | رشته : ریاضی فیزیک |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه : ۲ | تاریخ امتحان : ۱۳۹۸/۶/۴ | مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت شهریور ماه سال ۱۳۹۸ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد | | |
| نمره | | | |
| ۱ | درستی یا نادرستی گزاره های زیر را تعیین کنید. الف) مجموع هر دو عدد فرد ، عددی زوج است. ب) برای هر عدد طبیعی n بزرگتر از ۱ ، عدد $2^n - 1$ اول است. | .۵ | |







نهج جدید در جمع

گسسته دوازدهم

اثبات غیرمستقیم یا برهان خلف



اپیزود ۲: اثبات غیر مستقیم یا برهان خلف

اثبات غیرمستقیم (برهان خلف) :

در این روش فرض می‌کنیم حکم نادرست باشد و سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و دنباله‌ای از استدلال‌های درست و مبتنی بر فرض، به یک نتیجه غیرممکن یا متضاد با فرض می‌رسیم و از این تناقض نتیجه می‌گیریم که فرض نادرست بودن حکم باطل است و حکم درست است.



مجموعه
تجربه
المنطق
الرياضية

مثال: ثابت کنید حاصل جمع هر عدد گویا با یک عدد گنگ عددی گنگ است.

رضی حکیم x گویا و y گنگ باشد اما $x+y$ گنگ نباشد در گریه باشد.

$$\text{گویا} = y \rightarrow \text{عدد گویا} = \underbrace{x}_{\text{گویا}} + \underbrace{y}_{\text{گویا}}$$

این سخن با سخن من هم صحیح است.



مجموعه
مفاهیم
مهم
در
مطالعه
ریاضیات
و
فیزیک

مثال: ثابت کنید حاصلضرب هر عدد گویای مخالف صفر در عددی گنگ، گنگ است.

فرض کنیم h گویا و a گنگ بوده اما $h \neq 0$
 a گنگ باشد پس $h \cdot a$ گویا است:

$$\frac{1}{h} \times \underbrace{ha}_{\text{گویا}} = \text{گویا} \rightarrow a = \text{گویا}$$

نتیجه با فرض برعکس هم صحیح است.



مجموعه
 ریاضیات
 پایه دهم
 فصل اول
 بخش اول
 تمرینات

مثال: اگر a_1, a_2, a_3 سه عدد صحیح و b_1, b_2, b_3 همان سه عدد اما با ترتیبی دیگر باشند ثابت کنید

عدد $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ زوج است.

زوج نباشد پس فرد است. پس $a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3$

فرد است پس مجموع آنها نیز فرد باشد:

$$a_1 - b_1 + a_2 - b_2 + a_3 - b_3 = \text{فرد}$$

$$(a_1 + a_2 + a_3) - (b_1 + b_2 + b_3) = 0$$

نتیجه: فرد = فرد پس همه فرد است.



مجموعه الماتریه

مثال: اگر x یک عدد گنگ باشد ثابت کنید $\frac{1}{x}$ نیز گنگ است.



تجرباتی
المانی
المعمول
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20

مثال: اگر تابع f در $x = a$ پیوسته ولی تابع g در $x = a$ ناپیوسته باشد، ثابت کنید تابع $f + g$ در $x = a$ ناپیوسته است.

$$x = a$$

فرض کنیم $f + g$ پیوسته است پس چون فصل در تابع پیوسته خواهد بود پس
 یعنی $f - (f + g)$ نیز پیوسته باشد یعنی g پیوسته است که هدف
 تضاد است پس حکم صحیح است.



مجموعه سوالات
 عربی
 ریاضی
 فیزیک
 شیمی
 بیولوژی
 تاریخ
 جغرافیا
 فلسفه
 هنر
 ورزش

مثال: اگر α, β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد ثابت کنید اعداد زیر گنگ هستند:

الف) $\alpha - \beta$

و سی بی بی ناقصی است

می آید

فرض صاف، طول و حکم

صحیح است

ب) $\alpha + 2\beta$

فرض کنیم $\alpha + 2\beta$ گنگ باشد پس گویا است (برای گناه)

که تفاضل دو عدد گویا گویا است پس $(\alpha + 2\beta) - (\alpha + \beta)$

بزرگ گویا باشد یعنی β گویا است که خلاف فرض

است پس حکم صحیح است



الماتریة
المعربة
2022

مشاهده نمونه سوال نهایی:

باسمه تعالی

| | | | |
|--|--|--|------------------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته | ساعت شروع: ۸ صبح | نام و نام خانوادگی: | رشته: ریاضی فیزیک |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه: ۲ | تاریخ امتحان: ۱۴۰۰/۰۶/۲۷ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت شهریور ماه سال ۱۴۰۰ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد | | |
| ۱ | ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است. | | |

باسمه تعالی

| | | | |
|--|---|--|------------------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته | تعداد صفحه: ۲ | رشته: ریاضی - فیزیک | نام و نام خانوادگی: |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | ساعت شروع: ۸ صبح | تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۰۶/۰۶ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت شهریور ماه سال ۱۴۰۱ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد. (استفاده از ماشین حساب ساده، با چهار عمل اصلی، مجاز است.) | | |
| ۲ | a_1, a_2, a_3 اعدادی صحیح هستند و b_1, b_2, b_3 هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته اند. ثابت کنید $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ عددی زوج است. | | |
| ۱/۲۵ | | | |





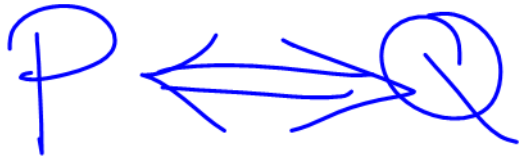
نهال ریاضی جمع

گسسته دوازدهم

گزاره‌های دو شرطی و اثبات بازگشتی



اپیزود ۳: گزاره‌های دوشرطی و اثبات بازگشتی



۱- گزاره‌های دوشرطی

نکته: برای بررسی ارزش یک گزاره دوشرطی باید بررسی کنیم که هم بتوانیم از P به Q برسیم و هم بتوانیم از Q به P برسیم.



مجموعه‌های صفتی
عبارت‌ها
مجموعه‌ها
تجزیه و تحلیل

مثال: درستی یا نادرستی گزاره‌های دوشروطی زیر را تعیین کنید.

الف) $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ \times $a^2 = b^2 \xrightarrow{\text{مربع}} |a| = |b| \times$

ب) $a^3 = b^3 \Leftrightarrow a = b$

پ) $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$ \times $a < b \not\Rightarrow a^2 < b^2$ $-3 < -2 \rightarrow 9 > 4$

ت) $a^3 \geq b^3 \Leftrightarrow a \geq b$



تجربیات
معمول
در
مطالعه
ریاضی

۲- اثبات بازگشتی : نامساوی را ساده می کنیم تا به یک عبارت همیشه درست برسیم آنگاه برای آنکه نشان دهیم همه مراحل برگشت پذیر است، جهت فلش ها را دوطرفه می کنیم.

مثال: برای هر عدد مثبت a ثابت کنید $a + \frac{1}{a} \geq 2$

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \xleftrightarrow{\times a} a^2 + 1 \geq 2a \xleftrightarrow{-2a} a^2 - 2a + 1 \geq 0$$

$$\xleftrightarrow{\text{مربع کامل}} (a-1)^2 \geq 0$$



تجربا العربيه

مثال: برای هر عدد منفی a ثابت کنید $a + \frac{1}{a} \leq -2$

$$a + \frac{1}{a} \leq -2 \xrightarrow{\times a} a^2 + 1 \geq -2a \rightarrow a^2 + 2a + 1 \geq 0$$

$$\rightarrow (a+1)^2 \geq 0$$

همیشه درست



مثال: برای هر دو عدد نامنفی a, b ثابت کنید $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ «میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آنها کمتر نیست»

$$\xrightarrow{\times 2} a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

همیشه درست



تجربه الماریت

مثال: برای هر دو عدد حقیقی و مخالف صفر x, y ثابت کنید $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \iff x^2 + y^2 \geq 2xy \iff x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$$

$$\iff (x - y)^2 \geq 0$$

همیشه درست



مجموعه
موسسه
تربیتی
معدنی
فوق

نکته : برای مربع کامل کردن، ضریب درجه ۱ را نصف کرده، به توان ۲ رسانده و یکی زیاد و یکی کم می کنیم.



مثال: برای هر دو عدد حقیقی a, b ثابت کنید $a^2 + ab + b^2 \geq 0$

$$a^2 + b(a) + b^2 \geq 0$$

$$a^2 + b(a) + \frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{2} + b^2 \geq 0$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$$

هر دو مثبت

~~$$\times 2 \rightarrow 2a^2 + 2ab + 2b^2 \geq 0$$~~

~~$$\rightarrow (a^2 + 2ab + b^2) + a^2 + b^2 \geq 0$$~~

~~$$\Leftrightarrow (a+b)^2 + a^2 + b^2 \geq 0$$~~

$$\left(b + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2}{4} \geq 0$$

هر دو مثبت



مجموعه‌های مختلف از اشکال هندسی و نمادهای ریاضی در حاشیه راست تصویر.

نکته : دسته‌ای از اثبات‌های بازگشتی هستند که لازم است ابتدا طرفین را در ۲ ضرب کنیم (مانند مثال ۶) و سپس با دسته‌بندی عملیات به چند عبارت مربع کامل برسیم.



مثال: ثابت کنید $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$

$$\Delta x^2 \rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz \geq 0$$

$$\Delta \rightarrow (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2xz + z^2) + (y^2 - 2yz + z^2) \geq 0$$

$$\Delta \rightarrow \underbrace{(x - y)^2} + \underbrace{(x - z)^2} + \underbrace{(y - z)^2} \geq 0$$

همیشه ≥ 0



المثلثات
 الجبر
 الهندسة
 الاحتمال
 المتكامل

مثال: به کمک اثبات بازگشتی ثابت کنید : $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$

$$\Delta \xrightarrow{x^2} 2x^2 + 2y^2 + \textcircled{2} - 2xy - 2x - 2y \geq 0$$

$$\Delta \rightarrow (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) \geq 0$$

$$\Delta \rightarrow (x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0$$

همیشه درست



تجربیات ارزشمند

نکته : عمل برگشت پذیری و استفاده از حکم برای رسیدن به پاسخ مساله، در بسیاری از استدلال های مشابه در ریاضیات قابل استفاده است.



مثال: آیا اعداد صحیح مانند x, y وجود دارند بطوریکه $x^r + y^r = (x+y)^r$ ؟

$$\cancel{x^r} + \cancel{y^r} = \cancel{x^r} + \cancel{y^r} + rxy$$

$$\Leftrightarrow rxy = 0 \Leftrightarrow xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \cup \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 0 \end{cases}$$



مثال: آیا اعداد حقیقی و ناصفر مانند a, b وجود دارند بطوریکه: $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

$$\frac{1}{a+b} = \frac{a+b}{ab} \rightarrow (a+b)^2 = ab \rightarrow a^2 + 2ab + b^2 - ab = 0$$

$$\rightarrow a^2 + ab + b^2 = 0 \rightarrow (a^2 + 2ab + b^2) + a^2 + b^2 = 0$$

$$\rightarrow (a+b)^2 + a^2 + b^2 = 0 \rightarrow a=0 \wedge b=0$$

\downarrow $a+b=0$ \downarrow $a=0$ \downarrow $b=0$



مثال: آیا عدد صحیح مانند x وجود دارد بطوریکه $x^3 < x^2$:

$$x^3 - x^2 < 0$$

$$x^2(x-1) < 0$$

یعنی $x < 1$



مجموعه
فایل
های
آموزشی
و
تربیتی
در
موضوع
ریاضی
و
فیزیک

مشاهده نمونه سوال نهایی :

باسمه تعالی

| | | | |
|---|-----------------------|--|-----------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته | نام و نام خانوادگی : | ساعت شروع : ۸ صبح | تعداد صفحه: ۲ |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | رشته : ریاضی فیزیک | تاریخ امتحان : ۱۳۹۸/۳/۲۵ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۸ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد | | |
| نمره | | | |

| | |
|---|---|
| ۱ | ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آنها کمتر نیست . |
|---|---|

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

باسمه تعالی

| | | | |
|---|-----------------------|--|-----------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته | نام و نام خانوادگی : | ساعت شروع : ۸ صبح | رشته : ریاضی فیزیک |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه: ۲ | تاریخ امتحان : ۱۴۰۰/۰۳/۸ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۴۰۰ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد | | |
| نمره | | | |

| | |
|---|---|
| ۱ | درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است. ب) هیچ عدد صحیحی مانند x و y وجود ندارند که رابطه $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ برقرار باشد. |
|---|---|

| | |
|---|---|
| ۳ | به روش بازگشتی ثابت کنید حاصل ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربعات آن‌ها است. |
|---|---|



باسمه تعالی

| | | | |
|---|---|---|-----------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته | ساعت شروع: ۸ صبح | نام و نام خانوادگی: | رشته: ریاضی فیزیک |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه: ۲ | تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۰۳/۲۱ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۴۰۲ | | مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش http://aee.medu.gov.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد. (استفاده از ماشین حساب ساده، با چهار عمل اصلی، مجاز است.) | | |
| نمره | | | |

| | | |
|---|---|------|
| ۳ | اگر x, y, z سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید: $x^2 + y^2 + 1 \geq 2xy - z^2$ | ۰/۷۵ |
|---|---|------|

$$(x-y)^2 + 1 + z^2 \geq 0$$



مجموعه المپیاد





نهان در جمع

گسسته دوازدهم

عاد کردن



اپیزود ۴ : عاد کردن

◀ بخش پذیری در اعداد صحیح (عاد کردن) :

می‌گوییم a عاد می‌کند b را و می‌نویسیم $a | b$ هرگاه عدد صحیح b بر عدد صحیح a بخش پذیر باشد (به عبارتی a شمارنده «مقسوم علیه» b است)

b بر a بخش پذیر است. (۱)

$$a | b \Rightarrow$$

a مقسوم علیه b است. (۲)

$$a | b \Leftrightarrow b = aq$$

توجه

$5 | 15$
 $15 = 5 \times 3$

$$a | b \Leftrightarrow b = aq; q \in \mathbb{Z}$$



◀ خواص و ویژگی‌های عاد کردن :

$$۱) \forall a \in \mathbb{Z}; \underbrace{a | a}, \underbrace{a | -a}, \underbrace{-a | a}, \underbrace{a | 0}, \underbrace{1 | a}$$

$$۲) \cdot | a \Rightarrow a = \cdot$$

$$۳) a | 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

$$۴) a | b \wedge b | c \Rightarrow a | c \quad \text{خاصیت تعدی}$$

اثبات :

$$a | b \Rightarrow b = aq$$

$$b | c \Rightarrow c = bq' = aqq' \Rightarrow c = aq'' \Rightarrow a | c \quad \checkmark$$

$$۵) a | b \Leftrightarrow \underbrace{-a | b}, \underbrace{a | -b}, \underbrace{-a | -b}$$



تجربة العربية

$$۶) a | b, c | d \Rightarrow ac | bd$$

اثبات :

$$\left. \begin{array}{l} a | b \Rightarrow b = aq \\ c | d \Rightarrow d = cq' \end{array} \right\} \begin{array}{l} (\times) \\ \Rightarrow bd = ac \underbrace{qq'}_{q''} \Rightarrow bd = acq'' \Rightarrow ac | bd \end{array}$$

$$۷) a | b, b \neq 0 \Rightarrow |a| \leq |b|$$

$$q \in \mathbb{Z}$$

اثبات : وقتی $a | b$ یعنی $|b| = |aq|$ و از آنجایی که $b \neq 0$ پس $q \neq 0$ یعنی $q \geq 1$ یا $q \leq -1$ و در نتیجه $|q| \geq 1$:

$$|q| \geq 1 \xrightarrow{\times |a|} |aq| \geq |a| \Rightarrow |b| \geq |a| \checkmark$$



تجربة العربية

۸) $a \mid b, b \mid a \Rightarrow a = \pm b$

اثبات: $\left. \begin{array}{l} a \mid b \Rightarrow |a| \leq |b| \\ b \mid a \Rightarrow |b| \leq |a| \end{array} \right\} \Rightarrow |a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$

۹) $a \mid b \Leftrightarrow \overset{m \in \mathbb{Z}}{ma} \mid mb$

$a \mid b \Rightarrow b = aq \overset{\times m}{\Rightarrow} mb = maq \Rightarrow ma \mid mb \checkmark$

اثبات :



$$۱.۰) a \mid b \Rightarrow a \mid mb$$

 $m \in \mathbb{Z}$

اثبات :

$$a \mid b \Rightarrow b = aq \Rightarrow mb = a \underbrace{(mq)}_{q'} \Rightarrow mb = aq' \Rightarrow a \mid mb \checkmark$$



$$11) \begin{matrix} a | b & m \in \mathbb{Z} \\ a | c & n \in \mathbb{Z} \end{matrix} \Rightarrow a | mb + nc \quad \text{خاصیت ترکیب خطی}$$

اثبات :

$$a | b \Rightarrow b = aq \xrightarrow{\times m} mb = a(mq)$$

$$a | c \Rightarrow c = aq' \xrightarrow{\times n} nc = a(nq')$$

$$\underbrace{(+)}_{q''} mb + nc = a(mq + nq') \Rightarrow mb + nc = aq'' \Rightarrow a | mb + nc \quad \checkmark$$

حالت خاص :

$$a | b \Rightarrow a | b \pm c$$

$$a | c$$



عربی
الجزء
الاول
الجزء
الثاني
الجزء
الثالث
الجزء
الرابع
الجزء
الخامس
الجزء
السادس
الجزء
السابع
الجزء
الثامن
الجزء
التاسع
الجزء
العاشر

$$۱۲) a | b \Leftrightarrow a^n | b^n \quad n \in \mathbb{N}$$

اثبات :

$$a | b \Rightarrow b = aq \xRightarrow{\uparrow n} b^n = a^n \underbrace{q^n}_{q'} \Rightarrow b^n = a^n q' \Rightarrow a^n | b^n \quad \checkmark$$

$$۱۳) a | b, m \leq n \Rightarrow a^m | b^n$$

اثبات :

$$m \leq n \Rightarrow n = m + p \rightarrow \text{عدد ثابت}$$

$$a | b \xRightarrow{\uparrow n} a^n | b^n \Rightarrow b^n = a^n q \Rightarrow b^n = a^{m+p} q \Rightarrow b^n = a^m \times \underbrace{a^p q}_{q'} \Rightarrow b^n = a^m q' \Rightarrow a^m | b^n \quad \checkmark$$



تجربا العربیة

$$۱۴) \overset{n \in \mathbb{N}}{a \mid b} \Rightarrow a \mid b^n$$

اثبات :

راه اول (تعدی): $a \mid b, b \mid b^n \Rightarrow a \mid b^n \checkmark$

راه دوم: $a \mid b \Rightarrow b = aq \xRightarrow{\uparrow n} b^n = a^n q^n \Rightarrow b^n = a \underbrace{a^{n-1} q^n}_{q'} \Rightarrow b^n = aq' \Rightarrow a \mid b^n$



مثال: اگر دو عدد $7m+6$ و $6m+5$ بر a بخش پذیر باشند، ثابت کنید $a = \pm 1$.

$$\begin{array}{l}
 a \mid 7m+6 \xrightarrow{\times 4} a \mid 28m+24 \\
 a \mid 6m+5 \xrightarrow{\times 7} a \mid 42m+35 \\
 \hline
 \ominus \\
 \hline
 a \mid 1 \\
 \hline
 a = \pm 1
 \end{array}$$



مجموعه
 ۲۰۲۰
 ۱۴۰۰
 ۱۴۰۱
 ۱۴۰۲
 ۱۴۰۳
 ۱۴۰۴
 ۱۴۰۵
 ۱۴۰۶
 ۱۴۰۷
 ۱۴۰۸
 ۱۴۰۹
 ۱۴۱۰
 ۱۴۱۱
 ۱۴۱۲
 ۱۴۱۳
 ۱۴۱۴
 ۱۴۱۵
 ۱۴۱۶
 ۱۴۱۷
 ۱۴۱۸
 ۱۴۱۹
 ۱۴۲۰
 ۱۴۲۱
 ۱۴۲۲
 ۱۴۲۳
 ۱۴۲۴
 ۱۴۲۵
 ۱۴۲۶
 ۱۴۲۷
 ۱۴۲۸
 ۱۴۲۹
 ۱۴۳۰
 ۱۴۳۱
 ۱۴۳۲
 ۱۴۳۳
 ۱۴۳۴
 ۱۴۳۵
 ۱۴۳۶
 ۱۴۳۷
 ۱۴۳۸
 ۱۴۳۹
 ۱۴۴۰
 ۱۴۴۱
 ۱۴۴۲
 ۱۴۴۳
 ۱۴۴۴
 ۱۴۴۵
 ۱۴۴۶
 ۱۴۴۷
 ۱۴۴۸
 ۱۴۴۹
 ۱۴۵۰
 ۱۴۵۱
 ۱۴۵۲
 ۱۴۵۳
 ۱۴۵۴
 ۱۴۵۵
 ۱۴۵۶
 ۱۴۵۷
 ۱۴۵۸
 ۱۴۵۹
 ۱۴۶۰
 ۱۴۶۱
 ۱۴۶۲
 ۱۴۶۳
 ۱۴۶۴
 ۱۴۶۵
 ۱۴۶۶
 ۱۴۶۷
 ۱۴۶۸
 ۱۴۶۹
 ۱۴۷۰
 ۱۴۷۱
 ۱۴۷۲
 ۱۴۷۳
 ۱۴۷۴
 ۱۴۷۵
 ۱۴۷۶
 ۱۴۷۷
 ۱۴۷۸
 ۱۴۷۹
 ۱۴۸۰
 ۱۴۸۱
 ۱۴۸۲
 ۱۴۸۳
 ۱۴۸۴
 ۱۴۸۵
 ۱۴۸۶
 ۱۴۸۷
 ۱۴۸۸
 ۱۴۸۹
 ۱۴۹۰
 ۱۴۹۱
 ۱۴۹۲
 ۱۴۹۳
 ۱۴۹۴
 ۱۴۹۵
 ۱۴۹۶
 ۱۴۹۷
 ۱۴۹۸
 ۱۴۹۹
 ۱۵۰۰

مثال: اگر عدد طبیعی a بزرگتر از ۱ بوده و دو عدد $9k+7$ و $7k+6$ را عاد کند، ثابت کنید $a=5$.

$$\begin{aligned}
 a \mid 9k+7 &\xrightarrow{\times 7} a \mid 63k+49 \\
 a \mid 7k+6 &\xrightarrow{\times 9} a \mid 63k+54 \\
 &\xrightarrow{-} a \mid 5 \\
 &\rightarrow a = \pm 1, \pm 5 \\
 &\rightarrow a = 5
 \end{aligned}$$



تعمیرات
 هندسه
 جبر
 حسابان
 آمار و احتمال
 فیزیک
 شیمی
 زیست

مثال: اگر $a > 1$ و $a \mid 9k + 4$ و $a \mid 5k + 3$ آنگاه ثابت کنید a عددی اول است.

~~$a \mid 9k + 4$~~ و ~~$a \mid 5k + 3$~~



المعربية
الرياض
2017/1439

مثال: اگر $4k+1 \mid 5$ ثابت کنید $25 \mid 16k^2 + 28k + 6$.

رضی

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{l}
 8 \mid 2k+1 \xrightarrow{+2} 25 \mid 14k^2 + 1k + 1 \\
 \xrightarrow{+0} 20 \mid 20k + 8
 \end{array}
 \end{array}
 \left.
 \begin{array}{l}
 \\
 \end{array}
 \right\}
 \begin{array}{l}
 \oplus \\
 \rightarrow 28 \mid 19k^2 + 21k + 9
 \end{array}$$



المربية
 (1)
 (2)
 (3)
 (4)
 (5)
 (6)
 (7)
 (8)
 (9)
 (10)



مثال: اگر داشته باشیم $ab = cd$ آنگاه پنج رابطه عادی را از این تساوی بنویسید.

$$ab = c(d) \rightarrow c | ab$$

$$ab | cd$$

$$ab = d(c) \rightarrow d | ab$$

$$cd | ab$$

$$cd = a(b) \rightarrow a | cd$$

$$cd = b(a) \rightarrow b | cd$$



تجربا العربیة

نکته : خواست باشه ویژگی‌های عاد کردن همین‌هایی بود که گفتم دیگه چیزی بجز اینها بعنوان ویژگی وجود نداره پس دقت کن گولت نزنن اگه قانون دیگه‌ای دادن بین مثال نقض داره یا نه؟

$$a | bc \not\Rightarrow a | b \vee a | c$$

$$6 | 3 \times 4 \Rightarrow \cancel{6 | 3} \quad \cancel{6 | 4}$$

$$a | b + c \not\Rightarrow a | b \text{ یا } a | c$$

$$5 | 2 + 3 \Rightarrow \cancel{5 | 2} \quad \cancel{5 | 3}$$

$$a | b , c | d \not\Rightarrow a + c | b + d$$

$$2 | 4 , 3 | 9 \Rightarrow \cancel{5 | 13}$$



تجربیات

$b+c \mid a \not\Rightarrow b \mid a$ یا $c \mid a$

$2+3 \mid 5 \Rightarrow 2 \not\mid 5 \quad 3 \not\mid 5$

$a \mid b^n \not\Rightarrow a \mid b$
 $4 \mid 2^4 \Rightarrow 4 \not\mid 2$

$a \mid b \rightarrow a \mid b^n$

$a \mid b^n \not\rightarrow a \mid b$



مشاهده نمونه سوال نهایی :

باسمه تعالی

| | | | |
|--|-----------------------|--|------------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته | نام و نام خانوادگی : | ساعت شروع : ۸ صبح | رشته : ریاضی فیزیک |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه : ۲ | تاریخ امتحان : ۱۳۹۹/۰۴/۰۸ | مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۹ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد | | |
| نمره | | | |

| | | |
|---|--|---|
| ۳ | اگر $n \in N$ ، $n 9k+7$ و $n 7k+6$ ، ثابت کنید $n=1$ یا $n=5$. | ۱ |
|---|--|---|

باسمه تعالی

| | | | |
|---|--|--|------------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته | رشته : ریاضی فیزیک | نام و نام خانوادگی : | ساعت شروع : ۸ صبح |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه : ۲ | تاریخ امتحان : ۱۴۰۱/۰۳/۲۸ | مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۴۰۱ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد. (استفاده از ماشین حساب ساده، با چهار عمل اصلی، مجاز است.) | | |
| نمره | | | |

| | | |
|---|--|------|
| ۳ | اگر عددی مانند k در Z باشد، به طوری که $5 4k + 1$ ، ثابت کنید $25 16k^2 + 28k + 6$. | ۰/۷۵ |
|---|--|------|



باسمه تعالی

| | | | |
|---|--|---------------------------|------------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته | ساعت شروع : ۸ صبح | نام و نام خانوادگی : | رشته : ریاضی فیزیک |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه : ۲ | تاریخ امتحان : ۱۴۰۲/۰۳/۲۱ | مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۴۰۲ | | | |
| مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش http://aee.medu.gov.ir | | | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد. (استفاده از ماشین حساب ساده، با چهار عمل اصلی، مجاز است.) | | |
| نمره | | | |

| | | |
|---|--|---|
| ۴ | اگر $a 2m+3$ و $a m+7$ در این صورت چند مقدار صحیح و نامنفی برای a وجود دارد؟ | ۱ |
|---|--|---|

$$\begin{array}{l}
 a|2m+3 \\
 a|m+7 \xrightarrow{\times 2} a|2m+14
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} a|2m+3 \\ a|m+7 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \ominus \\ \hline \end{array} a|11 \\
 a = \pm 1, \pm 11$$

(11)







نهج جدید در جمع

گسسته دوازدهم

ب.م.م و ک.م.م



اپیزود ۵: ب.م.م و ک.م.م

۱- ب.م.م. دو عدد :

عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد a, b می‌نامیم هر گاه دو شرط زیر برقرار باشد :

$$۱) \underline{d | a, d | b}$$

$$۲) \underline{\forall m > 0 ; m | a, m | b \Rightarrow m \leq d}$$

بندگترین مقوم علیه مشترک

در این صورت $(a, b) = d$ نمایش می‌دهیم.



تجربیات
 (۱) (۲) (۳) (۴) (۵) (۶) (۷) (۸) (۹) (۱۰) (۱۱) (۱۲) (۱۳) (۱۴) (۱۵) (۱۶) (۱۷) (۱۸) (۱۹) (۲۰) (۲۱) (۲۲) (۲۳) (۲۴) (۲۵) (۲۶) (۲۷) (۲۸) (۲۹) (۳۰) (۳۱) (۳۲) (۳۳) (۳۴) (۳۵) (۳۶) (۳۷) (۳۸) (۳۹) (۴۰) (۴۱) (۴۲) (۴۳) (۴۴) (۴۵) (۴۶) (۴۷) (۴۸) (۴۹) (۵۰)

$$a \in \mathbb{Z}$$

$$۱) (a, a) = |a|$$

$$۲) (a, b) = (a, -b) = (-a, b) = (-a, -b)$$

$$۳) (a, ۱) = ۱$$

$$۴) (a, ۰) = |a|$$

$$۵) a | b \Rightarrow (a, b) = |a|$$

$$(۲m^۲, ۸m^۵) = \dots ۲m^۲$$

$$(۱۲m^۲, ۴m) = \dots |۴m|$$

$$۲m^۲ | ۸m^۵$$

$$۴m | ۱۲m^۲$$



ویژه امتحان نهایی

◀ دو عدد نسبت به هم اول :

دو عدد که ب.م.م آنها برابر ۱ باشد (هیچ مقسوم علیه مشترکی بجز ۱ ندارند): $(۱۲, ۱۳) = ۱$ $(۵, ۷) = ۱$

$$(a, b) = d \rightarrow d | a \text{ و } d | b$$

◀ کاربرد شرط اول تعریف ب.م.م در محاسبه ب.م.م عبارات جبری :

می‌خواهیم ب.م.م دو عبارت $f(n)$ و $g(n)$ را حساب کنیم. ابتدا فرض می‌کنیم $(f(n), g(n)) = d$ باشد پس طبق شرط ۱ داریم :

$$\left. \begin{array}{l} d | f(n) \\ d | g(n) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{خطی} \\ \text{کلیب} \\ \Rightarrow d \text{ به دست می‌آید} \end{array}$$



مثال: ثابت کنید هر دو عدد متوالی نسبت به هم اولند: فرض $(n, n+1) = d$

$$\begin{array}{l} d|n \\ d|n+1 \end{array} \xrightarrow{\ominus} d|1 \rightarrow d=1$$



المثلثات
 الجبر
 الهندسة
 الاحتمال
 التفاضل والتكامل

مثال: ثابت کنید هر دو عدد فرد متوالی نسبت به هم اولند.

$$(2k+1, 2k+3) = d$$

$$d | 2k+1$$

$$d | 2k+3$$

$$\ominus \rightarrow d | 2 \rightarrow d = 1 \text{ یا } 2 \rightarrow d = 1$$

↓ زیرا در عدد فرد است



مثال: ثابت کنید دو عدد $3m+4$ و $5m+7$ نسبت به هم اولند. ^{و فرض}
 $(3m+4, 5m+7) = d$

$$\begin{array}{l}
d \mid 3m+4 \xrightarrow{\times 5} d \mid 15m+20 \\
d \mid 5m+7 \xrightarrow{\times 3} d \mid 15m+21 \\
\hline
\text{⊖} \rightarrow d \mid 1 \\
\hline
\rightarrow d = 1
\end{array}$$



مجموعه
کتابخانه
موسسه
تربیتی

مثال: اگر p, q دو عدد اول باشند، ثابت کنید $(p, q) = 1$

$$(p, q) = d$$

$$d | p \xrightarrow{d | p} d = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} d = p \\ d = q \end{array} \right\} \rightarrow d = 1$$

$$d | q \xrightarrow{d | q} d = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} d = p \\ d = q \end{array} \right\} \rightarrow d = 1$$

$$d = 1$$



مجموعه الماتریه

۲- ک.م.م دو عدد :

عدد طبیعی c را ک.م.م دو عدد b, a گوئیم هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد :

$$۱) a | c, b | c$$

$$۲) \forall m > 0, a | m, b | m \Rightarrow m \geq c$$

کوچکترین مضرب مشترک

آنگاه $[a, b] = c$ نمایش می دهیم.

$$(a, b) = d$$



$$a \in \mathbb{Z}$$

$$۱) [a, a] = |a|$$

$$۲) [a, b] = [a, -b] = [-a, b] = [-a, -b]$$

$$۳) [a, ۱] = |a|$$

$$۴) [a, ۰] = \text{تعریف نشده... (وجود ندارد)}$$

$$۵) [a, b] = \frac{|ab|}{(a, b)}$$

$$۶) (a, b) = ۱ \Rightarrow [a, b] = |ab|$$

$$۷) a | b \Rightarrow [a, b] = |b|$$

$$[۲m^۲, ۸m^۵] = \dots |۸m^۵|$$

$$۲m^۲ | ۸m^۵$$

$$a/b \begin{cases} \rightarrow (a, b) = |a| & \text{کوچکترین} \\ \rightarrow [a, b] = |b| & \text{بزرگترین} \end{cases}$$



$$[12m^2, 4m] = 4m^2$$

$$4m \mid 12m^2$$



مجموعه
موسسه
توسعه
آموزش
و
تربیت
مغز
و
توانمندی
بچه‌ها

مثال: حاصل هر یک از عبارات زیر را بدست آورید :

$$([m^2, m], m^5) = \dots m^2$$

$$[m^4 \cdot (m^2, m^3)] = | \cdot m^4 |$$

$$(2m, 6m^3) = \dots | 2m | \quad 2m / 6m^3$$

$$(3m+1, 3m+2) = \dots$$

در عدد متوالی



دو قضیه مهم:

قضیه (۱): اگر p عددی اول باشد و $p \nmid a$ ثابت کنید: $(p, a) = 1$.

قضیه $(p, a) = d$

$d \mid p, \text{ (} d \mid a \text{)}$

$\frac{d \mid p}{d \nmid p} \rightarrow d = 1 \quad \vee \quad d = p \Rightarrow d = 1$

$\frac{d \nmid p}{d \mid a} \text{ (} p \mid a \text{)}$ ضرورتاً



مجموعه الماتریه

قضیه (۲) : ثابت کنید اگر $a | b$ آنگاه

$$\begin{cases} (a, b) = |a| \\ [a, b] = |b| \end{cases}$$

اثبات : باید بتوانیم به کمک تعریف ب.م.م و ک.م.ن نشان دهیم که حکم درست است. پس اگر قرار باشد $(a, b) = |a|$ باشد، طبق تعریف ب.م.م داریم :

۱) طبق فرض $a | b$ ، بدیهی $a | |a|$

۲) $\forall m > 0 ; m | a , m | b \Rightarrow m | (a, b) \Rightarrow m \leq (a, b)$
 $m \leq |a|$

همچنین اگر قرار باشد $[a, b] = |b|$ پس طبق تعریف ک.م.ن داریم :

۱) بدیهی $b | |b|$ ، طبق فرض $a | |b|$

۲) $\forall m > 0 , a | m , b | m \Rightarrow [a, b] | m \Rightarrow [a, b] \leq m$
 $|b| \leq m$



مشاهده نمونه سوال نهایی:

باسمه تعالی

| | | | |
|---|---|--|-----------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته | ساعت شروع: ۸ صبح | نام و نام خانوادگی: | رشته: ریاضی فیزیک |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه: ۲ | تاریخ امتحان: ۱۴۰۰/۰۳/۸ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۴۰۰ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد | | |
| ۲ | جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب پر کنید. الف) a و b اعدادی صحیح و a مخالف صفر است. اگر $a b$ آن گاه عدد شمارنده عدد است. ب) m عددی صحیح است. حاصل $(2m, 6m^2)$ برابر با است. | | |
| ۰/۷۵ | نمره | | |



مجموعه المانهای هندسی

ویژه امتحان نهایی

باسمه تعالی

| | | | |
|---|---|--|-----------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته | رشته: ریاضی فیزیک | نام و نام خانوادگی: | ساعت شروع: ۸ صبح |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه: ۲ | تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۰۳/۲۸ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۴۰۱ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد. (استفاده از ماشین حساب ساده، با چهار عمل اصلی، مجاز است.) | | |
| نمره | | | |

| | | |
|---|--|---|
| ۱ | <p>درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) اگر $a b$ و $b \neq 0$، در این صورت $a > b$.</p> <p>ب) برای دو عدد صحیح و ناصفر a و b اگر $(a c, b c)$ و $(\forall m > 0, a m, b m \Rightarrow c \leq m)$ آن گاه $[a, b] = c$.</p> <p>پ) برای هر دو عدد صحیح a و b و عدد طبیعی m، اگر باقی مانده تقسیم a بر m مساوی r باشد، در این صورت $a \equiv r^m$.</p> <p>ت) بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد ۴ و ۲- برابر ۲- است.</p> | ۱ |
|---|--|---|

ب. ۲.۰

باسمه تعالی

| | | | |
|---|---|---|-----------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته | ساعت شروع: ۸ صبح | نام و نام خانوادگی: | رشته: ریاضی فیزیک |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه: ۲ | تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۰۳/۲۱ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۴۰۲ | | مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش http://aee.medu.gov.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد. (استفاده از ماشین حساب ساده، با چهار عمل اصلی، مجاز است.) | | |
| نمره | | | |

| | | |
|---|--|---|
| ۱ | <p>درست یا نادرست بودن عبارات زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.</p> <p>ب) حاصل $(3m+2, 3m+1)$ برابر ۱ می باشد.</p> | ۱ |
|---|--|---|



باسمه تعالی

| | | | |
|--|-----------------------|--|------------------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته | نام و نام خانوادگی: | ساعت شروع: ۸ صبح | رشته: ریاضی فیزیک |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه: ۲ | تاریخ امتحان: ۱۳۹۸/۶/۴ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت شهریور ماه سال ۱۳۹۸ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد | | |
| نمره | | | |

| | | |
|---|--|----|
| ۱ | درستی یا نادرستی گزاره های زیر را تعیین کنید. الف) مجموع هر دو عدد فرد ، عددی زوج است. ب) برای هر عدد طبیعی n بزرگتر از ۱ ، عدد $3^n - 1$ اول است. | .۵ |
| ۲ | جاهای خالی را پر کنید. الف) $[a, b] = c$ اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند: ۱) $a c, b c$ ۲) $\forall m > 0, \dots$ | |

Handwritten mathematical derivation:

$$a|m, b|m \Rightarrow m \geq c$$



مجموعه سنجش و پایش کیفیت آموزشی





نهال درخت جمع

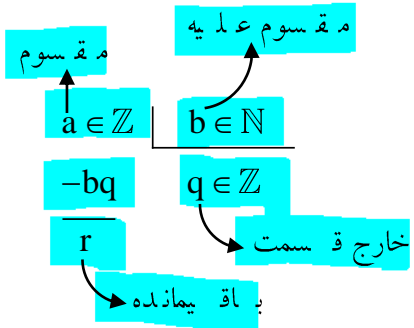
گسسته دوازدهم

قضیه تقسیم و افراز



اپیزود ۶: قضیه تقسیم و افراز مجموعه اعداد صحیح

۱- قضیه تقسیم: در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b داریم:



$$a = bq + r$$

$$0 \leq r < b$$

$$a - bq = r$$

$$a = bq + r$$



تجربا
 المبره
 (b)
 (a)
 (c)
 (d)
 (e)
 (f)
 (g)
 (h)
 (i)
 (j)
 (k)
 (l)
 (m)
 (n)
 (o)
 (p)
 (q)
 (r)
 (s)
 (t)
 (u)
 (v)
 (w)
 (x)
 (y)
 (z)

مثال: باقیمانده تقسیم‌های زیر را حساب کنید.

الف) ۴۳ بر ۷

ب) ۴۳- بر ۷

$$\begin{array}{r} 6 \\ 7 \overline{) 43} \\ \underline{42} \\ 1 \end{array}$$

①

$$\begin{array}{r} 6 \\ 7 \overline{) 43} \\ \underline{42} \\ 1 \end{array}$$

$$-1 + 7 = 6$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 7 \overline{) 43} \\ \underline{42} \\ 1 \end{array}$$

$$q = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$r = a - bq$$



تربیتی
مدرسه
معماری
هندسه
فیزیک
کیمیا
زیست‌شناسی
ریاضی
ادبیات
تاریخ
جغرافیا
علوم

نکته : در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b خارج قسمت از فرمول $q = \left[\frac{a}{b} \right]$ بدست می‌آید ([] علامت جزء

$$a = -۲۳ \quad b = ۷$$

صحیح است.)

$$q = \left[\frac{-۲۳}{۷} \right] = \left[-۳, ۴ \right] = -۳$$

$$r = a - bq = -۲۳ - ۷(-۳) = ۸$$



مجموعه‌های مختلف از اشکال هندسی و نمادهای ریاضی در یک ستون عمودی در سمت راست تصویر قرار دارند.

◀ استراتژی حل مسائل قضیه تقسیم :

(۱) رابطه تقسیم $a = bq + r$ را بنویسیم.

(۲) دقت کنیم باقیمانده نه منفی باشد نه بزرگتر از مقسوم علیه.

- اگر باقیمانده منفی باشد مضارب b را اضافه می کنیم تا مثبت شود.

- اگر باقیمانده بزرگتر از b باشد مضارب b را کم می کنیم تا اولین عدد مثبت شود.



تجربیات
مفید
در
حل
مسائل
تقسیم

مثال: اگر باقیمانده تقسیم اعداد m , n بر ۱۷ به ترتیب برابر ۵ و ۳ باشد، باقیمانده تقسیم عدد $۲m - ۵n$ را بر ۱۷ حساب کنید.

$$n = 17q + 5$$

$$m = 17q' + 3$$

$$2m - 5n = 2(17q' + 3) - 5(17q + 5) = 17(2q' - 5q) - 19$$

$$2m - 5n = 17k - 19$$

$$r = -19 + 17 + 17 = 15$$



مثال: باقیمانده تقسیم عدد صحیح a بر ۷ و ۸ به ترتیب ۳ و ۵ است. باقیمانده تقسیم a بر ۵۶ را حساب کنید.

$$a = 7q + 3 \xrightarrow{\times 8} 8a = 56q + 24$$

$$a = 8q' + 5 \xrightarrow{\times 7} 7a = 56q' + 35$$

$$\ominus \quad a = 56 \left(\frac{q - q'}{k} \right) - 11$$

$$a = 56k - 11$$

$$r = -11 + 56 = 45$$



مثال: اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه هر دو بر عدد صحیح n بخشپذیر باشند، ثابت کنید باقیمانده تقسیم نیز همواره بر n بخشپذیر است.

$$\left. \begin{array}{l} n/a \\ n/b \end{array} \right\} \xrightarrow{\ominus} \left. \begin{array}{l} n/a - bq_r \\ n/b \end{array} \right\} \xrightarrow{\times q_r} n/bq_r \xrightarrow{\ominus} n/r$$

$r = a - bq_r$

پاسخ:

$$a = nk$$

$$b = nk'$$

$$r = a - bq_r = nk - nk'q_r = n(k - k'q_r) = nq'_r$$



۲- افراز مجموعه \mathbb{Z} «اعداد صحیح»

$$a = b \begin{matrix} 2k+1 \\ k \\ 2k+1 \end{matrix} + r$$

| | | |
|--------------|--|----------------------------------|
| | دو زیرمجموعه $2k$ یا $2k+1$ | پیمانه ۲ $r = \{0, 1\}$ |
| | سه زیرمجموعه $3k$ یا $3k+1$ یا $3k+2$ | پیمانه ۳ $r = \{0, 1, 2\}$ |
| | چهار زیرمجموعه $4k$ یا $4k+1$ یا $4k+2$ یا $4k+3$ | $r = \{0, 1, 2, 3\}$ |
| | پیمانه ۴ | |
| \mathbb{Z} | پنج زیرمجموعه $5k$ یا $5k+1$ یا $5k+2$ یا $5k+3$ یا $5k+4$ | پیمانه ۵ $r = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ |
| | زیرمجموعه b یا bk یا $bk+1$ یا $bk+2$ یا ... یا $bk+(b-1)$ | |
| | پیمانه b $r = \{0, 1, 2, 3, \dots, b-1\}$ | |



تجربة العربية

مثال: اگر p عدد اول بزرگتر از ۳ باشد نشان دهید p به یکی از صورت‌های $۶k+۱$ یا $۶k+۵$ است.

در تقسیم عددهای ۱ بر ۶ یکی از دو صورت زیر بوجود می‌آید:

زوج $\times ۶k$

فرد $\times ۶(k+۱)$

زوج $\times ۶k+۲$

مفرد $\times ۶k+۴$

زوج $\times ۶k+۴$

فرد $\times ۶k+۵$



مجموعه‌های مختلف از اشکال هندسی

مثال: نشان دهید هر عدد فرد به یکی از صورت‌های $4k+1$ یا $4k+3$ است.

رتبه اعداد زوج بر ۲ و از صورت $2k$ بوجود می‌آید:

زوج $\times 2k$
فرد $\circlearrowleft 2k+1$
زوج $\times 2k+2$
فرد $\circlearrowleft 2k+3$



مثال: به کمک مثال قبل ثابت کنید مربع هر عدد فرد بصورت $8q + 1$ است.

فرض

$$\left(\sum k + 1 \right)^2 = 14k^2 + 8k + 1 = 8 \left(\frac{1}{2} \right) + 1 = 8q + 1 \checkmark$$

$$\left(\sum k + 10 \right)^2 = 14k^2 + 28k + 10 = 8 \left(\frac{1}{2} \right) + 1 = 8q + 1 \checkmark$$



ویژه امتحان نهایی

مثال: اگر a عددی صحیح و فرد و $b|a+2$ در این صورت باقیمانده تقسیم عدد $a^2 + b^2 + 3$ بر 8 را بیابید.

$$1q+1 + 1q'+1 + 3$$

$$1(q+q') + 5$$

$$1k + 5 = 1k + 2 + 1 + 2$$

$$\{q'+1\}$$

فرد

فرد



مجموعه
تعداد
مجموعه
تعداد
مجموعه
تعداد
مجموعه
تعداد
مجموعه
تعداد
مجموعه
تعداد
مجموعه
تعداد
مجموعه
تعداد



مثال: اگر a عددی صحیح باشد، ثابت کنید همواره یکی از اعداد a یا $a+2$ یا $a+4$ بر 3 بخشپذیر است.

رتبیم اعداد صحیح بر 3 یکی از فرم‌ها کز زیر موجود می‌آید:

$$a = 3k \rightarrow a \text{ مفر } 3 \checkmark$$

$$a = 3k + 1 \rightarrow a + 2 = 3k + 3$$

$$a + 2 \text{ مفر } 3$$

$$a = 3k + 2 \rightarrow a + 4 = 3k + 6$$

$$a + 4 \text{ مفر } 3$$



مثال: ثابت کنید حاصلضرب هر سه عدد صحیح متوالی مضرب ۶ است.

ثابت کنید حاصلضرب هر سه عدد صحیح متوالی مضرب ۳! است.

ثابت کنید برای هر عدد صحیح n داریم $6 | n^3 - n$.

$$n^3 - n$$

$$n(n^2 - 1)$$

$$(n-1)n(n+1) = 6q$$

ضرب سه عدد متوالی

$$k : k \times (k+1) \times (k+2) = 6q$$

$$k+1 : (k+1) \times (k+2) \times (k+3) = 6q'$$

$$k+2 : (k+2) \times (k+3) \times (k+4) = 6q''$$



تجربة العربية

مثال: ثابت کنید حاصلضرب هر سه عدد طبیعی زوج متوالی، مضرب ۴۸ است.

$$2k(2k+2)(2k+4)$$

$$\underbrace{1 \cdot k(k+1)(k+2)}_{\substack{\text{ضرب سه عدد متوالی} \\ \text{فرد}}} = 48k$$



تجربا العربیة

مثال: ثابت کنید حاصلضرب هر دو عدد طبیعی زوج متوالی، مضرب ۸ است.

$$2k(2k+2)$$

$$\sum k(k+1) = 19$$

فردی در محور متوالی = ۱۹



مجموعه
فصل
۲
۲۰۲۰/۲۰۲۱
۱۹
۱۸
۱۷
۱۶
۱۵
۱۴
۱۳
۱۲
۱۱
۱۰
۹
۸
۷
۶
۵
۴
۳
۲
۱
۰
۱
۲
۳
۴
۵
۶
۷
۸
۹
۱۰
۱۱
۱۲
۱۳
۱۴
۱۵
۱۶
۱۷
۱۸
۱۹
۲۰
۲۱
۲۲
۲۳
۲۴
۲۵
۲۶
۲۷
۲۸
۲۹
۳۰
۳۱
۳۲
۳۳
۳۴
۳۵
۳۶
۳۷
۳۸
۳۹
۴۰
۴۱
۴۲
۴۳
۴۴
۴۵
۴۶
۴۷
۴۸
۴۹
۵۰
۵۱
۵۲
۵۳
۵۴
۵۵
۵۶
۵۷
۵۸
۵۹
۶۰
۶۱
۶۲
۶۳
۶۴
۶۵
۶۶
۶۷
۶۸
۶۹
۷۰
۷۱
۷۲
۷۳
۷۴
۷۵
۷۶
۷۷
۷۸
۷۹
۸۰
۸۱
۸۲
۸۳
۸۴
۸۵
۸۶
۸۷
۸۸
۸۹
۹۰
۹۱
۹۲
۹۳
۹۴
۹۵
۹۶
۹۷
۹۸
۹۹
۱۰۰

مشاهده نمونه سوال نهایی:

باسمه تعالی

| | | | |
|---|--|--|------------------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته | نام و نام خانوادگی: | ساعت شروع: ۸ صبح | تعداد صفحه: ۲ |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | رشته: ریاضی فیزیک | تاریخ امتحان: ۱۳۹۸/۳/۲۵ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۸ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد | | |
| نمره | | | |
| ۳ | اگر باقی مانده تقسیم m و n بر ۱۳ به ترتیب اعداد ۲ و ۹ باشد در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $۵n - ۳m$ بر ۱۳ را بدست آورید. | | |
| ۱/۵ | | | |

باسمه تعالی

| | | | |
|---|---|--|------------------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته | نام و نام خانوادگی: | ساعت شروع: ۸ صبح | تعداد صفحه: ۲ |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | رشته: ریاضی فیزیک | تاریخ امتحان: ۱۴۰۰/۰۳/۸ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۴۰۰ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد | | |
| نمره | | | |
| ۴ | ثابت کنید اگر $p \geq ۵$ عددی اول باشد، آن گاه به یکی از دو صورت $p = ۴k + ۱$ یا $p = ۴k + ۳$ نوشته می شود. | | |
| ۰/۷۵ | | | |



باسمه تعالی

| | | | |
|---|---|---|-----------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته | ساعت شروع: ۸ صبح | نام و نام خانوادگی: | رشته: ریاضی فیزیک |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه: ۲ | تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۰۳/۲۱ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۴۰۲ | | مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش http://aee.medu.gov.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد. (استفاده از ماشین حساب ساده، به چهار عمل اصلی، مجاز است.) | | |
| نمره | | | |
| ۵ | باقی مانده تقسیم a بر دو عدد ۴ و ۵ به ترتیب برابر ۳ و ۴ می باشد، باقی مانده تقسیم a بر ۲۰ را محاسبه کنید. (با راه حل) | | |
| ۱/۵ | | | |

باسمه تعالی

| | | | |
|---|--|--|-----------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته | ساعت شروع: ۸ صبح | نام و نام خانوادگی: | رشته: ریاضی فیزیک |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه: ۲ | تاریخ امتحان: ۱۳۹۹/۰۶/۰۴ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه سراسر کشور در نوبت شهریور ماه سال ۱۳۹۹ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد | | |
| نمره | | | |
| ۴ | ثابت کنید اگر $p > 3$ عددی اول باشد آنگاه به یکی از دو صورت $p = 6k + 1$ یا $p = 6k + 5$ ($k \in W$) نوشته می شود. | | |
| ۵ | اگر باقی مانده تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $(2m - 5n)$ بر ۱۷ را محاسبه کنید. | | |
| ۱/۲۵ | | | |







نهال دانش جمع

گسسته دوازدهم

ویژگی‌ها و کلاس همنهشتی



اپیزود ۷: مفهوم، ویژگی‌ها و کلاس هم‌نهشتی

۱- هم‌نهشتی :

می‌نویسیم $a \equiv b \pmod{m}$ و می‌خوانیم a هم‌نهشت b است در پیمانانه (سنج) m هرگاه تفاضل b, a بر m بخش‌پذیر باشد.

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a - b = mq \text{ یا } m \mid a - b$$

$$q \in \mathbb{Z}$$

۲- ویژگی‌های هم‌نهشتی :

(۱) به طرفین هم‌نهشتی می‌توان عدد صحیحی اضافه یا کم کرد:

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow \begin{cases} a + k \equiv b + k \pmod{m} \\ a - k \equiv b - k \pmod{m} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$



اثبات :

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m \mid a - b \xrightarrow{+k} m \mid a - b + k - k$$

$$\xrightarrow{-k} m \mid (a - k) - (b - k) \Rightarrow a - k \equiv b - k \pmod{m}$$

(۲) دو طرف همنهشتی را می‌توان در یک عدد صحیح ضرب کرد:

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ak \equiv bk \pmod{m} \quad k \in \mathbb{Z}$$

اثبات :

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m \mid a - b \xrightarrow{\times k} m \mid ak - bk$$

$$\Rightarrow ak \equiv bk \pmod{m}$$



تجربا العربية

نکته : ویژگی ۲ عکسش برقرار نیست !!!

$$25 \equiv 15 \Rightarrow 5 \times 5 \equiv 5 \times 3 \Rightarrow 5 \equiv 3 \quad \otimes$$

(۳) طرفین همنهشتی را می توان به توان هر عدد طبیعی رساند:

$$a \equiv b \Rightarrow a^n \equiv b^n$$

اثبات :

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$

$$a \equiv b \Rightarrow m \mid (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$



مجموعه
فایل
۲
۳
۴
۵
۶
۷
۸
۹
۱۰
۱۱
۱۲
۱۳
۱۴
۱۵
۱۶
۱۷
۱۸
۱۹
۲۰
۲۱
۲۲
۲۳
۲۴
۲۵
۲۶
۲۷
۲۸
۲۹
۳۰
۳۱
۳۲
۳۳
۳۴
۳۵
۳۶
۳۷
۳۸
۳۹
۴۰
۴۱
۴۲
۴۳
۴۴
۴۵
۴۶
۴۷
۴۸
۴۹
۵۰
۵۱
۵۲
۵۳
۵۴
۵۵
۵۶
۵۷
۵۸
۵۹
۶۰
۶۱
۶۲
۶۳
۶۴
۶۵
۶۶
۶۷
۶۸
۶۹
۷۰
۷۱
۷۲
۷۳
۷۴
۷۵
۷۶
۷۷
۷۸
۷۹
۸۰
۸۱
۸۲
۸۳
۸۴
۸۵
۸۶
۸۷
۸۸
۸۹
۹۰
۹۱
۹۲
۹۳
۹۴
۹۵
۹۶
۹۷
۹۸
۹۹
۱۰۰

$$\Rightarrow m \mid (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1}) \Rightarrow m \mid a^n - b^n \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$$

$a^n - b^n$

نکته : عکس ویژگی ۳ نیز لزوماً و همواره برقرار نیست!

$$5^2 \equiv 3^2 \pmod{4} \Rightarrow 5 \equiv 3 \pmod{4} \quad \otimes$$

$25 \equiv 9 \pmod{4}$

۴) طرفین دو همنهشتی با پیمانه‌های یکسان را می‌توان :

- در هم ضرب کرد.
- با هم جمع کرد.
- از هم کم کرد.



المبرهنه
 (n) (n-1) (n-2) (n-3) (n-4) (n-5) (n-6) (n-7) (n-8) (n-9) (n-10) (n-11) (n-12) (n-13) (n-14) (n-15) (n-16) (n-17) (n-18) (n-19) (n-20)

$$a \equiv b \pmod{m}, c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow \begin{cases} ac \equiv bd \pmod{m} * \\ a + c \equiv b + d \pmod{m} ** \\ a - c \equiv b - d \pmod{m} *** \end{cases}$$

اثبات * :

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m \mid a - b \xrightarrow{\times c} m \mid ac - bc$$

$$c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow m \mid c - d \xrightarrow{\times b} m \mid bc - bd$$

$$\overline{(+)} m \mid ac - bd \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{m} \checkmark$$

اثبات ** :



تجربا العربيا

کاهش پیمانه

(۵) پیمانهٔ هم‌نهشتی را می‌توان به مقسوم علیه‌هایش کاهش داد. (ویژگی کاهش پیمانه)

$$\overset{m}{a \equiv b}, n \mid m \Rightarrow \overset{n}{a \equiv b}$$

اثبات :

$$\overset{m}{a \equiv b} \Rightarrow m \mid a - b$$

$$n \mid m, m \mid a - b \xrightarrow{\text{خاصیت عددی}} n \mid a - b \Rightarrow \overset{n}{a \equiv b} \checkmark$$



(۶) به طرفین همنهشتی می توان مضاربی از پیمانه را کم یا زیاد کرد.

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow \begin{cases} a \pm km \equiv b \\ a \equiv b \pm km \\ a \pm km \equiv b \pm k'm \end{cases} \quad k, k' \in \mathbb{Z}$$

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv b \\ km \equiv k'm \end{array} \right\} \begin{array}{l} (+) \\ (-) \end{array} \Rightarrow a \pm km \equiv b \pm k'm$$

اثبات :



مجموعه
مفاهیم
مهم
در
مباحث
مدرسه
و
کنکور

(۷) خاصیت تعدی در همنهشتی برقرار است:

$$\overset{m}{a} \equiv \overset{m}{b}, \overset{m}{b} \equiv \overset{m}{c} \Rightarrow \overset{m}{a} \equiv \overset{m}{c}$$

اثبات :

$$\begin{aligned} \overset{m}{a} \equiv \overset{m}{b} &\Rightarrow m \mid a - b \quad (+) \\ \overset{m}{b} \equiv \overset{m}{c} &\Rightarrow m \mid (a - b) + (b - c) \Rightarrow m \mid a - c \Rightarrow \overset{m}{a} \equiv \overset{m}{c} \quad \checkmark \end{aligned}$$



مثال: فرض کنید $a \equiv b^m$, $b \equiv c^n$, $(m, n) = d$ در این صورت ثابت کنید: $a \equiv c^d$

$$(m, n) = d \rightarrow d/m \text{ و } d/n$$

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv b^m \text{ و } d/m \rightarrow a \equiv b^{d/m} \\ b \equiv c^n \text{ و } d/n \rightarrow b \equiv c^{d/n} \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{تعدی}} a \equiv c^d$$



۸) تقسیم طرفین همنهشتی بر یک عامل مشترک :

$$ac \equiv bc, (c, m) = d \Rightarrow a \equiv b$$

نکته : ~~$ac \equiv bc, (c, m) = 1 \Rightarrow a \equiv b$~~



مجموعه
فایل
های
مدرسه
و
دانشگاه
تجربیات
مختلفه
در
موضوعات
مختلفه

۳- کلاس (دسته هم‌هشتی) به پیمانه m :مجموعه همه اعداد صحیح که باقیمانده تقسیم آنها بر عدد طبیعی m برابر با r می باشد، یعنی مجموعه $A_r = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = mk + r\}$ را کلاس یا دسته هم‌هشتی به پیمانه m می‌نامیم و با نماد $[r]_m$ نمایش می‌دهیم.کلاس هم‌هشتی در پیمانه ۲ : $2k$ یا $2k+1$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ [0]_2 & [1]_2 \end{array}$$

۲ کلاس هم‌هشتی $m = 2$ کلاس هم‌هشتی در پیمانه ۳ : $3k$ یا $3k+1$ یا $3k+2$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ [0]_3 & [1]_3 & [2]_3 \end{array}$$

۳ کلاس هم‌هشتی $m = 3$ 

کلاس هم‌نهشتی در پیمانه ۴: $4k$ یا $4k+1$ یا $4k+2$ یا $4k+3$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ [0]_4 & [1]_4 & [2]_4 & [3]_4 \end{array}$$

۴ کلاس هم‌نهشتی $m = 4$

$[a]_m$:

کلاس هم‌نهشتی عدد a در پیمانه m

مجموعه اعدادی که باقیمانده آنها بر m برابر a است.

$$[1]_3 = 3k + 1 = \text{اعدادی که باقیمانده آنها بر ۳ برابر ۱}$$

$$[3]_5 = 5k + 3 = \text{اعدادی که باقیمانده آنها بر ۵ برابر ۳}$$



تجربا العربیة

مثال: الف) عدد ۱۳۹۸ به کدام دسته همنهشتی به پیمانه ۹ تعلق دارد؟

۱۳۹۸

$$[1398]_9 = [3]_9$$

$$\begin{array}{r} 1398 \div 9 = 155 \\ \underline{9} \\ 49 \\ \underline{45} \\ 48 \\ \underline{45} \\ 3 \\ \underline{3} \\ 0 \end{array}$$

ب) عدد ۱۳۹۸ - با چه عددی در پیمانه ۷ هم کلاس است؟

$$[-1398]_7 = [0]_7$$

$$\begin{array}{r} -1398 \div 7 = \\ \underline{7} \\ -69 \\ \underline{-70} \\ 1 \\ \underline{0} \\ 1 \end{array}$$

?



مجموعه سؤالات و پاسخ‌ها
 ۱۳۹۸
 ۱۳۹۷
 ۱۳۹۶
 ۱۳۹۵
 ۱۳۹۴
 ۱۳۹۳
 ۱۳۹۲
 ۱۳۹۱
 ۱۳۹۰
 ۱۳۸۹
 ۱۳۸۸
 ۱۳۸۷
 ۱۳۸۶
 ۱۳۸۵
 ۱۳۸۴
 ۱۳۸۳
 ۱۳۸۲
 ۱۳۸۱
 ۱۳۸۰
 ۱۳۷۹
 ۱۳۷۸
 ۱۳۷۷
 ۱۳۷۶
 ۱۳۷۵
 ۱۳۷۴
 ۱۳۷۳
 ۱۳۷۲
 ۱۳۷۱
 ۱۳۷۰
 ۱۳۶۹
 ۱۳۶۸
 ۱۳۶۷
 ۱۳۶۶
 ۱۳۶۵
 ۱۳۶۴
 ۱۳۶۳
 ۱۳۶۲
 ۱۳۶۱
 ۱۳۶۰
 ۱۳۵۹
 ۱۳۵۸
 ۱۳۵۷
 ۱۳۵۶
 ۱۳۵۵
 ۱۳۵۴
 ۱۳۵۳
 ۱۳۵۲
 ۱۳۵۱
 ۱۳۵۰
 ۱۳۴۹
 ۱۳۴۸
 ۱۳۴۷
 ۱۳۴۶
 ۱۳۴۵
 ۱۳۴۴
 ۱۳۴۳
 ۱۳۴۲
 ۱۳۴۱
 ۱۳۴۰
 ۱۳۳۹
 ۱۳۳۸
 ۱۳۳۷
 ۱۳۳۶
 ۱۳۳۵
 ۱۳۳۴
 ۱۳۳۳
 ۱۳۳۲
 ۱۳۳۱
 ۱۳۳۰
 ۱۳۲۹
 ۱۳۲۸
 ۱۳۲۷
 ۱۳۲۶
 ۱۳۲۵
 ۱۳۲۴
 ۱۳۲۳
 ۱۳۲۲
 ۱۳۲۱
 ۱۳۲۰
 ۱۳۱۹
 ۱۳۱۸
 ۱۳۱۷
 ۱۳۱۶
 ۱۳۱۵
 ۱۳۱۴
 ۱۳۱۳
 ۱۳۱۲
 ۱۳۱۱
 ۱۳۱۰
 ۱۳۰۹
 ۱۳۰۸
 ۱۳۰۷
 ۱۳۰۶
 ۱۳۰۵
 ۱۳۰۴
 ۱۳۰۳
 ۱۳۰۲
 ۱۳۰۱
 ۱۳۰۰
 ۱۲۹۹
 ۱۲۹۸
 ۱۲۹۷
 ۱۲۹۶
 ۱۲۹۵
 ۱۲۹۴
 ۱۲۹۳
 ۱۲۹۲
 ۱۲۹۱
 ۱۲۹۰
 ۱۲۸۹
 ۱۲۸۸
 ۱۲۸۷
 ۱۲۸۶
 ۱۲۸۵
 ۱۲۸۴
 ۱۲۸۳
 ۱۲۸۲
 ۱۲۸۱
 ۱۲۸۰
 ۱۲۷۹
 ۱۲۷۸
 ۱۲۷۷
 ۱۲۷۶
 ۱۲۷۵
 ۱۲۷۴
 ۱۲۷۳
 ۱۲۷۲
 ۱۲۷۱
 ۱۲۷۰
 ۱۲۶۹
 ۱۲۶۸
 ۱۲۶۷
 ۱۲۶۶
 ۱۲۶۵
 ۱۲۶۴
 ۱۲۶۳
 ۱۲۶۲
 ۱۲۶۱
 ۱۲۶۰
 ۱۲۵۹
 ۱۲۵۸
 ۱۲۵۷
 ۱۲۵۶
 ۱۲۵۵
 ۱۲۵۴
 ۱۲۵۳
 ۱۲۵۲
 ۱۲۵۱
 ۱۲۵۰
 ۱۲۴۹
 ۱۲۴۸
 ۱۲۴۷
 ۱۲۴۶
 ۱۲۴۵
 ۱۲۴۴
 ۱۲۴۳
 ۱۲۴۲
 ۱۲۴۱
 ۱۲۴۰
 ۱۲۳۹
 ۱۲۳۸
 ۱۲۳۷
 ۱۲۳۶
 ۱۲۳۵
 ۱۲۳۴
 ۱۲۳۳
 ۱۲۳۲
 ۱۲۳۱
 ۱۲۳۰
 ۱۲۲۹
 ۱۲۲۸
 ۱۲۲۷
 ۱۲۲۶
 ۱۲۲۵
 ۱۲۲۴
 ۱۲۲۳
 ۱۲۲۲
 ۱۲۲۱
 ۱۲۲۰
 ۱۲۱۹
 ۱۲۱۸
 ۱۲۱۷
 ۱۲۱۶
 ۱۲۱۵
 ۱۲۱۴
 ۱۲۱۳
 ۱۲۱۲
 ۱۲۱۱
 ۱۲۱۰
 ۱۲۰۹
 ۱۲۰۸
 ۱۲۰۷
 ۱۲۰۶
 ۱۲۰۵
 ۱۲۰۴
 ۱۲۰۳
 ۱۲۰۲
 ۱۲۰۱
 ۱۲۰۰
 ۱۱۹۹
 ۱۱۹۸
 ۱۱۹۷
 ۱۱۹۶
 ۱۱۹۵
 ۱۱۹۴
 ۱۱۹۳
 ۱۱۹۲
 ۱۱۹۱
 ۱۱۹۰
 ۱۱۸۹
 ۱۱۸۸
 ۱۱۸۷
 ۱۱۸۶
 ۱۱۸۵
 ۱۱۸۴
 ۱۱۸۳
 ۱۱۸۲
 ۱۱۸۱
 ۱۱۸۰
 ۱۱۷۹
 ۱۱۷۸
 ۱۱۷۷
 ۱۱۷۶
 ۱۱۷۵
 ۱۱۷۴
 ۱۱۷۳
 ۱۱۷۲
 ۱۱۷۱
 ۱۱۷۰
 ۱۱۶۹
 ۱۱۶۸
 ۱۱۶۷
 ۱۱۶۶
 ۱۱۶۵
 ۱۱۶۴
 ۱۱۶۳
 ۱۱۶۲
 ۱۱۶۱
 ۱۱۶۰
 ۱۱۵۹
 ۱۱۵۸
 ۱۱۵۷
 ۱۱۵۶
 ۱۱۵۵
 ۱۱۵۴
 ۱۱۵۳
 ۱۱۵۲
 ۱۱۵۱
 ۱۱۵۰
 ۱۱۴۹
 ۱۱۴۸
 ۱۱۴۷
 ۱۱۴۶
 ۱۱۴۵
 ۱۱۴۴
 ۱۱۴۳
 ۱۱۴۲
 ۱۱۴۱
 ۱۱۴۰
 ۱۱۳۹
 ۱۱۳۸
 ۱۱۳۷
 ۱۱۳۶
 ۱۱۳۵
 ۱۱۳۴
 ۱۱۳۳
 ۱۱۳۲
 ۱۱۳۱
 ۱۱۳۰
 ۱۱۲۹
 ۱۱۲۸
 ۱۱۲۷
 ۱۱۲۶
 ۱۱۲۵
 ۱۱۲۴
 ۱۱۲۳
 ۱۱۲۲
 ۱۱۲۱
 ۱۱۲۰
 ۱۱۱۹
 ۱۱۱۸
 ۱۱۱۷
 ۱۱۱۶
 ۱۱۱۵
 ۱۱۱۴
 ۱۱۱۳
 ۱۱۱۲
 ۱۱۱۱
 ۱۱۱۰
 ۱۱۰۹
 ۱۱۰۸
 ۱۱۰۷
 ۱۱۰۶
 ۱۱۰۵
 ۱۱۰۴
 ۱۱۰۳
 ۱۱۰۲
 ۱۱۰۱
 ۱۱۰۰
 ۱۰۹۹
 ۱۰۹۸
 ۱۰۹۷
 ۱۰۹۶
 ۱۰۹۵
 ۱۰۹۴
 ۱۰۹۳
 ۱۰۹۲
 ۱۰۹۱
 ۱۰۹۰
 ۱۰۸۹
 ۱۰۸۸
 ۱۰۸۷
 ۱۰۸۶
 ۱۰۸۵
 ۱۰۸۴
 ۱۰۸۳
 ۱۰۸۲
 ۱۰۸۱
 ۱۰۸۰
 ۱۰۷۹
 ۱۰۷۸
 ۱۰۷۷
 ۱۰۷۶
 ۱۰۷۵
 ۱۰۷۴
 ۱۰۷۳
 ۱۰۷۲
 ۱۰۷۱
 ۱۰۷۰
 ۱۰۶۹
 ۱۰۶۸
 ۱۰۶۷
 ۱۰۶۶
 ۱۰۶۵
 ۱۰۶۴
 ۱۰۶۳
 ۱۰۶۲
 ۱۰۶۱
 ۱۰۶۰
 ۱۰۵۹
 ۱۰۵۸
 ۱۰۵۷
 ۱۰۵۶
 ۱۰۵۵
 ۱۰۵۴
 ۱۰۵۳
 ۱۰۵۲
 ۱۰۵۱
 ۱۰۵۰
 ۱۰۴۹
 ۱۰۴۸
 ۱۰۴۷
 ۱۰۴۶
 ۱۰۴۵
 ۱۰۴۴
 ۱۰۴۳
 ۱۰۴۲
 ۱۰۴۱
 ۱۰۴۰
 ۱۰۳۹
 ۱۰۳۸
 ۱۰۳۷
 ۱۰۳۶
 ۱۰۳۵
 ۱۰۳۴
 ۱۰۳۳
 ۱۰۳۲
 ۱۰۳۱
 ۱۰۳۰
 ۱۰۲۹
 ۱۰۲۸
 ۱۰۲۷
 ۱۰۲۶
 ۱۰۲۵
 ۱۰۲۴
 ۱۰۲۳
 ۱۰۲۲
 ۱۰۲۱
 ۱۰۲۰
 ۱۰۱۹
 ۱۰۱۸
 ۱۰۱۷
 ۱۰۱۶
 ۱۰۱۵
 ۱۰۱۴
 ۱۰۱۳
 ۱۰۱۲
 ۱۰۱۱
 ۱۰۱۰
 ۱۰۰۹
 ۱۰۰۸
 ۱۰۰۷
 ۱۰۰۶
 ۱۰۰۵
 ۱۰۰۴
 ۱۰۰۳
 ۱۰۰۲
 ۱۰۰۱
 ۱۰۰۰

مثال: اگر $k \in \mathbb{Z}$ ثابت کنید فقط یکی از سه حالت زیر امکانپذیر است:

$$k \equiv 0 \pmod 3 \text{ or } k \equiv 1 \pmod 3 \text{ or } k \equiv 2 \pmod 3$$

$$(k \in [0]_3 \text{ or } k \in [1]_3 \text{ or } k \in [2]_3)$$

دسته بندی ۳ :

$$aq = k \rightarrow k \equiv 0 \pmod 3 \rightarrow k \in [0]_3$$

$$aq + 1 = k \rightarrow k - 1 = 3q \rightarrow k \equiv 1 \pmod 3 \rightarrow k \in [1]_3$$

$$aq + 2 = k \rightarrow k - 2 = 3q \rightarrow k \equiv 2 \pmod 3 \rightarrow k \in [2]_3$$



تجزیه و تحلیل
معماری
هندسه
فیزیک
کیمیا
بیولوژی
تاریخ
ادبیات
زبان
ریاضیات
علوم
فلسفه
هنر
موسیقی
ورزش
سفر
تکنولوژی
مهندسی
پزشکی
حقوق
اقتصاد
سیاست
مدیریت
تجارت
فنون
سازماندهی
معماری
تاریخ
ادبیات
زبان
ریاضیات
علوم
فلسفه
هنر
موسیقی
ورزش
سفر
تکنولوژی
مهندسی
پزشکی
حقوق
اقتصاد
سیاست
مدیریت
تجارت
فنون

مشاهده نمونه سوال نهایی:

باسمه تعالی

| | | | |
|--|---|--|-----------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته | ساعت شروع: ۱۰ صبح | نام و نام خانوادگی: | رشته: ریاضی فیزیک |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه: ۲ | تاریخ امتحان: ۱۴۰۰/۱۰/۲۷ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دی ماه سال ۱۴۰۰ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد | | |
| نمره | | | |
| ۱ | <p>عبارت مناسب را از داخل پرانتز انتخاب کنید.</p> <p>الف) حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی (گنگ، گویا) است.</p> <p>ب) اگر برای دو عدد صحیح a و b داشته باشیم $a b$، برای هر $m \in \mathbb{Z}$ داریم: $(a mb, ma b)$.</p> <p>پ) اگر $a b$ آن گاه ب.م.م دو عدد a و b برابر با (a, a) است.</p> <p>ت) اگر $ac \equiv bc$ و $(c, m) \neq d$ آن گاه رابطه $(a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}})$ برقرار خواهد بود.</p> | | |
| ۲ | اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha - \beta$ گنگ است. | | |
| ۳ | ثابت کنید باقی مانده تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸، برابر یک است. | | |
| ۴ | اگر در تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش پذیر باشند، ثابت کنید باقی مانده تقسیم نیز همواره بر n بخش پذیر است. | | |



باسمه تعالی

| | | | |
|--|--|--|-----------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته | نام و نام خانوادگی: | ساعت شروع: ۱۰ صبح | رشته: ریاضی فیزیک |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه: ۲ | تاریخ امتحان: ۱۳۹۸/۱۰/۰۹ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دی ماه سال ۱۳۹۸ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد | | |
| نمره | | | |
| ۶ | نابت کنید می توان دو طرف یک رابطه هم نهشی را در عددی صحیح ضرب کرد، به عبارتی دیگر، برای اعداد صحیح اگر $a \equiv b^m$ آن گاه $ac \equiv bc^m$ و عدد طبیعی m ، | | |



المانهای هندسی
 مثلثات
 جبر
 حسابان
 آمار و احتمال
 فیزیک
 شیمی
 زیست



اپیزود ۸ : کاربردهای همنهشتی

*۱- پیدا کردن باقیمانده تقسیم اعداد تواندار بزرگ بر اعداد کوچکتر :

اگر باقیمانده تقسیم a بر m برابر r باشد در اینصورت خواهیم داشت: $a \equiv r^m$

پس برای پیدا کردن باقیمانده تقسیم a^n بر b کافیه از توان‌های کوچک a شروع کنی و باقیمانده تقسیم رو تو پیمانه b بدست بیاری بطوریکه سعی کنی طرف دوم همنهشتی ۱ یا -۱ بشه. بعدش با به توان رسوندن و ضرب کردن می‌تونی باقیمانده تقسیم رو حساب کنی.



مجموعه
الکتریکی
۲۰۲۱

ویژه امتحان نهایی

مثال: باقیمانده تقسیم 2^{17} بر ۱۵ :



مجموعه
موسسه
تربیتی
معدنی

مثال: باقیمانده $10 + 12 \times (1000)^{13}$ بر ۷ :



الماتریه
۱۰۰۰
۲
۳
۴
۵
۶
۷
۸
۹
۱۰
۱۱
۱۲
۱۳
۱۴
۱۵
۱۶
۱۷
۱۸
۱۹
۲۰
۲۱
۲۲
۲۳
۲۴
۲۵
۲۶
۲۷
۲۸
۲۹
۳۰
۳۱
۳۲
۳۳
۳۴
۳۵
۳۶
۳۷
۳۸
۳۹
۴۰
۴۱
۴۲
۴۳
۴۴
۴۵
۴۶
۴۷
۴۸
۴۹
۵۰

مثال: باقیمانده $(2^{11} + 7) \times 9$ بر 23 :



المنهج العربي



ویژه امتحان نهایی

مثال: باقیمانده $27^7 + 19$ بر 13 :



تجربیات
معماری
مهندسی
فلسفه
عقده

مثال: ثابت کنید باقیمانده های تقسیم دو عدد a, b بر m مساویند اگر و فقط اگر $a \equiv b \pmod{m}$



تجرباتی
الکتریکی
ریاضی
فیزیک
شیمی

مثال: الف) با استفاده از بسط دو جمله ای خیام ثابت کنید برای هر $a, b \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ همواره داریم:

$$(a + b)^n \equiv a^n + b^n \pmod{ab}$$

ب) ثابت کنید عدد $12^{51} - 11^{51} - 23^{51}$ بر 132 بخشپذیر است.



ویژه امتحان نهایی

*۲- پیدا کردن رقم یکان اعداد بصورت a^n :

قاعده کلی : باقیمانده تقسیم عدد را بر ۱۰ حساب می کنیم.



مثال: رقم یکان $1! + 2! + 3! + \dots + 500!$



مجموعه
کتابخانه
موسسه
تربیتی
پارس

مثال: اگر دو عدد $۳a - ۵$ ، $۴a - ۷$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد $۹a + ۶$ را بدست آورید.



*۳- قواعد بخش پذیری بر ۲ و ۵ و ۱۰ و ۳ و ۹ و ۱۱ :

اولاً : $\overline{ab} = b + 1 \cdot a$ = عدد دو رقمی

$\overline{abc} = c + 1 \cdot b + 1 \cdot a$ = عدد سه رقمی

$\overline{abcd} = d + 1 \cdot c + 1 \cdot b + 1 \cdot a$ = عدد چهار رقمی

نماد عدد n رقمی $a_{n-1} a_{n-2} a_{n-3} \dots a_3 a_2 a_1 a_0$.

$a_0 + 1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + 1 \cdot a_3 + \dots + 1 \cdot a_{n-1}$



تجربیات
مفید
در
مطالعه
و
آموزش

قاعده تقسیم بر ۱۰ :

$$a_n + 1 \cdot a_{n-1} + 1 \cdot 10^1 a_{n-2} + 1 \cdot 10^2 a_{n-3} + \dots + 1 \cdot 10^{n-1} a_1 \equiv a \pmod{10}.$$

باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۲ و ۵ و ۱۰ برابر است با باقیمانده تقسیم رقم یکان عدد بر ۲ و ۵ و ۱۰.



مجموعه
سازمان
آموزش
و
تربیت
مجموعه
سازمان
آموزش
و
تربیت

قاعده تقسیم بر ۹ :

$$a_n + 1 \cdot a_{n-1} + 1 \cdot a_{n-2} + 1 \cdot a_{n-3} + 1 \cdot a_{n-4} + \dots + 1 \cdot a_{n-1} \equiv a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_{n-1} \pmod{9}$$

مجموع ارقام

باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۳ و ۹ برابر است با باقیمانده تقسیم مجموع ارقام عدد بر ۳ و ۹ .



تستیها
العربیة
مجموع ارقام
باقیمانده تقسیم

قاعده تقسیم بر ۱۱ :

$$a_n + 1 \cdot a_{n-1} + 1 \cdot a_{n-2} + 1 \cdot a_{n-3} + \dots + 1 \cdot a_1 \equiv a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} + \dots$$

برای محاسبه باقیمانده هر عدد بر ۱۱ باید ارقام عدد را از سمت راست یک در میان + و - گذاشته، با هم جمع جبری کنیم و سپس باقیمانده عدد حاصل را بر ۱۱ حساب کنیم.



ویژه امتحان نهایی

مثال: اگر عدد ۶ رقمی $52a741$ بر ۹ بخشپذیر باشد، باقیمانده تقسیم آنرا بر ۱۱ حساب کنید.



*۴- تقویم نگاری :

اولاً: هفته ۷ روز است.

ثانیاً: ماههای سال و تعداد روزهای آنها در هر فصل به شرح زیر است؛

| | | | | |
|--------------|---------------|-------------|---------------------------|----------|
| فروردین (۳۱) | اردیبهشت (۳۱) | خرداد (۳۱) | ← | بهار |
| تیر (۳۱) | مرداد (۳۱) | شهریور (۳۱) | ← | تابستان |
| مهر (۳۰) | آبان (۳۰) | آذر (۳۰) | ← | پاییز |
| دی (۳۰) | بهمن (۳۰) | اسفند (۲۹) | و هر چهارسال «کبیسه» (۳۰) | ← زمستان |



العربية
الرياضية
العلوم
التاريخ
الاجتماعية
الفنون
الرياضة

تیپ مساله : تاریخ یک روز رو با روز هفته اش میدان و تاریخ روز دیگه ای رو هم میدان اما روز هفته شو نمیدن و روز هفته رو میخوان.

روش حل مساله : روز هفته داده شده را مبنای صفر قرار داده و روزهای بعدی تا هفته بعد را بترتیب ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ در نظر می‌گیریم. سپس فاصله روز داده شده تا روز خواسته شده را حساب کرده و باقیمانده آنرا بر ۷ بدست می‌آوریم. عدد به دست آمده عددی بین ۰ تا ۶ است که با توجه به مبنای در نظر گرفته شده روز خواسته شده را مشخص می‌کند.



مثال: اول مهر دوشنبه است. ۲۲ بهمن چندشنبه است؟



مجموعه
موسسه
توسعه
آموزش
معدنی
پارس

مثال: اگر اول فروردین در سالی جمعه باشد، ۱۶ آذر آن سال چند شنبه است؟



مجموعه
سازمان
آموزش
و تربیت
مندی
جمهوری
اسلامی
ایران



مشاهده نمونه سوال نهایی :

باسمه تعالی

| | | | |
|--|---|--|-----------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته | نام و نام خانوادگی : | ساعت شروع: ۸ صبح | تعداد صفحه: ۲ |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | رشته : ریاضی فیزیک | تاریخ امتحان : ۱۳۹۸/۳/۲۵ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۸ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد | | |
| نمره | | | |
| ۴ | اگر در یک سال، شنبه روز اول مهر باشد. در این صورت با استفاده از هم نهشتی تعیین کنید ۱۲ بهمن، در همان سال چه روزی از هفته است؟ | | |
| ۱ | | | |

باسمه تعالی

| | | | |
|--|---|--|---------------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته | نام و نام خانوادگی : | ساعت شروع: ۸ صبح | رشته : ریاضی فیزیک |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه: ۲ | تاریخ امتحان : ۱۳۹۹/۰۴/۰۸ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۹ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد | | |
| نمره | | | |
| ۴ | باقی مانده تقسیم 7^3 بر ۱۵ را به دست آورید. | | |
| ۱/۵ | | | |



مجموعه المپیاد ریاضی

باسمه تعالی

| | | | |
|--|--------------------------|--|------------------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته | رشته: ریاضی فیزیک | نام و نام خانوادگی: | ساعت شروع: ۸ صبح |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه: ۲ | تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۰۳/۲۸ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۴۰۱ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |

| | |
|------|--|
| ردیف | سؤالات پاسخ نامه دارد. (استفاده از ماشین حساب ساده، با چهار عمل اصلی، مجاز است.) |
|------|--|

| | |
|---|---|
| ۱ | درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید. الف) اگر $a b$ و $a \neq 0$ ، در این صورت $ a > b $. ب) برای دو عدد صحیح و ناصفر a و b اگر $(a c, b c)$ و $(a m, b m \Rightarrow c \leq m)$ آن گاه $[a, b] = c$. پ) برای هر دو عدد صحیح a و b و عدد طبیعی m ، اگر باقی مانده تقسیم a بر m مساوی با r باشد، در این صورت $a \equiv r^m$. ت) بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد ۴ و ۲ برابر ۲- است. |
| ۲ | ثابت کنید برای هر عدد طبیعی زوج $n, 5n + 7 - n^2$ عددی فرد است. |
| ۳ | اگر عددی مانند k در Z باشد، به طوری که $5 4k + 1$ ، ثابت کنید $6 + 28k + 16k^2$ بر ۲۵ بخش پذیر است. |
| ۴ | باقی مانده تقسیم عدد $A = 27^{20} + 18$ را بر ۱۳ بیابید. |
| ۵ | اگر در یک سال، اول مهر شنبه باشد، در این صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟ |



باسمه تعالی

| | | | |
|--|-----------------------|--------------------------|-----------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته | ساعت شروع: ۸ صبح | نام و نام خانوادگی: | رشته: ریاضی فیزیک |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه: ۲ | تاریخ امتحان: ۱۴۰۰/۰۶/۲۷ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت شهریور ماه سال ۱۴۰۰ | | | |
| مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | | | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد | | |
| | نمره | | |

| | |
|---|---|
| ۱ | ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است. |
| ۲ | درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید. الف) اگر $a b$ و m, n دو عدد طبیعی باشند که $m \leq n$ ، آن گاه $a^m b^m$. ب) اگر $a b$ آن گاه $(a, b) = a$. پ) اگر $a \equiv b^m$ باشد، آن گاه باقی مانده های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی اند. ت) منظور از حل معادله هم نهشتی، پیدا کردن همه جواب های حقیقی است که در معادله $a x \equiv b^m$ صدق کند. |
| ۳ | اگر $a > 1$ ، $a 9k + 4$ و $a 5k + 3$ ، ثابت کنید a عددی اول است. |
| ۴ | اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح $a + 2$ یا $a + 4$ بر 3 بخش پذیر است. |
| ۵ | اگر دو عدد $(3a - 5)$ و $(4a - 7)$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد $(9a + 6)$ را به دست آورید. |



مجموعه المپیاد ریاضی

باسمه تعالی

| | | | |
|--|-------------------------|--|------------------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته | تعداد صفحه: ۲ | رشته: ریاضی - فیزیک | نام و نام خانوادگی: |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | ساعت شروع: ۸ صبح | تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۰۶/۰۶ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت شهریور ماه سال ۱۴۰۱ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |

| | | |
|---|--|------|
| ۵ | ثابت کنید باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۹، برابر است با باقیمانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹. | ۱/۲۵ |
|---|--|------|

باسمه تعالی

| | | | |
|--|--------------------------|---|------------------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته | تعداد صفحه: ۲ | نام و نام خانوادگی: | رشته: ریاضی - فیزیک |
| تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۱۰/۰۳ | ساعت شروع: ۱۰ صبح | پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دی ماه سال ۱۴۰۱ | | مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش http://aee.medu.gov.ir | |

| | | |
|------|---|------|
| ردیف | سؤالات پاسخ نامه دارد. (استفاده از ماشین حساب ساده، با چهار عمل اصلی، مجاز است). | نمره |
|------|---|------|

| | | |
|---|--|-----|
| ۶ | باقی مانده تقسیم عدد $!200 + !000 + !5 + !4 + !3 + !2 + !1$ را بر ۱۵ بدست آورید. (! نماد فاکتوریل می باشد) | ۱/۵ |
|---|--|-----|



اپیزود ۹: معادله همنهشتی و معادله سیاله

۱- معادله همنهشتی: هر معادله بصورت $ax \equiv b^m$ را که در آن x, b, a عددی صحیح و m عددی طبیعی است و هدف بدست آوردن جواب‌های کلی x است، یک معادله همنهشتی می‌گوییم.

الف: شرط وجود جواب در یک معادله همنهشتی

$$ax \equiv b^m : (a, m) | b$$



ب : روش حل معادلهٔ همنهشتی :

۱- اگر ضریب X برابر ۱ باشد، معادله به سرعت حل می‌شود:

$$x \equiv b \pmod{m} \Rightarrow x = mk + b$$

$$x \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow x = 5k + 3$$

$$x \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow x = 7k - 1$$

۲- اگر ضریب X برابر ۱ نباشد، مضاربی از پیمانه را به طرفین معادله اضافه و کم می‌کنیم تا عاملی مشترک با ضریب X ایجاد شود و سپس با تقسیم طرفین بر ضریب X ، معادله حل شود. (ضریب X را باید ۱ کنیم)



مجموعه سؤالات و پاسخ‌ها
 در این کتابچه
 در دسترس است

مثال: جواب های عمومی معادلات زیر را بیابید :

$$14x \equiv 22 \pmod{4}$$

$$4x \equiv 17 \pmod{5}$$

$$4x \equiv 18 \pmod{6}$$

$$6x \equiv 11 \pmod{9}$$

$$8x \equiv 20 \pmod{12}$$



$$423x \equiv 79 \pmod{11}$$

$$51x \equiv 11 \pmod{6}$$



مجموعه
فصل
۲
مجموعه
۱
۱
۲
۳
۴
۵
۶
۷
۸
۹
۱۰
۱۱
۱۲
۱۳
۱۴
۱۵
۱۶
۱۷
۱۸
۱۹
۲۰
۲۱
۲۲
۲۳
۲۴
۲۵
۲۶
۲۷
۲۸
۲۹
۳۰
۳۱
۳۲
۳۳
۳۴
۳۵
۳۶
۳۷
۳۸
۳۹
۴۰
۴۱
۴۲
۴۳
۴۴
۴۵
۴۶
۴۷
۴۸
۴۹
۵۰
۵۱
۵۲
۵۳
۵۴
۵۵
۵۶
۵۷
۵۸
۵۹
۶۰
۶۱
۶۲
۶۳
۶۴
۶۵
۶۶
۶۷
۶۸
۶۹
۷۰
۷۱
۷۲
۷۳
۷۴
۷۵
۷۶
۷۷
۷۸
۷۹
۸۰
۸۱
۸۲
۸۳
۸۴
۸۵
۸۶
۸۷
۸۸
۸۹
۹۰
۹۱
۹۲
۹۳
۹۴
۹۵
۹۶
۹۷
۹۸
۹۹
۱۰۰

مثال: همهٔ اعداد صحیحی را بیابید که سه برابر آنها منهای ۱۳ بر ۷ بخش پذیر باشد.



مثال: همهٔ اعداد صحیح چون x را بیابید که ۵ برابر آنها بعلاوهٔ ۹ بر ۱۱ بخش پذیر باشد.



مجموعه
فصل
۲
مجموعه
۱
۲
۳
۴
۵
۶
۷
۸
۹
۱۰
۱۱
۱۲
۱۳
۱۴
۱۵
۱۶
۱۷
۱۸
۱۹
۲۰
۲۱
۲۲
۲۳
۲۴
۲۵
۲۶
۲۷
۲۸
۲۹
۳۰
۳۱
۳۲
۳۳
۳۴
۳۵
۳۶
۳۷
۳۸
۳۹
۴۰
۴۱
۴۲
۴۳
۴۴
۴۵
۴۶
۴۷
۴۸
۴۹
۵۰
۵۱
۵۲
۵۳
۵۴
۵۵
۵۶
۵۷
۵۸
۵۹
۶۰
۶۱
۶۲
۶۳
۶۴
۶۵
۶۶
۶۷
۶۸
۶۹
۷۰
۷۱
۷۲
۷۳
۷۴
۷۵
۷۶
۷۷
۷۸
۷۹
۸۰
۸۱
۸۲
۸۳
۸۴
۸۵
۸۶
۸۷
۸۸
۸۹
۹۰
۹۱
۹۲
۹۳
۹۴
۹۵
۹۶
۹۷
۹۸
۹۹
۱۰۰

۲- معادلات سیاله : هر معادله بصورت $ax + by = c$ را یک معادله سیاله دومتغیره خطی درجه یک می گوئیم که در آن همه پارامترها عددی صحیح هستند.

الف : شرط وجود جواب در معادله سیاله $ax + by = c$

$$ax + by = c : (a, b) | c$$

نکته : اگر $(a, b) = 1$ معادله همواره جواب دارد.

ب : روش حل معادله سیاله $ax + by = c$: تبدیل معادله سیاله به معادله همنهشتی

$$ax + by = c \Rightarrow ax - c = -by \Rightarrow ax - c = b(-y) \Rightarrow ax \equiv c$$

این معادله همنهشتی را حل کرده و X را بدست می آوریم.



آنگاه x را در معادله سیاله قرار داده و از آنجا y را نیز بدست می آوریم.
مثال: جواب های عمومی معادلات زیر را بیابید :

$$4x + 5y = 9$$

$$7x + 5y = 11$$



مثال: به چند طریق می‌توان یک کیسهٔ ۱۹ کیلویی را با وزنه‌های ۳ کیلویی و ۴ کیلویی وزن کرد؟



مجموعه
فصل
۲
۱۰
۱۱
۱۲
۱۳
۱۴
۱۵
۱۶
۱۷
۱۸
۱۹
۲۰
۲۱
۲۲
۲۳
۲۴
۲۵
۲۶
۲۷
۲۸
۲۹
۳۰
۳۱
۳۲
۳۳
۳۴
۳۵
۳۶
۳۷
۳۸
۳۹
۴۰
۴۱
۴۲
۴۳
۴۴
۴۵
۴۶
۴۷
۴۸
۴۹
۵۰
۵۱
۵۲
۵۳
۵۴
۵۵
۵۶
۵۷
۵۸
۵۹
۶۰
۶۱
۶۲
۶۳
۶۴
۶۵
۶۶
۶۷
۶۸
۶۹
۷۰
۷۱
۷۲
۷۳
۷۴
۷۵
۷۶
۷۷
۷۸
۷۹
۸۰
۸۱
۸۲
۸۳
۸۴
۸۵
۸۶
۸۷
۸۸
۸۹
۹۰
۹۱
۹۲
۹۳
۹۴
۹۵
۹۶
۹۷
۹۸
۹۹
۱۰۰

مثال: به چند طریق می توان ۱۸۰۰۰ تومان را به اسکناس های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟



مثال: تیراندازی به دو هدف یکی ۳ امتیازی و دیگری ۵ امتیازی شلیک می‌کند. اگر تمام تیرهای او به یکی از دو هدف برخورد کرده باشد، به چند طریق این تیرانداز ممکن است ۴۲ امتیاز بگیرد؟



مثال: به چند طریق ۵ نفر می‌توانند از میان قرمه‌سبزی و قیمه غذا سفارش دهند؟



مثال: به چند طریق می توان از بین دو نوع گل گلاب و میخک یک دسته گل ۹ شاخه‌ای انتخاب کرد؟



مثال: در یک مسابقه علمی سؤالات ۷ و ۹ امتیازی موجود است. یک دانش آموز به چند طریق می‌تواند با پاسخ به این سؤالات ۷۳ امتیاز کسب کند؟



مشاهده نمونه سوال نهایی :

باسمه تعالی

| | | | |
|---|---|--|-----------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته | ساعت شروع: ۸ صبح | نام و نام خانوادگی : | رشته : ریاضی فیزیک |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه: ۲ | تاریخ امتحان : ۱۴۰۰/۰۳/۸ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۴۰۰ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد | | |
| نمره | | | |
| ۱ | درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است. ب) هیچ عدد صحیحی مانند x و y وجود ندارند که رابطه $x^2 + y^2 = (x + y)^2$ برقرار باشد. | | |
| ۲ | جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب پر کنید. الف) a و b اعدادی صحیح و a مخالف صفر است. اگر $a b$ آن گاه عدد شمارنده عدد است. ب) m عددی صحیح است. حاصل $(2m, 6m^2)$ برابر با است. | | |
| ۳ | به روش بازگشتی ثابت کنید حاصل ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربعات آن‌ها است. | | |
| ۴ | ثابت کنید اگر $p \geq 5$ عددی اول باشد، آن گاه به یکی از دو صورت $p = 4k + 1$ یا $p = 4k + 3$ نوشته می‌شود. | | |
| ۵ | باقی مانده تقسیم عدد $11 + 9 \times (1000)^{25} = A$ را بر ۷ بیابید. | | |
| ۶ | معادله $7x \equiv 1 \pmod{4}$ را حل کنید. | | |



باسمه تعالی

| | | | |
|---|------------------|----------------------------|-----------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته | تعداد صفحه: ۲ | رشته: ریاضی - فیزیک | نام و نام خانوادگی: |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | ساعت شروع: ۸ صبح | تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۰۶/۰۶ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت شهریور ماه سال ۱۴۰۱ | | | |
| مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | | | |

| | | |
|------|---|------|
| ردیف | سؤالات پاسخ نامه دارد. (استفاده از ماشین حساب ساده، با چهار عمل اصلی، مجاز است.) | نمره |
|------|---|------|

| | | |
|---|---|------|
| ۱ | هر یک از گزاره های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض کنید. الف) برای هر عدد طبیعی n ، عدد $1 + 2^n$ اول است. ب) مربع هر عدد فرد، عددی فرد است. | ۱ |
| ۲ | a_1, a_2, a_3 اعدادی صحیح هستند و b_1, b_2, b_3 هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته اند. ثابت کنید $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ عددی زوج است. | ۱/۲۵ |
| ۳ | اگر عدد طبیعی a ، دو عدد $(\Delta k + 9)$ و $(\Lambda k + 13)$ را عا د کند، ثابت کنید: $a=1$ یا $a=7$. | ۰/۷۵ |
| ۴ | اگر باقیمانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۶ و ۷ به ترتیب ۳ و ۵ باشد، باقیمانده تقسیم عدد a را بر ۴۲ بیابید. | ۱ |
| ۵ | ثابت کنید باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۹، برابر است با باقیمانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹. | ۱/۲۵ |
| ۶ | دانش آموزی در یک آزمون علمی شرکت کرده است، او به سؤالات ۵ امتیازی و ۳ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۴۲ امتیاز کسب کرده است. (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد). این دانش آموز به چه صورت هایی توانسته این امتیاز را کسب کند؟ | ۱/۷۵ |



دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد داخل و خارج کشور در نوبت شهریور ماه سال ۱۴۰۲ مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش
<http://aee.medu.gov.ir>

ردیف (استفاده از ماشین حساب ساده، یا چهار عمل اصلی، مجاز است.)
 سوالات پاسخ برگ دارد.
 نمره

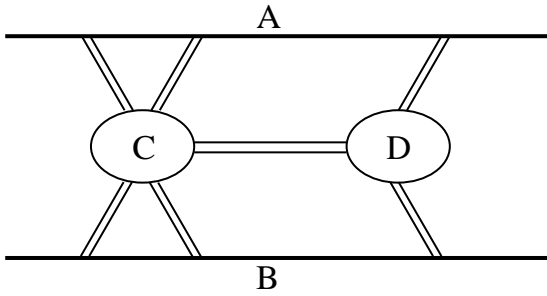
| | | |
|------|---|---|
| ۱ | <p>درست یا نادرست بودن گزاره های زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) حاصل ضرب هر عدد گویا، در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.</p> <p>ب) برای اعداد صحیح a، b و c که $a \neq 0$، اگر $a b + c$ آن گاه $a b$ یا $a c$.</p> <p>ج) معادله هم نهشتی $ax \equiv b^m$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a, m) b$.</p> <p>د) اگر داشته باشیم $(a, b) = 1$ آن گاه می گوییم: a و b نسبت به هم اول اند.</p> | ۱ |
| ۱/۲۵ | <p>برای هر دو عدد حقیقی x و y، به روش بازگشتی (گزاره های هم ارز) نشان دهید:</p> $2x^2 + 2xy + y^2 \geq 4x - 4$ | ۲ |
| ۱ | <p>به روش برهان خلف نشان دهید: اگر a عدد صحیح فرد باشد و $a + 2 b$، آن گاه b نیز عددی فرد است.</p> | ۳ |
| ۱/۲۵ | <p>اگر عددی مانند k در \mathbb{Z} باشد به طوری که $7 2k + 1$، ثابت کنید:</p> $49 4k^2 - 10k - 6$ | ۴ |
| ۱ | <p>باقی مانده تقسیم عدد $A = 63^{14} + 1$ را بر ۱۶ به دست آورید.</p> | ۵ |
| ۱/۵ | <p>معادله هم نهشتی $11 \equiv 1402x^9$ را حل کنید.</p> | ۶ |



اپیزود ۱۰ : مقدمات گراف

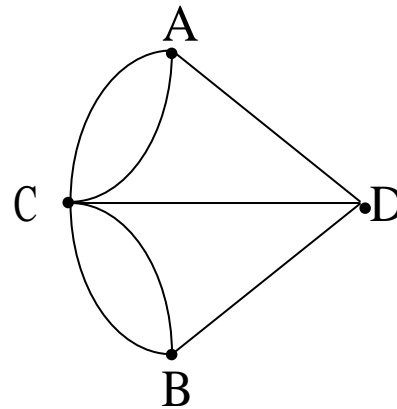
تاریخچه:

مسأله پل‌های شهر گونیکسبرگ (مسأله اویلر)



سؤال: آیا می‌توان از یکی از مناطق (۴ منطقه) شروع به حرکت کرد و از هر پل دقیقاً یک بار عبور کرد (۷ پل) و به ناحیه اول برگشت؟

مدلسازی { نقطه → منطقه
خط راست یا خمیده → پل



◀ **گراف** : ساختاری است شامل تعدادی نقطه (رأس گراف) و تعدادی خط راست یا خمیده (یال گراف) بطوریکه برخی یا همه رئوس با تعدادی یال به هم متصل شده‌اند.

گراف از لحاظ ساختار :

۱- **گراف چندگانه** : گرافی که بین دو رأسش بیش از یک یال دارد یا اینکه طوقه دارد.

«طوقه» یالی است که یک رأس را به خودش وصل می‌کند.

مانند گراف مسأله اویلر.

۲- **گراف جهت‌دار** : گرافی که یال‌هایش جهت دارند یعنی روی هر یال یک فلش وجود دارد.

تعداد یال‌های گراف جهت‌دار = تعداد فلش‌ها

۳- **گراف ساده** : گرافی که نه جهت‌دار باشد نه چندگانه.



المعرب
الغریب
المعرب
الغریب

نماد ریاضی گراف $G(V, E)$

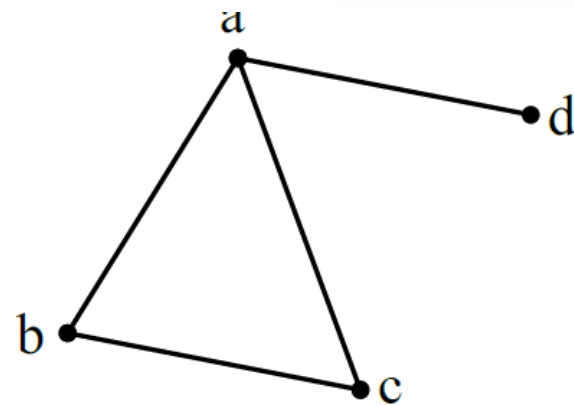
V : مجموعه رئوس

E : مجموعه یالها

گراف ساده :

$$V = \{a, b, c, d\}$$

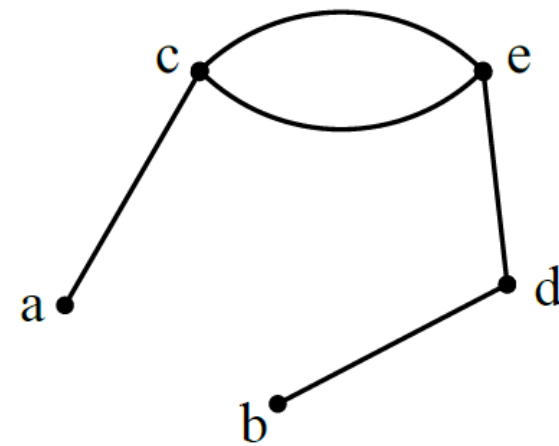
$$E = \{ad, ac, ab, bc\}$$



گراف جهت دار :

$$V = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E = \{(c, e), (e, c), (c, a), (d, e), (d, b), (b, b)\}$$
 زوج مرتب



الماتریة
الرياضیة
المعاصر
2022

نکته : یال‌ها در گراف جهت‌دار بصورت زوج مرتب نمایش داده می‌شود.

مثال:

$$V = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$E = \{ab, cd, ef, fa, bc, de\}$$



$$V = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E = \{(a, a), (a, b), (c, d), (d, c), (c, b)\}$$



مجموعه
فصل
۲
مجموعه
۱
۱
۲
۳
۴
۵
۶
۷
۸
۹
۱۰
۱۱
۱۲
۱۳
۱۴
۱۵
۱۶
۱۷
۱۸
۱۹
۲۰
۲۱
۲۲
۲۳
۲۴
۲۵
۲۶
۲۷
۲۸
۲۹
۳۰
۳۱
۳۲
۳۳
۳۴
۳۵
۳۶
۳۷
۳۸
۳۹
۴۰
۴۱
۴۲
۴۳
۴۴
۴۵
۴۶
۴۷
۴۸
۴۹
۵۰
۵۱
۵۲
۵۳
۵۴
۵۵
۵۶
۵۷
۵۸
۵۹
۶۰
۶۱
۶۲
۶۳
۶۴
۶۵
۶۶
۶۷
۶۸
۶۹
۷۰
۷۱
۷۲
۷۳
۷۴
۷۵
۷۶
۷۷
۷۸
۷۹
۸۰
۸۱
۸۲
۸۳
۸۴
۸۵
۸۶
۸۷
۸۸
۸۹
۹۰
۹۱
۹۲
۹۳
۹۴
۹۵
۹۶
۹۷
۹۸
۹۹
۱۰۰

ویژه امتحان نهایی

مفاهیم و اصطلاحات اولیه در گراف ساده :

۱- مرتبه گراف = تعداد رئوس p

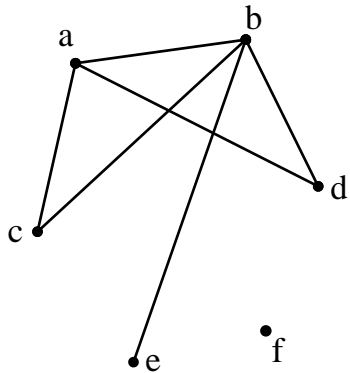
۲- اندازه گراف = تعداد یالها q

۳- رأس تنها (ایزوله - منفرد - کچل) : رأسی که هیچ یالی ندارد.

۴- درجه هر رأس : تعداد یالی که از آن عبور می کند $\deg(v)$

۵- ماکزیمم درجه = بیشترین درجه بین رئوس Δ

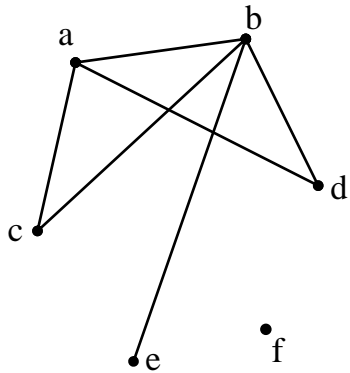
می نیمم درجه = کمترین درجه بین رئوس δ



العربية
الرياضيات
الفيزياء
الكيمياء
البيولوجيا
العلوم
الاجتماعية
الإنجليزية
الفرنسية
الألمانية
الروسية
اليابانية
الصينية
الهندية
البنغالية
الاندونيسية
المالديفية
الفلبينية
البنمية
البرونزية
الكمبودية
اللاوسية
الميتيمانية
النيوزيلندية
النرويجية
السويدية
التركية
العثمانية
الباكستانية
البنجابية
البنغالية
البنمية
البرونزية
الكمبودية
اللاوسية
الميتيمانية
النيوزيلندية
النرويجية
السويدية
التركية
العثمانية
الباكستانية

ویژه امتحان نهایی

۶- رئوس ماکزیمم = رأسی که درجه آن \max است.
رئوس می‌نیمم = رأسی که درجه آن \min است.



۷- رئوس زوج = رئوسی که درجه آنها زوج است.
رئوس فرد = رئوسی که درجه آنها فرد است.

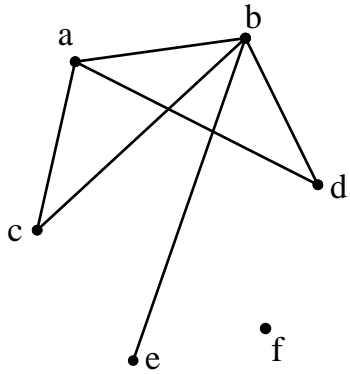
۸- دو رأس مجاور = دو رأس که با یک یال به هم متصلند.

۹- دو یال مجاور = دو یال که در یک رأس مشترکند.

۱۰- مجموعه همسایه‌های یک رأس = رئوسی که با آن رأس مجاورند.



مجموعه همسایه‌های یک رأس



$N(v)$ همسایگی باز رأس $v \leftarrow$ همه رئوس مجاور

$N[v]$ همسایگی بسته رأس $v \leftarrow$ همه رئوس مجاور و خود رأس v

۱۱- زیرگراف : هر گرافی که زیرمجموعه‌ای از گراف اولیه باشد یعنی مجموعه رئوسش زیرمجموعه رأس‌های گراف و مجموعه یال‌هایش نیز زیرمجموعه یال‌های گراف است.



مجموعه یال‌ها

قضیه ۱ : در هر گراف ساده، مجموع درجات رئوس با دو برابر تعداد یالها برابر است.

$$\sum_{i=1}^p \deg v_i = \deg v_1 + \deg v_2 + \deg v_3 + \dots + \deg v_p = 2q$$



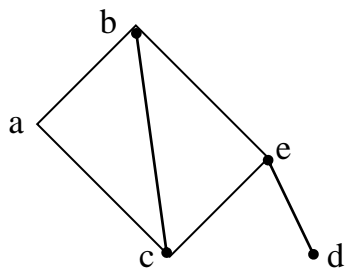
❖ **قضیه ۲:** در هر گراف ساده، تعداد رئوس فرد، عددی زوج است. (هیچ گراف ساده‌ای نمی‌تواند تعداد فردی رأس فرد داشته باشد.)



المعرب
العلماء
العرب
العالمين

معرفی سه مفهوم مهم در گراف :

۱- مسیر در گراف : مسیر به طول n ، دنباله ای است متشکل از $n+1$ راس دو به دو متمایز بین دو راس a و b که از a آغاز و به b ختم می شوند و هر دو راس متوالی در این دنباله مجاورند.



نکات مسیر :

۱- طول مسیر = تعداد یالهای طی شده

۲- مسیر به طول یک = یال \Leftarrow تعداد مسیرها به طول یک = q

۳- مسیر به طول صفر = رأس \Leftarrow تعداد مسیرها به طول صفر = p

۴- در یک مسیر همه رئوس متمایزند. (رأس تکراری نداریم)

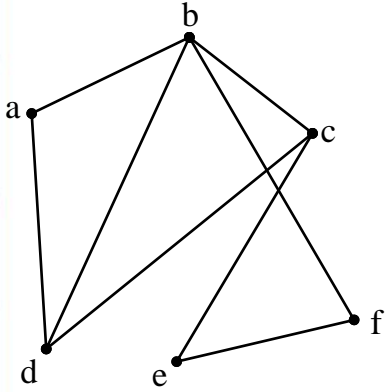
۵- حداقل طول مسیر = \cdot

۶- حداکثر طول مسیر در یک گراف p رأسی = $p-1$



العربية
2021/2022
1443
1444
1445
1446
1447
1448
1449
1450
1451
1452
1453
1454
1455
1456
1457
1458
1459
1460
1461
1462
1463
1464
1465
1466
1467
1468
1469
1470
1471
1472
1473
1474
1475
1476
1477
1478
1479
1480
1481
1482
1483
1484
1485
1486
1487
1488
1489
1490
1491
1492
1493
1494
1495
1496
1497
1498
1499
1500

۲- دور در گراف : دور به طول n ؛ $n \geq 3$ ، دنباله ای است بصورت $V_1 V_2 V_3 \dots V_{n-1} V_1$ از n راس دو به دو متمایز که در آن هر راس، با راس بعدی مجاور است.



نکات دور :

۱- در یک دور، همه رئوس متمایزند به جز رأس اول و آخر.

۲- دورها را می توان از روی شکل های هندسی تشخیص داد (مثلث = دور به طول ۳،

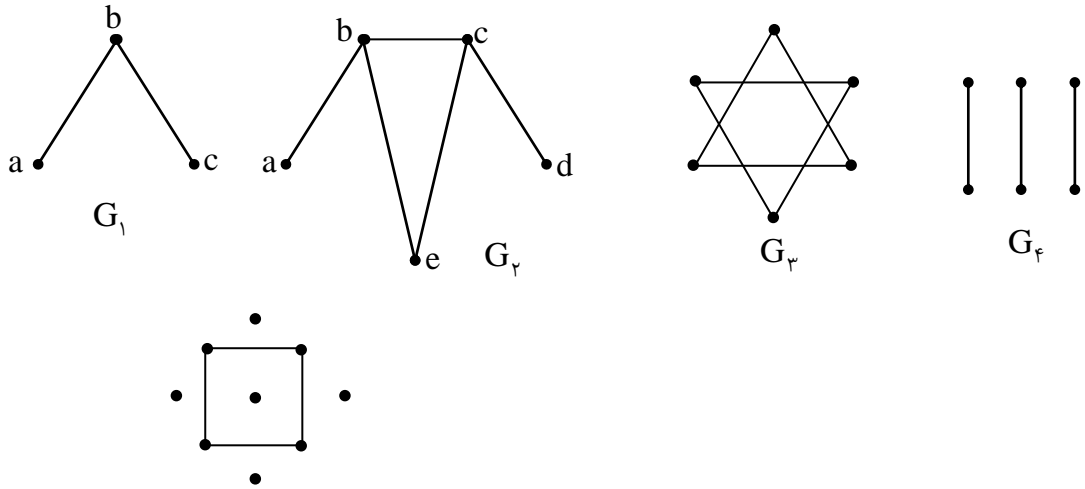
چهارضلعی = دور به طول ۴ و ...)

۳- حداقل طول دور برابر ۳ است ← مثلث

۴- حداکثر طول دور در یک گراف مرتبه $p = p$



۳- همبندی و ناهمبندی در گراف : گراف G را همبند گوئیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد (رئوس همگی متصل باشند). یعنی گراف یک بخشی باشد و از چند بخش جدا از هم تشکیل نشده باشد.



اگر G همبند نباشد، آن را ناهمبند گوئیم.

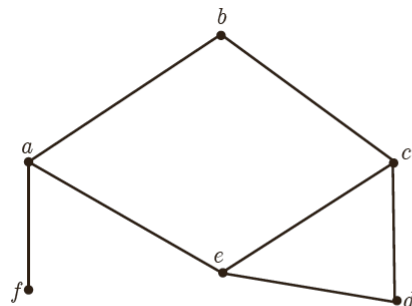


مجموعه سوالات و پاسخ‌ها

فعالیت

فرض کنید G یک گراف باشد و داشته باشیم $\delta(G) \geq 4$. می‌خواهیم نشان دهیم که G شامل یک مسیر به طول بزرگ‌تر یا مساوی ۴ است.

- ۱ رأس دلخواه v_1 را در G در نظر می‌گیریم. حتماً v_1 به رأس دیگری متصل است. (چرا؟) فرض کنیم آن رأس v_2 باشد.
- ۲ حتماً v_2 به رأسی به جز رأس v_1 متصل است. (چرا؟) فرض می‌کنیم آن رأس v_3 باشد.
- ۳ حتماً v_3 به رأسی از مجموعه $V(G) - \{v_1, v_2\}$ وصل است (چرا؟) فرض می‌کنیم آن رأس v_4 باشد.
- ۴ حتماً v_4 به رأسی از مجموعه $V(G) - \{v_1, v_2, v_3\}$ وصل است (چرا؟) فرض می‌کنیم آن رأس v_5 باشد.
- ۵ مسیر $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5$ یک مسیر به طول ۴ در گراف G است.



شکل ۲۱ •g

۲ گراف G (شکل ۲۱) را در نظر بگیرید.

الف) مجموعه‌های $V(G)$ و $E(G)$ را بنویسید.

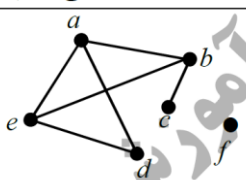
ب) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص نمایید.

پ) مجموعه همسایه‌های رأس‌های f و g و e را بنویسید.

ت) اگر $N_G(x) = \{a, c\}$ ، آنگاه x کدام رأس است؟



باسمه تعالی

| | | | |
|---|---|--|------------------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته | نام و نام خانوادگی : | ساعت شروع : ۸ صبح | رشته : ریاضی فیزیک |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه: ۲ | تاریخ امتحان : ۱۳۹۹/۰۴/۰۸ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۹ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد | | |
| نمره | | | |
| ۷ | <p>گراف G را در نظر گرفته و به سوالات زیر پاسخ دهید.</p> <p>الف) $N_G[a]$ را با اعضا مشخص کنید.</p> <p>ب) یک دور به طول ۴ در این گراف مشخص کنید.</p> <p>پ) یک مسیر به طول ۳ و یک مسیر به طول ۴ از a به e بنویسید.</p> | | |
| ۱/۲۵ |  | | |



مجموعه‌های

باسمه تعالی

| | | | |
|---|---------------------|--|-----------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته | نام و نام خانوادگی: | ساعت شروع: ۸ صبح | رشته: ریاضی فیزیک |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه: ۲ | تاریخ امتحان: ۱۳۹۸/۶/۴ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت شهریورماه سال ۱۳۹۸ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |

| ردیف | سؤالات پاسخ نامه دارد | نمره |
|------|--|------|
| ۷ | <p>گراف G با مجموعه راس های $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ و مجموعه یال های زیر در نظر بگیرید:</p> <p>$E = \{ab, bc, cd, ed, ae, cf, ef\}$</p> <p>الف) نمودار گراف را رسم کنید.</p> <p>ب) $N_G[b]$ را مشخص کنید.</p> <p>ج) یک مسیر به طول ۵ از b به d بنویسید.</p> | ۲ |



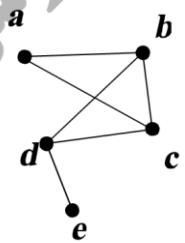
المانها (۲)
 المانها (۱)
 المانها (۳)
 المانها (۴)
 المانها (۵)
 المانها (۶)
 المانها (۷)
 المانها (۸)
 المانها (۹)
 المانها (۱۰)
 المانها (۱۱)
 المانها (۱۲)
 المانها (۱۳)
 المانها (۱۴)
 المانها (۱۵)
 المانها (۱۶)
 المانها (۱۷)
 المانها (۱۸)
 المانها (۱۹)
 المانها (۲۰)

باسمه تعالی

| | | | |
|--|----------------------|--|------------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته | نام و نام خانوادگی : | ساعت شروع : ۱۰ صبح | رشته : ریاضی فیزیک |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه : ۲ | تاریخ امتحان : ۱۳۹۸/۱۰/۰۹ | مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دی ماه سال ۱۳۹۸ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |

| | | |
|------|-----------------------|------|
| ردیف | سؤالات پاسخ نامه دارد | نمره |
|------|-----------------------|------|

| | | |
|---|--|------|
| ۸ | <p>گراف G به صورت مقابل را در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید.</p> <p>الف) $\delta(G)$ را مشخص کنید.</p> <p>ب) اندازه گراف را تعیین کنید.</p> <p>پ) مجموعه همسایگی بسته رأس b را بنویسید.</p> <p>ت) اگر $N_G(d) = \{e, x, b\}$ باشد، کدام رأس است x؟</p> | ۱/۲۵ |
|---|--|------|



المان
 هندسه
 فیزیک
 شیمی
 تاریخ
 ادبیات
 عربی
 ریاضی

اپیزود ۱۱ : انواع گراف

۱- گراف خطی P_n (گراف مسیر) : گرافی که تنها از یک مسیر n رأسی تشکیل شده باشد.

۲- گراف چند ضلعی C_n ($n \geq 3$) (گراف دور) : گرافی که تنها از یک دور n رأسی تشکیل شده باشد.

۳- گراف k -منتظم : گرافی که درجه همه رئوس آن برابر عدد حسابی k باشد. یعنی درجه همه رئوس با هم برابر است و برابر با عدد k است.



۱) $۲q = pk$

۲) $\delta = \Delta = k$



المعرب
العلم
الطبي
البيولوجيا
الكيمياء
الفيزياء
الرياضيات
العلوم
الطبيعية

مثال : در یک گراف ۳- منتظم داریم $2p = q + 4$ مقادیر q, p را حساب کنید.



مثال : در یک گراف از اندازه ۳۶ داریم $\delta = \Delta = 3$ مرتبه این گراف را تعیین کنید.



۳) گراف فرد - منتظم مرتبه فرد وجود ندارد (قابل رسم نیست).

مثال : چند نوع گراف ۳- منتظم مرتبه ۷ قابل رسم است؟



مثال : چند نوع گراف k -منتظم مرتبه ۷ وجود دارد؟



المعربون

۴- گراف کامل $(k_n$ یا $k_p)$: گرافی است از مرتبه p (یا n) که همهٔ رئوس آن با هم مجاورند. به عبارت دیگر، همهٔ رئوس به هم متصل هستند. در نتیجه، بیشترین تعداد یال را دارد.

نکات :

$$۱) \delta = \Delta = p - ۱$$

$$۲) q = \frac{p(p-۱)}{۲}$$

۳) هر گراف کامل n راسی، یک گراف $(n-۱)$ -منتظم است.



مثال : یک گراف کامل ۳۶ یال دارد. مرتبه، ماکزیمم درجه و میمنیموم درجه گراف را حساب کنید.



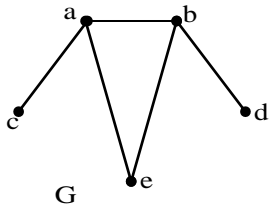
مثال : در یک گراف کامل داریم $p^2 = \Delta^2 + 15$ مرتبه و اندازه این گراف را حساب کنید.



مثال : با اضافه کردن ۶ یال به یک گراف ۳- منتظم یک گراف کامل به دست می‌آید. مرتبه و اندازه این گراف را حساب کنید.



۵- گراف مکمل: گراف \bar{G} را مکمل گراف G گوئیم هرگاه با G هم مرتبه بوده و یال‌هایی داشته باشد که در G موجود نیستند و برعکس.



نکات:

$$۱) q_G + q_{\bar{G}} = \frac{p(p-1)}{۲}$$

$$۲) \deg_G^a + \deg_{\bar{G}}^a = p - ۱$$



تجربیات

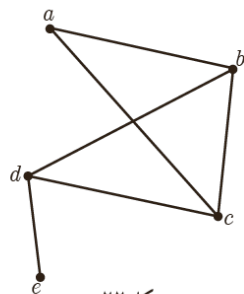
۶- گراف تهی : گرافی که هیچ یالی ندارد و از تعدادی رأس ایزوله تشکیل شده است و با \bar{k}_p یا \bar{k}_n نمایش داده می‌شود.

نکات :

- ۱) گراف تهی، مکمل گراف کامل است.
- ۲) هر گراف تهی یک گراف 0 -منتظم است.
- ۳) همه گراف‌های تهی ناهمبندند بجز \bar{k}_1



المعرب
العلمية
الرياضية
الهندسية
الطبيعية
الاجتماعية
الإنسانية
الغوية
الرياضيات
الفيزياء
الكيمياء
البيولوجيا
الطب
الهندسة
العلوم
الاجتماعية
الإنسانية
الغوية



شکل ۲۲

۵. گراف G (شکل ۲۲) رسم شده است. مجموع درجه‌های رأس‌های گراف \bar{G} را مشخص کنید و همچنین درجات رئوس a و c در گراف \bar{G} را تعیین نمایید.

۱۴. یک گراف ۴ رأسی غیرتهی K - منتظم بکشید که:
الف) K بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.
ب) K کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۱۵. یک گراف ۵ رأسی غیرتهی K - منتظم بکشید که:
الف) K بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.
ب) K کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

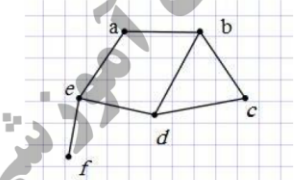


مجموع درجه‌ها = ۲ × تعداد لبه‌ها
درجات رئوس = مجموع درجه‌ها
گراف منتظم
گراف غیرتهی
گراف تهی

مشاهده نمونه سوالات نهایی :

باسمه تعالی

| | | | |
|---|--|---------------------------------|------------------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته | نام و نام خانوادگی : | ساعت شروع : ۸ صبح | تعداد صفحه: ۲ |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | رشته : ریاضی فیزیک | تاریخ امتحان : ۱۳۹۸/۳/۲۵ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۸ | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد | | |
| نمره | | | |

| | | |
|-----|---|--|
| ۱/۵ |  | <p>۶ شکل مقابل نمودار گراف G می باشد. الف) مرتبه و اندازه گراف G را بنویسید. ب) مجموعه $N_G(b)$ را بنویسید. ج) مجموع درجه های رأس های گراف \bar{G} را مشخص کنید.</p> |
|-----|---|--|

باسمه تعالی

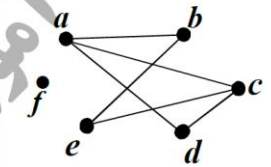
| | | | |
|---|--|----------------------------------|------------------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته | نام و نام خانوادگی : | ساعت شروع : ۸ صبح | رشته : ریاضی فیزیک |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه: ۲ | تاریخ امتحان : ۱۳۹۹/۰۴/۰۸ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۹ | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد | | |
| نمره | | | |

| | | |
|---|--|------|
| ۸ | در گراف G ، درجه رأس ۷ برابر با ۹ است و درجه رأس ۷ در گراف \bar{G} برابر با ۱۲ است. مرتبه گراف G را مشخص کنید. | ۰/۷۵ |
|---|--|------|



باسمه تعالی

| | | | |
|--|-----------------------|-------------------------|-----------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته | ساعت شروع: ۸ صبح | نام و نام خانوادگی: | رشته: ریاضی فیزیک |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه: ۲ | تاریخ امتحان: ۱۴۰۰/۰۳/۸ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۴۰۰ | | | |
| مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | | | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد | | |
| نمره | | | |

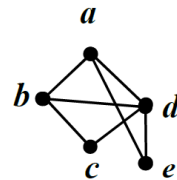
| | | |
|---|---|---|
| ۲ |  | <p>۷</p> <p>گراف G که به صورت مقابل است را در نظر بگیرید.</p> <p>الف) $N_G(c)$ را با اعضا مشخص کنید.</p> <p>ب) بزرگ‌ترین درجه در گراف \bar{G} مربوط به کدام رأس و چند است؟</p> <p>پ) دوری به طول ۵ برای رأس a بنویسید.</p> <p>ت) آیا گراف G همبند است؟</p> |
|---|---|---|



باسمه تعالی

| | | | |
|---|--------------------|--|-----------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته | رشته : ریاضی فیزیک | نام و نام خانوادگی : | ساعت شروع : ۸ صبح |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه: ۲ | تاریخ امتحان : ۱۴۰۱/۰۳/۲۸ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۴۰۱ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |

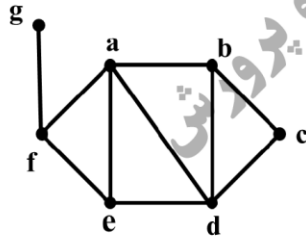
| ردیف | سؤالات پاسخ نامه دارد. (استفاده از ماشین حساب ساده، با چهار عمل اصلی، مجاز است.) | نمره |
|------|---|------|
| ۶ | <p>جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب پر کنید.</p> <p>الف) اگر درجه یک رأس فرد باشد، آن را رأس می نامیم.</p> <p>ب) گرافی را که تمام رئوس آن تنها باشد، هیچ یالی نداشته باشد، گراف می نامیم.</p> <p>پ) تعداد یال های گراف K_n ، برابر با است.</p> <p>ت) گراف G را می نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.</p> | ۱ |
| ۷ | <p>به سوالات زیر کوتاه پاسخ دهید.</p> <p>الف) گراف C_7 را رسم کنید. سپس یک مسیر به طول ۵ بنویسید.</p> <p>ب) در گراف شکل زیر، $N_G(c)$ را با اعضا مشخص کنید.</p> | ۱ |



باسمه تعالی

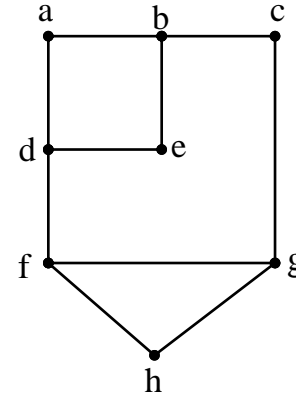
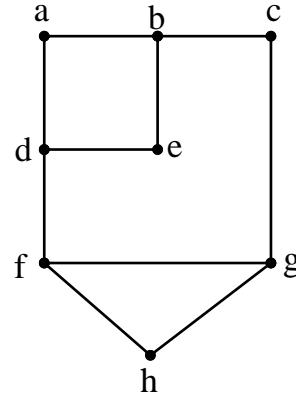
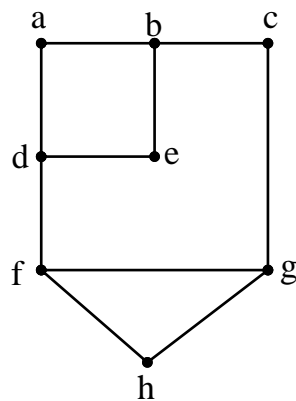
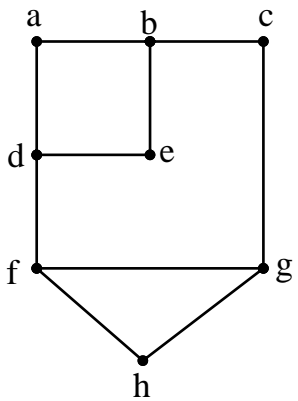
| | | | |
|---|--|---|------------------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته | ساعت شروع : ۸ صبح | نام و نام خانوادگی : | رشته : ریاضی فیزیک |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه: ۲ | تاریخ امتحان : ۱۴۰۲/۰۳/۲۱ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۴۰۲ | | مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش http://aee.medu.gov.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد. (استفاده از ماشین حساب ساده، یا چهار عمل اصلی، مجاز است.) | | |
| نمره | | | |

| | |
|---|---|
| ۷ | به گراف ۸ رأسی ۳-منتظم چند یال اضافه کنیم تا تبدیل به گراف کامل شود ؟ (با راه حل) |
| ۸ | گراف G به صورت زیر رسم شده است. با توجه به این گراف به سوالات زیر پاسخ دهید. الف) مجموعه $N_G(g)$ را بنویسید. ب) یک دور به طول ۵ با شروع از رأس a بنویسید. ج) درجه رأس c در گراف \bar{G} (مکمل گراف G) را مشخص کنید. |

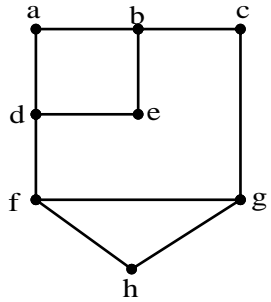


اپیزود ۱۲: احاطه گری

◀ مجموعه احاطه گر: زیرمجموعه D از مجموعه رئوس گراف G را احاطه گر گوئیم هرگاه هر رأس از گراف یا در D باشد یا حداقل با یکی از رئوس D مجاور باشد.

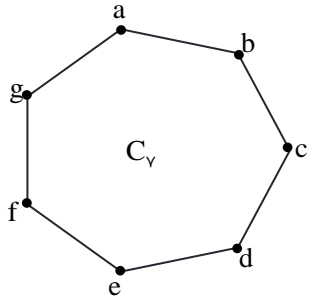


◀ مجموعه احاطه گر می نیمم : در بین تمام مجموعه های احاطه گر گراف G مجموعه یا مجموعه های احاطه گری که کمترین تعداد عضو را دارند، مجموعه احاطه گر می نیمم نامیده می شود.



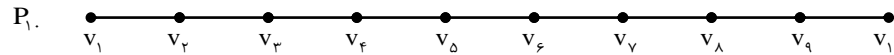
مجموعه احاطه گر می نیمم

◀ عدد احاطه‌گری : به تعداد اعضای مجموعه‌های احاطه‌گر می‌نیمم عدد احاطه‌گری گفته و با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.



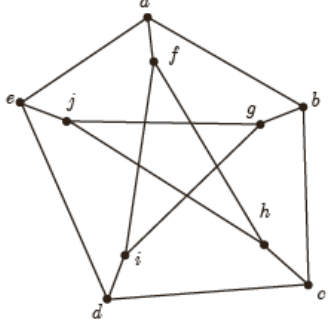
نکته : مجموعه‌های احاطه‌گر مینیموم را به اختصار γ -مجموعه نیز می‌نامیم.

γ -مجموعه = مجموعه احاطه‌گر می‌نیموم



تجربیات
مفاهیم
فرمولها
نقشه

◀ مجموعه احاطه گر مینیمال : یک مجموعه احاطه گر را مینیمال گوئیم هر گاه با حذف هر یک از رئوسش. دنگ احاطه گ نباشد.



نکته : (۱) هر مجموعه احاطه گر مینیمال لزوماً می نیمم نیست!
 (۲) هر مجموعه احاطه گر می نیمم حتماً مینیمال است.



مجموعه احاطه گر مینیمال

کار در کلاس

۱ مشخص کنید کدام یک از مجموعه‌های زیر برای گراف شکل ۵ احاطه‌گر

هست و کدام نیست؟

الف) $A = \{a, b, c, d, e\}$

ب) $B = \{f, g, h, i, j\}$

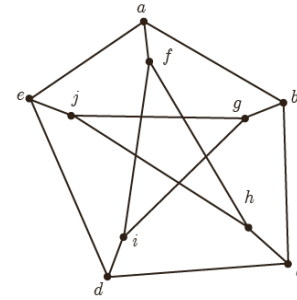
پ) $C = \{a, b, j, h, g\}$

ت) $D = \{a, i, h\}$

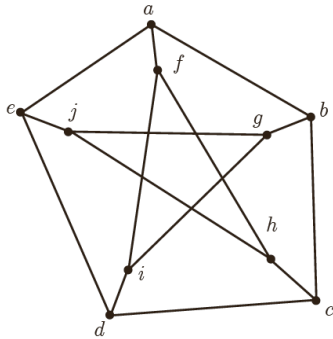
ث) $E = \{f, g, h, e, d\}$

ج) $F = \{f, g, h, e\}$

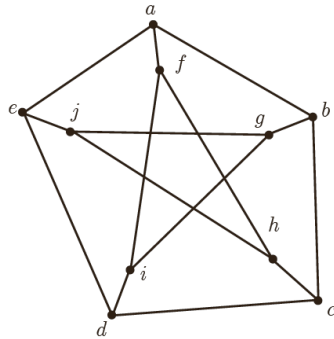
ح) $H = \{g, h, e\}$



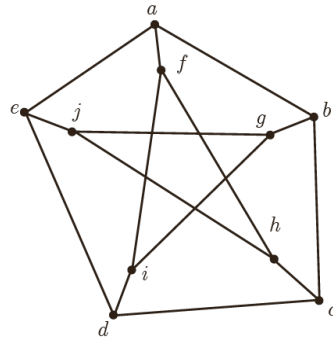
شکل ۵



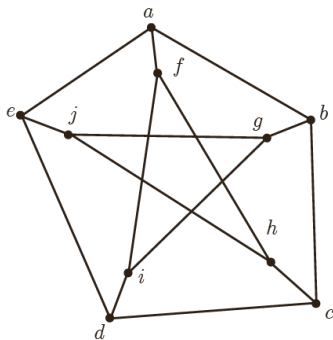
شکل ۵



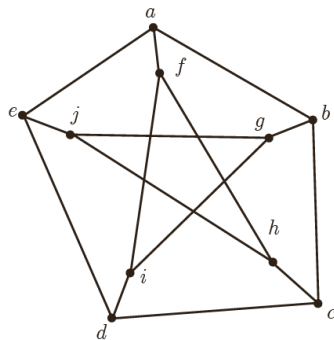
شکل ۵



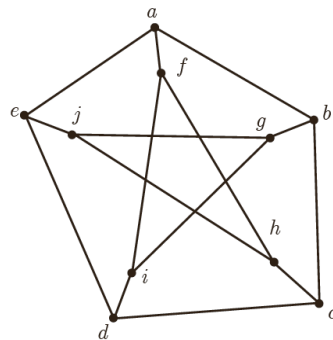
شکل ۵



شکل ۵



شکل ۵

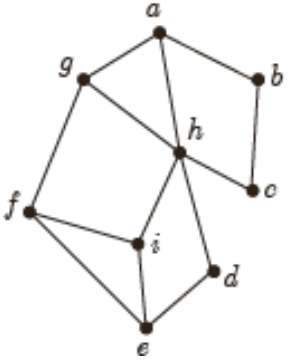


شکل ۵



مجموعه‌ها
گراف
احاطه‌گر

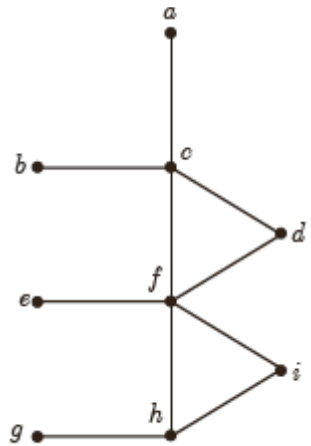
مثال : در گراف شکل روبرو یک مجموعهٔ احاطه گر غیرمینیمال ۶ عضوی پیدا کنید که با حذف برخی از رئوسش، به مجموعهٔ احاطه گر مینیمال تبدیل شود.



مجموعه احاطه گر مینیمال



مثال : الف) یک مجموعهٔ احاطه گر ۴ عضوی و یک مجموعهٔ احاطه گر ۳ عضوی بنویسید.



ب) یک مجموعهٔ احاطه گر مینیمال بنویسید.

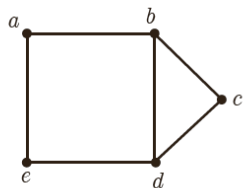
پ) یک مجموعهٔ احاطه گر می نیمم بنویسید.

ت) عدد احاطه گری چند است؟

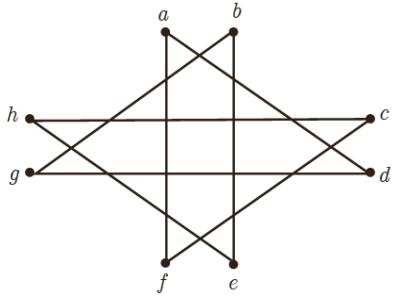


مجموعه احاطه گر مینیمال

مسأله : همه γ - مجموعه‌های گراف بالا را بنویسید.



مسأله : عدد احاطه‌گری گراف زیر را تعیین کنید.



الکاف
٢٠٢٠
٢٠٢١
٢٠٢٢
٢٠٢٣
٢٠٢٤
٢٠٢٥
٢٠٢٦
٢٠٢٧
٢٠٢٨
٢٠٢٩
٢٠٣٠
٢٠٣١
٢٠٣٢
٢٠٣٣
٢٠٣٤
٢٠٣٥
٢٠٣٦
٢٠٣٧
٢٠٣٨
٢٠٣٩
٢٠٤٠
٢٠٤١
٢٠٤٢
٢٠٤٣
٢٠٤٤
٢٠٤٥
٢٠٤٦
٢٠٤٧
٢٠٤٨
٢٠٤٩
٢٠٥٠
٢٠٥١
٢٠٥٢
٢٠٥٣
٢٠٥٤
٢٠٥٥
٢٠٥٦
٢٠٥٧
٢٠٥٨
٢٠٥٩
٢٠٦٠
٢٠٦١
٢٠٦٢
٢٠٦٣
٢٠٦٤
٢٠٦٥
٢٠٦٦
٢٠٦٧
٢٠٦٨
٢٠٦٩
٢٠٧٠
٢٠٧١
٢٠٧٢
٢٠٧٣
٢٠٧٤
٢٠٧٥
٢٠٧٦
٢٠٧٧
٢٠٧٨
٢٠٧٩
٢٠٨٠
٢٠٨١
٢٠٨٢
٢٠٨٣
٢٠٨٤
٢٠٨٥
٢٠٨٦
٢٠٨٧
٢٠٨٨
٢٠٨٩
٢٠٩٠
٢٠٩١
٢٠٩٢
٢٠٩٣
٢٠٩٤
٢٠٩٥
٢٠٩٦
٢٠٩٧
٢٠٩٨
٢٠٩٩
٢١٠٠

◀ کران پایین عدد احاطه‌گری: در گراف G با n رأس و درجه ماکزیمم Δ یک کران پایین برای γ برابر است با

$$\gamma \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \text{ یعنی } \left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor$$



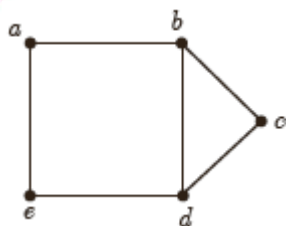
الماتریة
رابطہ
۲۰۲۰

کاربرد : برای بدست آوردن γ در هر گراف، ابتدا کران پایین γ را حساب کرده سپس بررسی می‌کنیم آیا مجموعه‌ای با آن تعداد عضو احاطه‌گر است یا خیر؟ اگر بود که γ پیدا شده اگر نبود اعداد بزرگتر را چک می‌کنیم تا به γ برسیم.



مجموعه‌های
احاطه‌گر
تعداد اعضا
احاطه‌گر

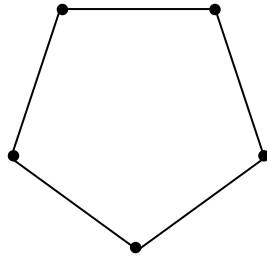
مسأله : عدد احاطه گری شکل مقابل را تعیین و ادعای خود را ثابت کنید:



نکته : در گراف‌های P_n, C_n عدد احاطه‌گری با کران پایین برابر است:

$$C_{\gamma^{\Delta}} = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$$

P_5



مسأله : گرافی رسم کنید که عدد احاطه‌گری آن با کران پایین برابر نباشد :

$$\gamma \neq \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil$$

$$\left. \begin{array}{l} q_{\min} = p - 1 \\ \text{یک رأس به همهٔ رئوس دیگر متصل باشد : } q_{\min} \\ \Delta = p - 1 \text{ (ستاره‌ای)} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{نکته : } \gamma = 1$$

$$q_{\max} : \text{گراف کامل} \quad q_{\min} = \frac{p(p-1)}{2}$$



المبرهنه
 (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10) (11) (12) (13) (14) (15) (16) (17) (18) (19) (20) (21) (22) (23) (24) (25) (26) (27) (28) (29) (30) (31) (32) (33) (34) (35) (36) (37) (38) (39) (40) (41) (42) (43) (44) (45) (46) (47) (48) (49) (50) (51) (52) (53) (54) (55) (56) (57) (58) (59) (60) (61) (62) (63) (64) (65) (66) (67) (68) (69) (70) (71) (72) (73) (74) (75) (76) (77) (78) (79) (80) (81) (82) (83) (84) (85) (86) (87) (88) (89) (90) (91) (92) (93) (94) (95) (96) (97) (98) (99) (100)

مثال : گرافی ۶ رأس رسم کنیم که $\gamma = 2$ باشد.

پاسخ :

مثال : گرافی ۱۲ رأسی رسم کنید که در آن $\gamma = 3$ باشد.

پاسخ :

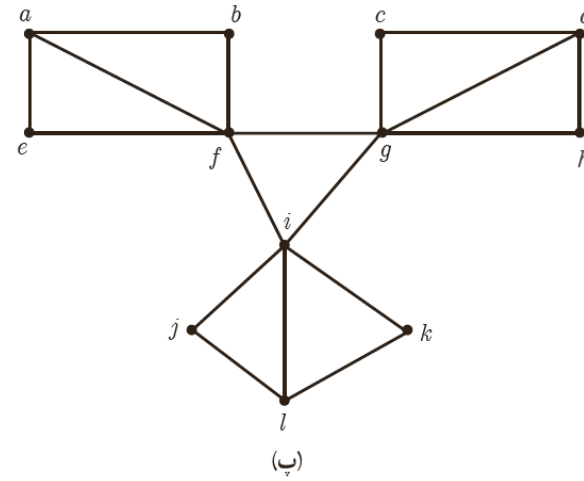
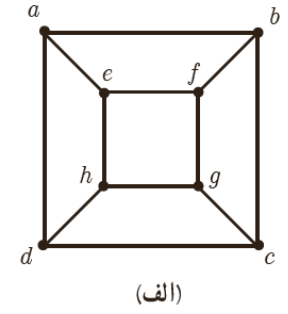
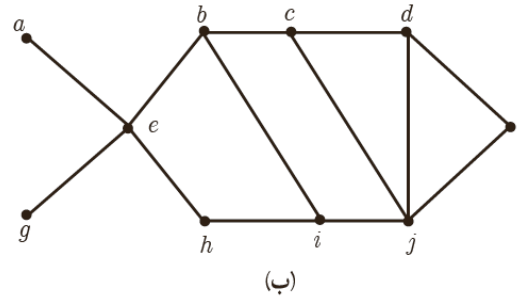
مثال : گرافی ۲۰ رأسی رسم کنید که در آن $\gamma = 7$ باشد.

پاسخ :



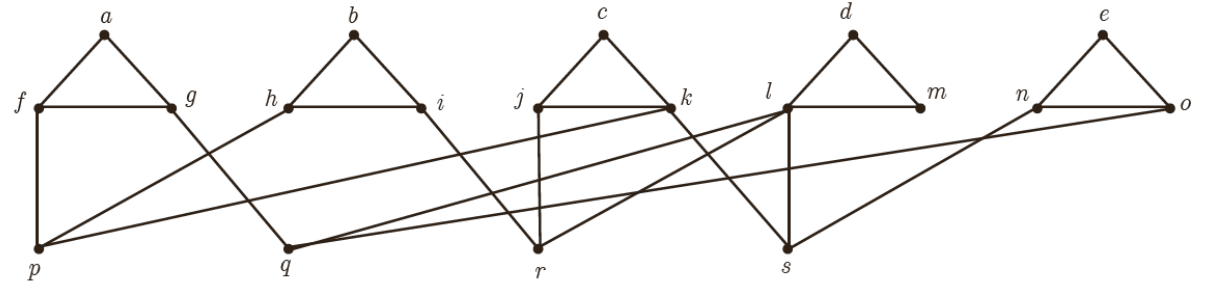
۳ عدد احاطه‌گری را برای هر یک از گراف‌های زیر مشخص نمایید.

شکل ۱۵

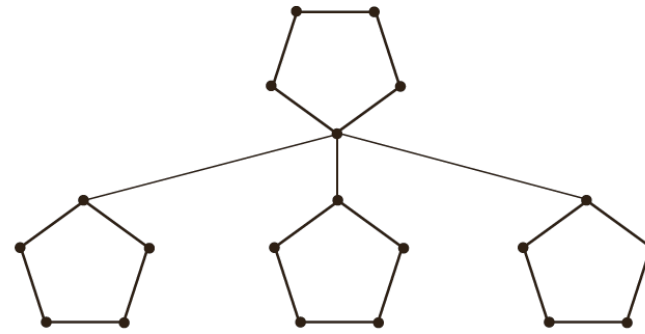


تجربیات
مفید
آموزشی
و
تربیتی

ویژه امتحان نهایی



(ت)



(ث)



مجموعه سوالات
فصل اول
هندسه
کتابخانه

۷ یک گراف ۲- منتظم ۱۲ رأسی بکشید که عدد احاطه‌گری آن کمترین مقدار ممکن باشد.



الکلیات
الهندسة
الرياضيات
الفيزياء
الكيمياء
البيولوجيا
العلوم
الاجتماعية
الإنسانيات

ویژه امتحان نهایی

۸ الف) یک گراف ۶ رأسی که ۷- مجموعه آن با اندازه یک باشد رسم کنید.

ب) یک گراف ۶ رأسی که ۷- مجموعه آن با اندازه دو باشد رسم کنید.

پ) فرض کنید n و k دو عدد طبیعی باشند و $k \leq \frac{n}{4}$. روشی برای رسم یک گراف n رأسی که عدد احاطه گری آن k باشد، ارائه دهید.



مجموعه
گراف
رأسی
کاملاً
متصل
است
یعنی
هر
دو
رأس
با
هم
متصل
است
مجموعه
کامل
است
یعنی
هر
دو
رأس
با
هم
متصل
است

- ۹ الف) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعهٔ احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.
- ب) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعهٔ احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد.



مجموعه
احاطه‌گر
یکتا
اندازه
۲

ویژه امتحان نهایی

۱۱ گراف P_{12} را رسم کنید.

الف) یک γ - مجموعه از آن را مشخص نمایید.

ب) یک مجموعه احاطه گر مینیمال ϵ عضوی از آن را مشخص نمایید.



مشاهده نمونه سوال نهایی :

باسمه تعالی

| | | | |
|---|---|--|-----------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته | نام و نام خانوادگی : | ساعت شروع : ۸ صبح | تعداد صفحه: ۲ |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | رشته : ریاضی فیزیک | تاریخ امتحان : ۱۳۹۸/۳/۲۵ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۸ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد | | |
| نمره | | | |
| ۷ | <p>گراف C_7 را در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید.</p> <p>الف) یک مجموعه احاطه گر ۴ عضوی بنویسید.</p> <p>ب) عدد احاطه گری C_7 را به دست آورید.</p> <p>ج) دو مجموعه احاطه گر مینیمم متمایز بنویسید.</p> | | |
| ۱/۵ | <p>الف) ثابت کنید هر مجموعه احاطه گر دلخواه غیر مینیمال را میتوان با حذف برخی از رئوسش به یک مجموعه احاطه گر مینیمال تبدیل کرد؟</p> <p>ب) در گراف روبرو یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۵ عضوی را مشخص کنید.</p> | | |
| ۱/۵ | | | |
| ۹ | <p>الف) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.</p> <p>ب) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه گر با اندازه ۲ داشته باشد.</p> | | |
| ۱ | | | |



باسمه تعالی

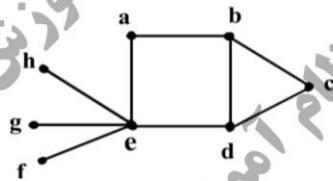
| | | | |
|---|--|--------------------------|-----------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته | ساعت شروع: ۸ صبح | نام و نام خانوادگی: | رشته: ریاضی فیزیک |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه: ۲ | تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۰۳/۲۱ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۴۰۲ | | | |
| مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش http://aee.medu.gov.ir | | | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد. (استفاده از ماشین حساب ساده، با چهار عمل اصلی، مجاز است.) | | |
| نمره | | | |

| | | |
|---|--|-----|
| ۹ | <p>گراف زیر را در نظر بگیرید.</p> <p>(الف) یک مجموعه احاطه گر غیر مینیمال با ۴ عضو بنویسید.</p> <p>(ب) یک مجموعه احاطه گر مینیمال با ۴ عضو بنویسید.</p> <p>(ج) با اضافه کردن چه یالی به گراف، عدد احاطه گری گراف ۲ خواهد شد؟</p> | ۱/۵ |
| | | |



مجموعه آموزشی تخصصی

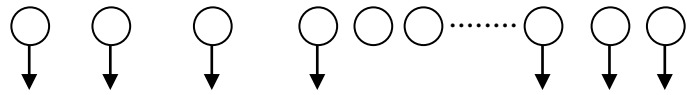
| | | |
|------|---|----|
| ۱ | <p>الف) یک گراف ۸ رأسی (همبند یا ناهمبند) با عدد احاطه‌گری ۳ رسم کنید که <u>یک</u> مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۳ داشته باشد.</p> <p>ب) یک گراف ۸ رأسی (همبند یا ناهمبند) با عدد احاطه‌گری ۳ رسم کنید که <u>بیش از یک</u> مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۳ داشته باشد.</p> | ۱۰ |
| ۱/۷۵ | <p>الف) عدد احاطه‌گری گراف مقابل را با ارائه راه حل، تعیین کنید.</p> <p>ب) این گراف چند γ-مجموعه دارد؟</p> | ۱۱ |



سیستم کیفیت نظام آموزشی و پرورشی
 جتیبها (۶)

اپیزود ۱۳ : جایگشت های دسته بندی و تکراری

۱- جایگشت : تعداد حالت های کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز با ترتیب و بدون تکرار



$$(n) (n-1) (n-2) (n-3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\text{قرارداد : } 0! = 1 \quad 1! = 1 \quad 2! = 2 \quad 3! = 6$$

$$4! = 24 \quad 5! = 120 \quad 6! = 720$$



تجربیات

نکته : تعداد حالت‌های یک در میان قرار گرفتن m شیء از نوع A و n شیء از نوع B :

$$\begin{cases} 2m!n! & m = n \\ m!n! & |m - n| = 1 \\ \cdot & m \neq n, |m - n| \neq 1 \end{cases}$$



۲- جایگشت تکراری : تعداد حالت‌های کنار هم قرار گرفتن n شیء بطوریکه در میان آنها r_1 شیء یکسان و r_2 شیء یکسان و r_3 شیء یکسان و ... و r_k شیء یکسان (تکراری) وجود دارد :

$$\frac{n!}{r_1! \times r_2! \times r_3! \times \dots \times r_k!}$$

$$\frac{n!}{(r_1!) \dots (r_k!)}$$



مثال : با ارقام ۱, ۱, ۱, ۱, ۲, ۲, ۳, ۳, ۳ چند عدد ۹ رقمی می توان ساخت؟



تجربیات
معماری
مهندسی
فلسفه
تاریخ
ادبیات
زبان
ریاضیات
فیزیک
شیمی
بیولوژی
علوم

مثال : با ارقام ۰,۰,۰,۳,۳,۳,۳ چند عدد ۷ رقمی می توان ساخت؟



مثال : با ارقام ۵,۵,۵,۵,۰,۰,۰,۰ چند عدد ۸ رقمی زوج می توان ساخت؟



مجموعه
سازمان
آموزش
و تربیت
مندی
جمهوری
اسلامی
ایران

مثال : به چند طریق می توان ۹ نفر را در سه اتاق دونفره ، سه نفره و چهارنفره جای داد؟



تستیها
۱۰۰
۲
۳
۴
۵
۶
۷
۸
۹
۱۰
۱۱
۱۲
۱۳
۱۴
۱۵
۱۶
۱۷
۱۸
۱۹
۲۰
۲۱
۲۲
۲۳
۲۴
۲۵
۲۶
۲۷
۲۸
۲۹
۳۰
۳۱
۳۲
۳۳
۳۴
۳۵
۳۶
۳۷
۳۸
۳۹
۴۰
۴۱
۴۲
۴۳
۴۴
۴۵
۴۶
۴۷
۴۸
۴۹
۵۰

مثال : به چند طریق می توان ۹ نفر را در ۴ اتاق یک تخته و یک اتاق دو تخته و یک اتاق سه تخته جای داد؟



تجربیات
معماری
مهندسی
فلسفه
ریاضیات
فیزیک
شیمی
زیست‌شناسی
تاریخ
ادبیات
هنر
موسیقی
ورزش

مشاهده نمونه سوالات نهایی :

باسمه تعالی

| | | | |
|---|--|--|-----------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته | نام و نام خانوادگی : | ساعت شروع : ۸ صبح | تعداد صفحه: ۲ |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | رشته : ریاضی فیزیک | تاریخ امتحان : ۱۳۹۸/۳/۲۵ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۸ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد | | |
| نمره | | | |
| ۱۰ | با ارقام ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹ چند عدد ۹ رقمی می توان نوشت. | | |
| ۱۱ | ۶ دانش آموز پایه دوازدهم و ۵ دانش آموز پایه یازدهم به چند طریق می توانند کنار هم در یک ردیف قرار گیرند ، به طوری که : الف) به صورت یک در میان قرار بگیرند. ب) همواره دانش آموزان یازدهم کنار هم باشند. ج) یک دانش آموز خاص یازدهم و یک دانش آموز خاص دوازدهم در کنار هم باشند. | | |
| ۱/۵ | | | |



المان
 ۲
 DNA
 (۱/۱)
 (۲/۱)
 (۳/۱)
 (۴/۱)
 (۵/۱)
 (۶/۱)
 (۷/۱)
 (۸/۱)
 (۹/۱)
 (۱۰/۱)
 (۱۱/۱)
 (۱۲/۱)
 (۱۳/۱)
 (۱۴/۱)
 (۱۵/۱)
 (۱۶/۱)
 (۱۷/۱)
 (۱۸/۱)
 (۱۹/۱)
 (۲۰/۱)
 (۲۱/۱)
 (۲۲/۱)
 (۲۳/۱)
 (۲۴/۱)
 (۲۵/۱)
 (۲۶/۱)
 (۲۷/۱)
 (۲۸/۱)
 (۲۹/۱)
 (۳۰/۱)
 (۳۱/۱)
 (۳۲/۱)
 (۳۳/۱)
 (۳۴/۱)
 (۳۵/۱)
 (۳۶/۱)
 (۳۷/۱)
 (۳۸/۱)
 (۳۹/۱)
 (۴۰/۱)
 (۴۱/۱)
 (۴۲/۱)
 (۴۳/۱)
 (۴۴/۱)
 (۴۵/۱)
 (۴۶/۱)
 (۴۷/۱)
 (۴۸/۱)
 (۴۹/۱)
 (۵۰/۱)

باسمه تعالی

| | | | |
|--|--------------------------|--|------------------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته | رشته: ریاضی فیزیک | نام و نام خانوادگی: | ساعت شروع: ۸ صبح |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه: ۲ | تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۰۳/۲۸ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۴۰۱ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |

| ردیف | سؤالات پاسخ نامه دارد. (استفاده از ماشین حساب ساده، با چهار عمل اصلی، مجاز است.) | نمره |
|------|---|------|
| ۱۲ | ۶ کتاب متفاوت تاریخ و ۵ کتاب متفاوت ادبیات را به چند طریق می توان در یک ردیف کنار هم چید به طوری که: الف) کتاب های تاریخ همواره کنار هم باشند. ب) به صورت یک در میان قرار بگیرند. | ۱ |
| ۱۳ | با ارقام ۱،۱،۱،۳،۳،۵،۶،۷،۹ چند عدد ۹ رقمی می توان نوشت؟ | ۱ |



مجموعه الگوریتم

اپیزود ۱۴ : ترکیبات تکراری و تعداد جوابهای معادلات سیاله با ضرایب واحد

حالت اول :

* تعداد جایگشت‌های تکراری n شیء از میان k نوع شیء بطوریکه لازم نباشد از همه انواع شیء‌ها در جایگشت استفاده شود (به دلخواه برداشته شود).

* تعداد راه‌های توزیع n شیء یکسان بین k نفر بطوریکه لازم نباشد به همه افراد از آن اشیا برسد (به دلخواه توزیع شود).

* تعداد جواب‌های معادله سیاله $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = n$ در مجموعه اعداد صحیح و نامنفی (اعداد حسابی) :

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$



مثال : به چند طریق می توان از میان ۳ نوع گل میخک، گلایل و رز ، یک دسته گل ۶ شاخه ای ساخت؟



تجربیات
معماری
مهندسی
فلسفه
ریاضیات
فیزیک
شیمی
زیست‌شناسی
تاریخ
ادبیات
هنر
موسیقی
ورزش

مثال : به چند طریق می توان ۵ توپ یکسان را بین ۳ نفر به دلخواه توزیع کرد؟



مثال : تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ را به دست آورید.



حالت دوم :

* تعداد جایگشت‌های تکراری n شیء از میان k نوع شیء بطوریکه از هر نوع حداقل یکی استفاده شود.

* تعداد راه‌های توزیع n شیء یکسان بین k نفر بطوریکه به هر نفر حداقل یکی برسد.

* تعداد جواب‌های معادله $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = n$ در مجموعه اعداد صحیح و مثبت (اعداد طبیعی) :

$$\binom{n-1}{k-1}$$



مثال : به چند طریق می توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد هر گاه بخواهیم به هر نفر حداقل یک توپ برسد؟



مجموعه
سازمان
آموزش
و پرورش
انسان
کتابخانه
مجموعه
کتابها
و اسناد
مکتوبه
مجموعه
کتابها
و اسناد
مکتوبه

مثال : معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ در مجموعه اعداد صحیح و مثبت چند جواب دارد؟



حالت سوم :

* تعداد جایگشت‌های تکراری n شیء از میان k نوع شیء بطوریکه در جایگشت از نوع اول حداقل r_1 شیء و از نوع دوم حداقل r_2 شیء و از نوع سوم حداقل r_3 شیء و ... و از نوع k ام حداقل r_k شیء استفاده شود.

* تعداد راه‌های توزیع n شیء یکسان میان k نفر بطوریکه به نفر اول حداقل r_1 شیء و به نفر دوم حداقل r_2 شیء و به نفر سوم حداقل r_3 شیء و ... و به نفر k ام حداقل r_k شیء برسد.

* تعداد جواب‌های معادله $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = n$ بطوریکه $x_1 \geq r_1$ و $x_2 \geq r_2$ و $x_3 \geq r_3$ و ... و $x_k \geq r_k$ باشد :

$$\binom{n + k - 1 - (r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_k)}{k - 1}$$



تجربیات

مثال : به چند طریق می توان از میان ۵ نوع گل ۱۱ شاخه انتخاب کرد اگر بخواهیم ؛
الف) به دلخواه انتخاب کنیم.

ب) از گل نوع دوم حداقل دو شاخه و از گل نوع پنجم بیش از سه شاخه انتخاب کنیم.

پ) از گل نوع سوم انتخاب نکرده و از گل نوع چهارم حداقل ۵ شاخه انتخاب کنیم.



مثال : معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14$ چند جواب صحیح و نامنفی با شرط $x_1 > 1$ و $x_3 > 3$ دارد؟



الماتریه
۱۰۰
۲
۳
۴
۵
۶
۷
۸
۹
۱۰
۱۱
۱۲
۱۳
۱۴
۱۵
۱۶
۱۷
۱۸
۱۹
۲۰
۲۱
۲۲
۲۳
۲۴
۲۵
۲۶
۲۷
۲۸
۲۹
۳۰
۳۱
۳۲
۳۳
۳۴
۳۵
۳۶
۳۷
۳۸
۳۹
۴۰
۴۱
۴۲
۴۳
۴۴
۴۵
۴۶
۴۷
۴۸
۴۹
۵۰

نکات :

۱) در محاسبه تعداد جواب‌های معادله سیاله $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = n$ با شرط، در مجموعه اعداد طبیعی اگر برخی متغیرها شرط نداشته باشند باید حتماً خودمان شرط $x_i \geq 1$ را برای آنها در نظر بگیریم.



تجربیات
معمولاً
در
مسئله
های
تعداد
جواب
های
معادله
سیاله
با
شرط
در
مجموعه
اعداد
طبیعی
اگر
برخی
متغیرها
شرط
نداشته
باشند
باید
حتماً
خودمان
شرط
را
برای
آنها
در
نظر
بگیریم.

مثال : معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12$ چند جواب صحیح و مثبت با شرط $x_3 = 4$ و $x_5 > 2$ دارد؟



ویژه امتحان نهایی

(۲) در معادلهٔ سیاله $X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_k = n$ تمام متغیرها از درجه ۱ (توان ۱) هستند و ضریب ۱ دارند. اگر در معادله‌ای یک یا چند متغیر (نهایتاً ۲ تا) از درجه ۱ نبود یا ضریب بیش از ۱ داشت ابتدا بایستی بجای آن متغیر اعداد مناسب قرار داده و تعداد جواب‌های هر حالت را به دست آورده و در نهایت با هم جمع کنیم.



تجربیات
معمولاً
در
این
موضوع
بسیار
مهم
است

مثال : معادله $x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟



مشاهده نمونه سوال نهایی :

باسمه تعالی

| | | | |
|---|---|---------------------------------|------------------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته | نام و نام خانوادگی : | ساعت شروع: ۸ صبح | تعداد صفحه: ۲ |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | رشته : ریاضی فیزیک | تاریخ امتحان : ۱۳۹۸/۳/۲۵ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۸ | | | |
| مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | | | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد | | |
| نمره | | | |
| ۱۲ | تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 10$ با شرط $x_i > 0, i = 2, 3, 4, 5$ را محاسبه کنید. | | |
| ۱ | | | |

باسمه تعالی

| | | | |
|--|---|----------------------------------|------------------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته | نام و نام خانوادگی : | ساعت شروع: ۸ صبح | رشته : ریاضی فیزیک |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه: ۲ | تاریخ امتحان : ۱۳۹۹/۰۴/۰۸ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۹ | | | |
| مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | | | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد | | |
| نمره | | | |
| ۱۲ | به چند طریق می توان از بین ۵ نوع گل، ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد، اگر بخواهیم، از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع پنجم بیش از ۳ شاخه انتخاب کنیم. | | |
| ۱/۲۵ | | | |



باسمه تعالی

| | | | |
|--|--|--|------------------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته | رشته : ریاضی فیزیک | نام و نام خانوادگی : | ساعت شروع : ۸ صبح |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه: ۲ | تاریخ امتحان : ۱۴۰۱/۰۳/۲۸ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۴۰۱ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد. (استفاده از ماشین حساب ساده، با چهار عمل اصلی، مجاز است.) | | |
| نمره | | | |

| | | |
|----|--|-----|
| ۱۴ | معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن که $x_3 = 4$ و $x_5 > 2$ باشد؟ | ۱/۵ |
|----|--|-----|

باسمه تعالی

| | | | |
|--|--|---|------------------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته | رشته : ریاضی فیزیک | نام و نام خانوادگی : | ساعت شروع : ۸ صبح |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه: ۲ | تاریخ امتحان : ۱۴۰۲/۰۳/۲۱ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۴۰۲ | | مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش http://aee.medu.gov.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد. (استفاده از ماشین حساب ساده، با چهار عمل اصلی، مجاز است.) | | |
| نمره | | | |
| ۱۳ | معادله $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4^3 = 10$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟ | ۱/۷۵ | |



اپیزود ۱۵ : مربع لاتین

◀ **مربع لاتین** : یک جدول مربعی شامل اعداد $1, 2, 3, \dots, n$ به شکل مربع $n \times n$ که سطرها و ستونها با این اعداد پر شده باشد بطوریکه در هر سطر و ستون همه اعداد 1 تا n موجود بوده و هیچ عدد تکراری در هیچ سطر یا هیچ ستونی موجود نباشد.

| |
|---|
| ۱ |
|---|

 1×1 ۱ مربع 1×1

| | |
|---|---|
| ۱ | ۲ |
| ۲ | ۱ |

 2×2

| | |
|---|---|
| ۲ | ۱ |
| ۱ | ۲ |

 2×2 ۲ مربع 2×2

| | | |
|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ |
| ۳ | ۱ | ۲ |
| ۲ | ۳ | ۱ |

 3×3

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳ | ۴ | ۱ | ۲ |
| ۲ | ۳ | ۲ | ۱ |
| ۴ | ۱ | ۴ | ۳ |

 4×4 

مثال: سه استاد به نام‌های پورحسینی، ابراهیمی و جهانبخش قصد دارند در یک روز در سه زنگ اول، دوم و سوم در سه کلاس A، B و C تدریس کنند بطوریکه هر کلاس سه جلسه درسی داشته و هر مدرس در هر یک از کلاس‌ها دقیقاً یک بار تدریس کند. برای این کار برنامه‌ریزی کنید.



◀ مربع لاتین چرخشی : سطر اول را به ترتیب ۱ تا n می‌نویسیم. از سطر دوم به بعد درایه‌ها را به ترتیب یک واحد یک واحد جلو می‌بریم و درایه‌های انتهایی که از مربع خارج می‌شوند را در خانه‌های خالی ابتدایی می‌نویسیم.

| | | |
|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ |
| ۳ | ۱ | ۲ |
| ۲ | ۳ | ۱ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۴ | ۱ | ۲ | ۳ |
| ۳ | ۴ | ۱ | ۲ |
| ۲ | ۳ | ۴ | ۱ |



ویژه امتحان نهایی

مثال: یک مربع لاتین 5×5 بنویسید.



الماتریس
المربع
المثلث
الدائرة
المستطيل
المثل
المربع
المثلث
الدائرة
المستطيل

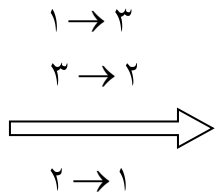
عملیات‌هایی که با اجرای آنها ماهیت مربع لاتین تغییری نمی‌کند :
با انجام یکی از سه عملیات زیر، مربع جدید باز هم مربع لاتین خواهد بود :

(۱) تعویض دو سطر دلخواه

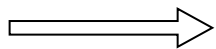
(۲) تعویض دو ستون دلخواه

(۳) اعمال جایگشت روی درایه‌ها

| | | |
|---|---|---|
| ۱ | ۳ | ۲ |
| ۲ | ۱ | ۳ |
| ۳ | ۲ | ۱ |



| | | | |
|---|---|---|---|
| ۲ | ۱ | ۴ | ۳ |
| ۴ | ۳ | ۲ | ۱ |
| ۳ | ۴ | ۱ | ۲ |
| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |



الماتریکس
 (۱) (۲) (۳)
 الماتریکس

◀ دو مربع لاتین متعامد: فرض کنید A و B دو مربع لاتین باشند بطوریکه از کنار هم قرار دادن درایه‌های نظیر به نظیر از این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود که هر درایه آن یک عدد دورقمی است (رقم اول متعلق به مربع A «یا برعکس» و رقم دوم متعلق به مربع B «یا برعکس») حال دو مربع A و B متعامدند اگر و فقط اگر هیچیک از اعداد دورقمی تکراری نباشند.

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline ۲ & ۳ & ۴ & ۱ \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ & ۴ \\ \hline ۴ & ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۱ & ۴ & ۳ & ۲ \\ \hline \end{array} \quad B = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline ۱ & ۴ & ۳ & ۲ \\ \hline ۲ & ۳ & ۱ & ۴ \\ \hline ۳ & ۲ & ۴ & ۱ \\ \hline ۴ & ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline \end{array} \Rightarrow$$

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline \end{array} \quad B = \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline \end{array} \Rightarrow$$



روش تشخیص : یک محک برای تشخیص متعامد بودن دو مربع لاتین بدین صورت است که برای متعامد بودن باید هر دو درایه "یکسان" از مربع اول، درایه‌های متناظر "متمایز" در مربع دوم داشته باشد. این روش در حقیقت برای پیدا کردن مثال نقض بسیار مناسب است یعنی دو درایه یکسان از مربع اول در نظر بگیریم و ببینیم درایه‌های متناظر آنها نیز در مربع دوم یکسانند که در این صورت دو مربع متعامد نیستند.

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline ۱ & ۳ & ۲ \\ \hline ۲ & ۱ & ۳ \\ \hline \end{array}$$

$$B = \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۲ & ۱ & ۳ \\ \hline ۱ & ۳ & ۲ \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline \end{array}$$

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ \hline ۴ & ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \\ \hline ۲ & ۳ & ۴ & ۱ \\ \hline \end{array}$$

$$B = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline ۳ & ۲ & ۱ & ۴ \\ \hline ۱ & ۴ & ۳ & ۲ \\ \hline ۴ & ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۲ & ۳ & ۴ & ۱ \\ \hline \end{array}$$


تجربیات کاربردی

نکات :

۱- مربع لاتین حاصل از اعمال جایگشت روی اعضای یک مربع لاتین دلخواه قطعاً با مربع اولیه متعامد نخواهد بود.

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline \end{array}$$

۲- مربع لاتینی که از تعویض جای دو سطر یا دو ستون یک مربع لاتین دلخواه به وجود می‌آید لزوماً با مربع اولیه متعامد نیست (ممکن است متعامد باشد یا نباشد).



◀ کاربرد دو مربع لاتین متعامد : برنامه‌ریزی برای انجام عملیات‌هایی که ۴ پارامتر در آنها دخالت داشته و ارتباط پارامترها با هم بایستی منحصر به فرد باشد.



المعادن
الهندسة
الرياضيات
الفيزياء
الكيمياء
البيولوجيا
الطب
العلوم
التكنولوجيا
البيئة
الاجتماع
السياسة
الاقتصاد
السياسة
العلوم
التكنولوجيا
البيئة
الاجتماع
السياسة
الاقتصاد

مثال: قرار است ۵ کارگر با ۵ نوع ماشین نخریسی و ۵ نوع الیاف در ۵ روز هفته کار کنند بطوریکه هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یکبار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یکبار به کار گرفته شده باشد.



مثال: اگر سه برادر هم‌سن در خانه سه کُت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباس‌ها بطوری استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت‌ها را و هر یک از پیراهن‌ها را دقیقاً یکبار پوشیده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یکبار مورد استفاده قرار گرفته باشد، چگونه می‌توانند این کار را انجام دهند؟



مجموعه
تجربیات
موسسه
توسعه
موسسه
توسعه
موسسه
توسعه

مشاهده نمونه سوال نهایی :

باسمه تعالی

| | | | |
|---|--|--|------------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته | نام و نام خانوادگی : | ساعت شروع : ۸ صبح | تعداد صفحه : ۲ |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | رشته : ریاضی فیزیک | تاریخ امتحان : ۱۳۹۸/۳/۲۵ | مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۸ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد | | |
| نمره | | | |
| ۱۳ | اگر سه دوست هم سایز، سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباسها به گونه ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت ها و هریک از پیراهن ها را دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و حرکت با هر پیراهن نیز دقیقاً یکبار مورد استفاده قرار بگیرد، چگونه می توانند این کار را انجام دهند؟ | | |
| ۱/۵ | | | |



| | | | |
|---|--|--|-----------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته | ساعت شروع: ۸ صبح | نام و نام خانوادگی: | رشته: ریاضی فیزیک |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه: ۲ | تاریخ امتحان: ۱۴۰۰/۰۳/۸ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۴۰۰ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد | | |
| ۱۴ | مربع لاتین A را در نظر بگیرید. ابتدا سطر اول و سطر دوم مربع A را جابه‌جا کنید. سپس در مربع حاصل ستون دوم و سوم را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را B نام‌گذاری کنید. متعامد بودن دو مربع لاتین A و B را بررسی کنید. | | |
| | $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ | | |



المانهای هندسی
 مثلثات
 جبر
 حسابان
 آمار و احتمال
 فیزیک
 شیمی
 زیست‌شناسی

باسمه تعالی

| | | | |
|--|---------------------|--|-----------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته | نام و نام خانوادگی: | ساعت شروع: ۸ صبح | رشته: ریاضی فیزیک |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه: ۲ | تاریخ امتحان: ۱۳۹۹/۰۴/۰۸ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۹ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |

| | | |
|------|-----------------------|------|
| ردیف | سؤالات پاسخ نامه دارد | نمره |
|------|-----------------------|------|

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱۳ | مربع لاتین مقابل را در نظر بگیرید و با اعمال یک جایگشت بر روی ۱، ۲، ۳، ۴ یک مربع لاتین جدید به دست آورید. | <table border="1"> <tr><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> </table> | ۳ | ۴ | ۱ | ۲ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۲ | ۱ | ۴ | ۳ | ۴ | ۳ | ۲ | ۱ | | | | | | | | | | | |
| ۳ | ۴ | ۱ | ۲ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ۲ | ۱ | ۴ | ۳ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ۴ | ۳ | ۲ | ۱ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ۱۴ | در هر مورد متعامد بودن دو مربع لاتین داده شده را بررسی کنید. | <table border="1"> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> </table> (الف) <table border="1"> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> </table> (ب) <table border="1"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> </table> | ۳ | ۲ | ۱ | ۱ | ۳ | ۲ | ۲ | ۱ | ۳ | ۲ | ۱ | ۳ | ۱ | ۳ | ۲ | ۳ | ۲ | ۱ | ۱ | ۲ | ۳ | ۳ | ۱ | ۲ | ۲ | ۳ | ۱ |
| ۳ | ۲ | ۱ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ۱ | ۳ | ۲ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ۲ | ۱ | ۳ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ۲ | ۱ | ۳ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ۱ | ۳ | ۲ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ۳ | ۲ | ۱ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ۱ | ۲ | ۳ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ۳ | ۱ | ۲ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ۲ | ۳ | ۱ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ۲۲ | قرار است سه کارگر W_1, W_2, W_3 در سه روز متوالی با سه ماشین نخریسی و با ۳ نوع الیاف کار کنند، به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار رفته باشد. برای این منظور برنامه‌ریزی کنید. | ۱ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |



المانهای هندسی
 هندسه
 حسابان
 فیزیک
 شیمی
 زیست‌شناسی
 ادبیات

◀ نکته : تعداد اعداد مضارب k (بخشپذیر بر k) از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, n\}$: $\left[\frac{n}{k} \right]$



تعداد مضارب k (بخشپذیر بر k) از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, n\}$: $\left[\frac{n}{k} \right]$

مثال : در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۹۰ چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخشپذیر باشند؟



مثال : از مجموعه $\{۱, ۲, ۳, \dots, ۲۰۰\}$ چند عدد وجود دارد که نسبت به ۱۵ اولند؟



تجربیه
مطالعه
تفکر
خلاقیت
یادگیری



ب) سه عضوی :

A یا B یا C رخ دهد (از A و B و C حداقل یکی رخ دهد) :

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

هیچکدام رخ ندهند (نه A رخ دهد نه B رخ دهد و نه C) :

$$|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |S| - |A \cup B \cup C|$$



فصل ۲
مجموعه ها
۲
۳
۴
۵
۶
۷
۸
۹
۱۰
۱۱
۱۲
۱۳
۱۴
۱۵
۱۶
۱۷
۱۸
۱۹
۲۰
۲۱
۲۲
۲۳
۲۴
۲۵
۲۶
۲۷
۲۸
۲۹
۳۰
۳۱
۳۲
۳۳
۳۴
۳۵
۳۶
۳۷
۳۸
۳۹
۴۰
۴۱
۴۲
۴۳
۴۴
۴۵
۴۶
۴۷
۴۸
۴۹
۵۰
۵۱
۵۲
۵۳
۵۴
۵۵
۵۶
۵۷
۵۸
۵۹
۶۰
۶۱
۶۲
۶۳
۶۴
۶۵
۶۶
۶۷
۶۸
۶۹
۷۰
۷۱
۷۲
۷۳
۷۴
۷۵
۷۶
۷۷
۷۸
۷۹
۸۰
۸۱
۸۲
۸۳
۸۴
۸۵
۸۶
۸۷
۸۸
۸۹
۹۰
۹۱
۹۲
۹۳
۹۴
۹۵
۹۶
۹۷
۹۸
۹۹
۱۰۰

مثال : چند عدد از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 200\}$ وجود دارند که حداقل بر یکی از اعداد ۲ یا ۳ یا ۵ بخش پذیر باشند؟



مثال : چند عدد طبیعی مانند $1 \leq n \leq 400$ وجود دارد که بر هیچیک از اعداد ۳ و ۴ و ۵ بخش پذیر نباشد؟



ویژه امتحان نهایی

مثال : رمز یک قفل عددی ۵ رقمی شامل ارقام ۱ تا ۹ است که حداقل یک ۲ و یک ۳ و یک ۷ در آن موجود است. اگر امتحان کردن هر رمز ۶ ثانیه طول بکشد حداقل چقدر زمان لازم داریم تا قفل باز شود؟



مثال : در یک کلاس ۳۴ نفری ۱۵ نفر فوتبال، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می‌کنند. اگر ۱۰ نفر عضو هیچ‌یک از تیم‌ها نبوده و ۵ نفر فوتبال و والیبال و ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۴ نفر فوتبال و بسکتبال بازی کنند، مطلوب است این که چند نفر؛

الف) هر سه رشته را بازی می‌کنند؟

ب) فقط فوتبال بازی می‌کنند؟

پ) والیبال بازی می‌کنند ولی بسکتبال بازی نمی‌کنند؟

ت) فقط در یک رشته بازی می‌کنند؟

مشاهده نمونه سوال نهایی :



باسمه تعالی

| | | | |
|---|--------------------------|--|------------------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته | نام و نام خانوادگی: | ساعت شروع: ۸ صبح | تعداد صفحه: ۲ |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | رشته: ریاضی فیزیک | تاریخ امتحان: ۱۳۹۸/۳/۲۵ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۸ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد | | |
| نمره | | | |

| | | |
|----|---|------|
| ۱۴ | در بین اعداد ۱ تا ۹۰ چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشند. | ۱/۲۵ |
|----|---|------|

| | | | |
|---|-----------------------|--|------------------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته | نام و نام خانوادگی: | ساعت شروع: ۸ صبح | رشته: ریاضی فیزیک |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه: ۲ | تاریخ امتحان: ۱۳۹۹/۰۴/۰۸ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۹ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد | | |
| نمره | | | |

| | | |
|----|---|---|
| ۲۰ | در بین اعداد طبیعی مانند n ، به طوری که $1 \leq n \leq 100$ ، چند عدد وجود دارد که بر ۶ یا ۱۰ بخش پذیر است؟ | ۱ |
|----|---|---|



مجموعه المپیاد ریاضی

| | | | |
|---|---|---|------------------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته | ساعت شروع: ۸ صبح | نام و نام خانوادگی: | رشته: ریاضی فیزیک |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه: ۲ | تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۰۳/۲۱ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۴۰۲ | | مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش http://aee.medu.gov.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد. (استفاده از ماشین حساب ساده، با چهار عمل اصلی، مجاز است.) | | |
| نمره | | | |

۱۵ | چند رمز ۴ رقمی با ارقام ۱ تا ۵ می توان نوشت به طوری که هر رمز، حداقل یک رقم ۲ و یک رقم ۳ را شامل ۱/۵ باشد؟ (نیاز به محاسبه پاسخ نهایی نمی باشد)

| | | | |
|---|-------------------------|--|------------------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته | ساعت شروع: ۸ صبح | نام و نام خانوادگی: | رشته: ریاضی فیزیک |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه: ۲ | تاریخ امتحان: ۱۴۰۰/۰۳/۸ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۴۰۰ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد | | |
| نمره | | | |

۱۵ | در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می کنند. اگر بدانیم ۳ نفر هم فوتبال، هم والیبال و هم بسکتبال بازی می کنند و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می کنند. مشخص کنید چند نفر فقط در یک رشته بازی می کنند؟



اپیزود ۱۷: تابع شماری و توزیع اشیاء متمایز

فرض : عضو $|A| = m$ و عضو $|B| = n$

(۱) تعداد توابع از یک مجموعه m عضوی به یک مجموعه n عضوی $\leftarrow n^m$

(۲) تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه m عضوی به یک مجموعه n عضوی $\leftarrow \binom{n}{m}^{n \geq m} = \frac{n!}{(n-m)!}$

(۳) تعداد توابع پوشا از یک مجموعه m عضوی به یک مجموعه $n \geq m$

الف) ۲ عضوی $\leftarrow 2^m - 2$

ب) ۳ عضوی $\leftarrow 3^m - 3 \times 2^m + 3$



مثال: اگر $|A| = 6$ و $|B| = 4$ ؛

الف) چند تابع از A به B قابل تعریف است؟

ب) چند تابع از B به A قابل تعریف است؟

پ) چند تابع یک به یک از A به B قابل تعریف است؟

ت) چند تابع یک به یک از B به A قابل تعریف است؟



ویژه امتحان نهایی

مثال: از یک مجموعه ۴ عضوی ؛

الف) به یک مجموعه ۲ عضوی چند تابع پوشا می‌توان تعریف کرد؟

ب) به یک مجموعه ۳ عضوی چند تابع پوشا می‌توان تعریف کرد؟



تجربیات
معماری
مهندسی
فیزیک
ریاضیات
شیمی
زیست‌شناسی
تاریخ
ادبیات
هنر
ورزش

◀ نکته : تعداد راه‌های توزیع m شیء متمایز بین n نفر بطوریکه :

(الف) لازم نباشد به همه افراد از اشیاء برسد (دلخواه توزیع شود) ← تعداد توابع

(ب) به هر نفر حداقل یکی برسد ← تعداد توابع پوشا

(پ) به هر نفر حداکثر یکی برسد (بیش از یکی نرسد) ← تعداد توابع یک به یک

(ت) حداقل به یک نفر هیچی نرسد ← تعداد توابع غیرپوشا (تعداد کل توابع منهای تعداد توابع پوشا)



المعرب
العدد
الهندس
الفقه
الطبیعه
الکیمیا
الریاضی
المنطق
الاصول
الکلام
التفسیر
الحدیث
القرآن

مثال: به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آنکه هیچ کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟



تجربیات
معماری
۲۰۲۰
۱۳۹۹
۱۳۹۸
۱۳۹۷
۱۳۹۶
۱۳۹۵
۱۳۹۴
۱۳۹۳
۱۳۹۲
۱۳۹۱
۱۳۹۰
۱۳۸۹
۱۳۸۸
۱۳۸۷
۱۳۸۶
۱۳۸۵
۱۳۸۴
۱۳۸۳
۱۳۸۲
۱۳۸۱
۱۳۸۰
۱۳۷۹
۱۳۷۸
۱۳۷۷
۱۳۷۶
۱۳۷۵
۱۳۷۴
۱۳۷۳
۱۳۷۲
۱۳۷۱
۱۳۷۰
۱۳۶۹
۱۳۶۸
۱۳۶۷
۱۳۶۶
۱۳۶۵
۱۳۶۴
۱۳۶۳
۱۳۶۲
۱۳۶۱
۱۳۶۰
۱۳۵۹
۱۳۵۸
۱۳۵۷
۱۳۵۶
۱۳۵۵
۱۳۵۴
۱۳۵۳
۱۳۵۲
۱۳۵۱
۱۳۵۰
۱۳۴۹
۱۳۴۸
۱۳۴۷
۱۳۴۶
۱۳۴۵
۱۳۴۴
۱۳۴۳
۱۳۴۲
۱۳۴۱
۱۳۴۰
۱۳۳۹
۱۳۳۸
۱۳۳۷
۱۳۳۶
۱۳۳۵
۱۳۳۴
۱۳۳۳
۱۳۳۲
۱۳۳۱
۱۳۳۰
۱۳۲۹
۱۳۲۸
۱۳۲۷
۱۳۲۶
۱۳۲۵
۱۳۲۴
۱۳۲۳
۱۳۲۲
۱۳۲۱
۱۳۲۰
۱۳۱۹
۱۳۱۸
۱۳۱۷
۱۳۱۶
۱۳۱۵
۱۳۱۴
۱۳۱۳
۱۳۱۲
۱۳۱۱
۱۳۱۰
۱۳۰۹
۱۳۰۸
۱۳۰۷
۱۳۰۶
۱۳۰۵
۱۳۰۴
۱۳۰۳
۱۳۰۲
۱۳۰۱
۱۳۰۰
۱۲۹۹
۱۲۹۸
۱۲۹۷
۱۲۹۶
۱۲۹۵
۱۲۹۴
۱۲۹۳
۱۲۹۲
۱۲۹۱
۱۲۹۰
۱۲۸۹
۱۲۸۸
۱۲۸۷
۱۲۸۶
۱۲۸۵
۱۲۸۴
۱۲۸۳
۱۲۸۲
۱۲۸۱
۱۲۸۰
۱۲۷۹
۱۲۷۸
۱۲۷۷
۱۲۷۶
۱۲۷۵
۱۲۷۴
۱۲۷۳
۱۲۷۲
۱۲۷۱
۱۲۷۰
۱۲۶۹
۱۲۶۸
۱۲۶۷
۱۲۶۶
۱۲۶۵
۱۲۶۴
۱۲۶۳
۱۲۶۲
۱۲۶۱
۱۲۶۰
۱۲۵۹
۱۲۵۸
۱۲۵۷
۱۲۵۶
۱۲۵۵
۱۲۵۴
۱۲۵۳
۱۲۵۲
۱۲۵۱
۱۲۵۰
۱۲۴۹
۱۲۴۸
۱۲۴۷
۱۲۴۶
۱۲۴۵
۱۲۴۴
۱۲۴۳
۱۲۴۲
۱۲۴۱
۱۲۴۰
۱۲۳۹
۱۲۳۸
۱۲۳۷
۱۲۳۶
۱۲۳۵
۱۲۳۴
۱۲۳۳
۱۲۳۲
۱۲۳۱
۱۲۳۰
۱۲۲۹
۱۲۲۸
۱۲۲۷
۱۲۲۶
۱۲۲۵
۱۲۲۴
۱۲۲۳
۱۲۲۲
۱۲۲۱
۱۲۲۰
۱۲۱۹
۱۲۱۸
۱۲۱۷
۱۲۱۶
۱۲۱۵
۱۲۱۴
۱۲۱۳
۱۲۱۲
۱۲۱۱
۱۲۱۰
۱۲۰۹
۱۲۰۸
۱۲۰۷
۱۲۰۶
۱۲۰۵
۱۲۰۴
۱۲۰۳
۱۲۰۲
۱۲۰۱
۱۲۰۰
۱۱۹۹
۱۱۹۸
۱۱۹۷
۱۱۹۶
۱۱۹۵
۱۱۹۴
۱۱۹۳
۱۱۹۲
۱۱۹۱
۱۱۹۰
۱۱۸۹
۱۱۸۸
۱۱۸۷
۱۱۸۶
۱۱۸۵
۱۱۸۴
۱۱۸۳
۱۱۸۲
۱۱۸۱
۱۱۸۰
۱۱۷۹
۱۱۷۸
۱۱۷۷
۱۱۷۶
۱۱۷۵
۱۱۷۴
۱۱۷۳
۱۱۷۲
۱۱۷۱
۱۱۷۰
۱۱۶۹
۱۱۶۸
۱۱۶۷
۱۱۶۶
۱۱۶۵
۱۱۶۴
۱۱۶۳
۱۱۶۲
۱۱۶۱
۱۱۶۰
۱۱۵۹
۱۱۵۸
۱۱۵۷
۱۱۵۶
۱۱۵۵
۱۱۵۴
۱۱۵۳
۱۱۵۲
۱۱۵۱
۱۱۵۰
۱۱۴۹
۱۱۴۸
۱۱۴۷
۱۱۴۶
۱۱۴۵
۱۱۴۴
۱۱۴۳
۱۱۴۲
۱۱۴۱
۱۱۴۰
۱۱۳۹
۱۱۳۸
۱۱۳۷
۱۱۳۶
۱۱۳۵
۱۱۳۴
۱۱۳۳
۱۱۳۲
۱۱۳۱
۱۱۳۰
۱۱۲۹
۱۱۲۸
۱۱۲۷
۱۱۲۶
۱۱۲۵
۱۱۲۴
۱۱۲۳
۱۱۲۲
۱۱۲۱
۱۱۲۰
۱۱۱۹
۱۱۱۸
۱۱۱۷
۱۱۱۶
۱۱۱۵
۱۱۱۴
۱۱۱۳
۱۱۱۲
۱۱۱۱
۱۱۱۰
۱۱۰۹
۱۱۰۸
۱۱۰۷
۱۱۰۶
۱۱۰۵
۱۱۰۴
۱۱۰۳
۱۱۰۲
۱۱۰۱
۱۱۰۰
۱۰۹۹
۱۰۹۸
۱۰۹۷
۱۰۹۶
۱۰۹۵
۱۰۹۴
۱۰۹۳
۱۰۹۲
۱۰۹۱
۱۰۹۰
۱۰۸۹
۱۰۸۸
۱۰۸۷
۱۰۸۶
۱۰۸۵
۱۰۸۴
۱۰۸۳
۱۰۸۲
۱۰۸۱
۱۰۸۰
۱۰۷۹
۱۰۷۸
۱۰۷۷
۱۰۷۶
۱۰۷۵
۱۰۷۴
۱۰۷۳
۱۰۷۲
۱۰۷۱
۱۰۷۰
۱۰۶۹
۱۰۶۸
۱۰۶۷
۱۰۶۶
۱۰۶۵
۱۰۶۴
۱۰۶۳
۱۰۶۲
۱۰۶۱
۱۰۶۰
۱۰۵۹
۱۰۵۸
۱۰۵۷
۱۰۵۶
۱۰۵۵
۱۰۵۴
۱۰۵۳
۱۰۵۲
۱۰۵۱
۱۰۵۰
۱۰۴۹
۱۰۴۸
۱۰۴۷
۱۰۴۶
۱۰۴۵
۱۰۴۴
۱۰۴۳
۱۰۴۲
۱۰۴۱
۱۰۴۰
۱۰۳۹
۱۰۳۸
۱۰۳۷
۱۰۳۶
۱۰۳۵
۱۰۳۴
۱۰۳۳
۱۰۳۲
۱۰۳۱
۱۰۳۰
۱۰۲۹
۱۰۲۸
۱۰۲۷
۱۰۲۶
۱۰۲۵
۱۰۲۴
۱۰۲۳
۱۰۲۲
۱۰۲۱
۱۰۲۰
۱۰۱۹
۱۰۱۸
۱۰۱۷
۱۰۱۶
۱۰۱۵
۱۰۱۴
۱۰۱۳
۱۰۱۲
۱۰۱۱
۱۰۱۰
۱۰۰۹
۱۰۰۸
۱۰۰۷
۱۰۰۶
۱۰۰۵
۱۰۰۴
۱۰۰۳
۱۰۰۲
۱۰۰۱
۱۰۰۰

مشاهده نمونه سوال نهایی :

| | | | |
|--|---|--|-----------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته | نام و نام خانوادگی : | ساعت شروع : ۸ صبح | رشته : ریاضی فیزیک |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه: ۲ | تاریخ امتحان : ۱۳۹۹/۰۴/۰۸ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۹ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد | | |
| ۱۹ | به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آن که هیچ کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم). | | |

| | | | |
|---|---|--|-----------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته | نام و نام خانوادگی : | ساعت شروع : ۸ صبح | رشته : ریاضی فیزیک |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه: ۲ | تاریخ امتحان : ۱۴۰۰/۰۳/۰۸ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۴۰۰ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد | | |
| ۱۶ | الف) به چند طریق می توان ۴ کلاه متفاوت را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرط آن که به هر نفر حداقل یک کلاه داده شود؟ ب) به چند طریق می توان ۴ کلاه متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آن که به هر نفر حداکثر یک کلاه داده شود؟ | | |



ویژه امتحان نهایی

| | | | |
|--|--|--|-------------------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته | رشته : ریاضی فیزیک | نام و نام خانوادگی : | ساعت شروع : ۸ صبح |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه : ۲ | تاریخ امتحان : ۱۴۰۱/۰۳/۲۸ | مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۴۰۱ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |
| ردیف | سؤالات پاسخ نامه دارد. (استفاده از ماشین حساب ساده، با چهار عمل اصلی، مجاز است.) | | |
| نمره | | | |

| | | |
|----|--|------|
| ۱۶ | به چند طریق می توان ۵ سیب را بین ۳ نفر توزیع کرد، به طوری که هر نفر حداقل یک سیب داشته باشد؟ | ۱/۲۵ |
|----|--|------|



مجموعه
الکتریکی
موسسه
توسعه
آموزشی
پارس

اپیزود ۱۸ : اصل لانه کبوتری

اگر m کبوتر بخواهند n لانه را اشغال کنند بطوریکه $m > n$ آنگاه حداقل یک لانه وجود دارد که در آن حداقل دو کبوتر جای می‌گیرد.

◀ اثبات شهودی اصل لانه کبوتری : مسایل را در بدترین حالت در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم برقرار است که در این صورت در همه حالت‌ها نیز برقرار است.

◀ استراتژی حل مسایل : تعداد کبوترها را بر تعداد لانه‌ها تقسیم می‌کنیم اگر باقیمانده آورد به خارج قسمت فقط یک واحد اضافه می‌کنیم. حداقل کبوترها به دست می‌آید.



تجربیات
موسسه
توسعه
موسسه
توسعه
موسسه
توسعه

مثال : در یک کلاس ۱۳ نفره نشان دهید حداقل دو نفر در یک ماه سال متولد شده‌اند.



مثال : ثابت کنید بین هر ۵ عدد طبیعی حداقل دو عدد وجود دارد که در پیمانه ۴ هم‌نهشت هستند.



مثال : در یک خانواده ی ۱۵ نفری حداقل چند نفر در یک فصل سال متولد شده اند؟



مجموعه سوالات
ریاضی
فصل اول
تجربیه

تیب هندسی مسایل اصل لانه کبوتری :

پس از تقسیم شکل به شکل‌های کوچکتر همنهشت، مثلث متساوی‌الاضلاع داریم:

طول ضلع مثلث < فاصله دو نقطه

پس از تقسیم شکل به شکل‌های کوچکتر همنهشت، زاویه قائمه داریم (مثلث قائم‌الزاویه، مربع، دایره، مستطیل):

طول قطر (وتر) < فاصله دو نقطه

نکته مهم : $1 + \text{تعداد ناحیه‌های کوچک} = \text{تعداد نقاط}$



مثال : پنج نقطه داخل مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع ۲ انتخاب می کنیم. ثابت کنید فاصله حداقل دو نقطه از این ۵ نقطه از ۱ کمتر است.



مثال : ۱۳ نقطه داخل مستطیل ۸×۶ قرار دارند. ثابت کنید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه فاصله‌شان از $\sqrt{۸}$ کمتر است.



مجموعه سوالات
ریاضی
فصل ۳
هندسه
کتابخانه

تعمیم اصل لانه کبوتری :

اگر $kn + 1$ کبوتر یا بیشتر در n لانه قرار گیرند آنگاه لانه‌ای وجود دارد که در آن حداقل $k + 1$ کبوتر جای گرفته است.



مثال : یک دبیرستان حداقل چند دانش آموز داشته باشد تا مطمئن باشیم حداقل ۱۰ نفر از آنها ماه و روز هفته تولد یکسان دارند؟



مثال : حداقل چند نفر در یک سالن همایش حضور یابند تا مطمئن شویم حداقل ۳ نفر از آنها دو طرف اول و دوم فامیلی‌شان غیر تکراری و مثل هم است؟ (تعداد حروف الفبای فارسی ۳۲ حرف است).



مثال : حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای سابقه کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آنها روز تولشان یکی است؟



ویژه امتحان نهایی

ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج باشد.



ویژه امتحان نهایی

۱۵ نقطه در صفحه با مختصات صحیح در نظر می‌گیریم. ثابت کنید حداقل دو نقطه از این ۵ نقطه وجود دارد، طوری که مختصات نقطه وسط این دو نقطه نیز صحیح می‌باشد.



مختصات
نقطه
وسط
نقطه
نیز
صحیح
می
باشد

| | | | |
|---|--|--|------------------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته | نام و نام خانوادگی: | ساعت شروع: ۸ صبح | تعداد صفحه: ۲ |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | رشته: ریاضی فیزیک | تاریخ امتحان: ۱۳۹۸/۳/۲۵ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۸ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد | | |
| ۱۵ | ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش آموز مشغول به تحصیل باشند لاقلاً ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است. | | |
| | نمره | ۱/۲۵ | |

| | | | |
|---|-----------------------|--|------------------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته | نام و نام خانوادگی: | ساعت شروع: ۸ صبح | رشته: ریاضی فیزیک |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه: ۲ | تاریخ امتحان: ۱۳۹۹/۰۴/۰۸ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۹ | | مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد | | |
| | نمره | | |

- ۲۱ | در یک اردوی دانش آموزی حداقل چند دانش آموز حضور داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که لاقلاً ۷ نفر از آنها ماه تولد یکسانی دارند؟



| | | | |
|--|-----------------------|--------------------------|---------------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته | ساعت شروع: ۸ صبح | نام و نام خانوادگی : | رشته : ریاضی فیزیک |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه: ۲ | تاریخ امتحان : ۱۴۰۰/۰۳/۸ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۴۰۰ | | | |
| مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | | | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد | | |
| نمره | | | |

۱۷ | ۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه ۰/۷۵ گل قرار گرفته است؟

| | | | |
|--|--|---------------------------|---------------------------|
| سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته | ساعت شروع: ۸ صبح | نام و نام خانوادگی : | رشته : ریاضی فیزیک |
| پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه | تعداد صفحه: ۲ | تاریخ امتحان : ۱۴۰۱/۰۳/۲۸ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه |
| دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۴۰۱ | | | |
| مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir | | | |
| ردیف | سوالات پاسخ نامه دارد. (استفاده از ماشین حساب ساده، با چهار عمل اصلی، مجاز است.) | | |
| نمره | | | |

۱۷ | ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش آموز مشغول تحصیل باشند، لاقلاً ۷ نفر از آن‌ها روز هفته و ماه ۱/۲۵ تولدشان یکسان است.



