

# نهج یادگیری جامع

هندسه دوازدهم

مفهوم و انواع ماتریس، جمع و  
تفریق ماتریس‌ها



## اپیزود ۱ : مفهوم ماتریس، انواع ماتریس، جمع و تفریق ماتریسها

ماتریس : هر جدول مستطیلی از اعداد حقیقی شامل تعدادی سطر و ستون که معمولاً با حروف بزرگ لاتین مانند  $A, B, C, \dots$  نمایش داده می‌شود.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \cdot & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ -3 & 2/5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$



العربية

◀ **درایه ماتریس** : اعداد حقیقی درون هر ماتریس، درایه‌های آن ماتریس نامیده می‌شوند.

هر ماتریس دارای  $m$  سطر و  $n$  ستون را یک ماتریس  $m$  در  $n$  یا مرتبه  $m \times n$  می‌نامیم و بصورت  $A_{m \times n}$  نمایش می‌دهیم.

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & \sqrt{5} & 3 \\ 2 & 4 & -6 & 2/3 \end{bmatrix}$$



## عبارت ستون

درایه عمومی ماتریس  $A$ : درایه  $A_{ij}$  را که در آن  $1 \leq i \leq m$  و  $1 \leq j \leq n$  است درایه عمومی ماتریس  $A$  نامیده و بعنوان نماد همه درایه های ماتریس در نظر گرفته می شود.

$A = [a_{ij}]$ ; شماره سطر:  $i$ , شماره ستون:  $j$

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$B_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$C_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{bmatrix}$$



مسئله : ماتریس  $A_{3 \times 2}$  بصورت زیر را با درایه‌هایش نمای دهید.

$$A_{ij} = [i^2 + j]$$

$$A_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$$



مسئله : ماتریس  $3 \times 4$  زیر را با درایه‌هایش بنویسید.

$$a_{ij} = \begin{cases} i^2 & i < j \\ \gamma & i = j \\ i+j & i > j \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & \gamma & \gamma & \gamma \\ 4 & 5 & \gamma & \gamma \end{bmatrix}$$



الماتریس

تذکر: طبق قرارداد ماتریس مرتبه  $1 \times 1$  بصورت  $[k]_{1 \times 1}$  را برابر با عدد حقیقی  $k$  تعریف می کنیم.

$$[2]_{1 \times 1} = 2 \quad [-10]_{1 \times 1} = -10$$



## معرفی چند ماتریس خاص :

۱- **ماتریس مربعی** : ماتریسی که دارای تعداد سطر و ستون برابر است؛  $m = n$ . ماتریس‌های مربعی را اصطلاحاً از مرتبه  $n$  یا  $n \times n$  می‌نامیم.

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & \cdot & -2 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

قطر اصلی

$$1 \times n$$

۲- **ماتریس سطری** : ماتریسی که فقط یک سطر دارد؛  $m = 1$ .

$$A_{1 \times 1} = [5], \quad B_{1 \times 2} = [1 \quad 2], \quad C_{1 \times 3} = [-1 \quad 0 \quad 3]$$



علم  
 ریاضی  
 فیزیک  
 شیمی  
 تاریخ  
 ادبیات  
 عربی  
 فلسفه  
 هنر  
 ورزش

$m \times 1$ **۳- ماتریس ستونی:** ماتریسی که فقط یک ستون دارد؛  $n = 1$ .

$$A_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad B_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ \sqrt{6} \end{bmatrix}$$

**۴- ماتریس قطری (D):** ماتریس مربعی که در آن درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی همگی صفر هستند.

$$D_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & -2 \end{bmatrix}, \quad D_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 \end{bmatrix}$$



۵- ماتریس اسکالر: ماتریس قطری که درایه‌های قطر اصلی آن همگی با هم برابرند.

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & 1 \end{bmatrix}, \quad B_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 5 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 5 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 5 \end{bmatrix}$$

۶- ماتریس همانی (واحد) (I): ماتریس اسکالری که درایه‌های قطر اصلی آن همگی ۱ باشد.

$$I_{1 \times 1} = [1], \quad I_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & 1 \end{bmatrix}, \quad I_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$



المعادن  
الرياضيات  
الفيزياء  
الكيمياء  
البيولوجيا  
العلوم  
الاجتماعية  
الإنسانيات  
الهندسة  
الطب  
العلوم  
البيئية  
العلوم  
الفضائية  
العلوم  
الكمبيوترية  
العلوم  
البيئية  
العلوم  
الاجتماعية  
الإنسانيات  
الهندسة  
الطب  
العلوم  
البيئية  
العلوم  
الفضائية  
العلوم  
الكمبيوترية

نکته: هر ماتریس اسکالر، مضربی از ماتریس همانی هم مرتبه اش است.

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} k & \cdot \\ \cdot & k \end{bmatrix} = k \cdot \begin{bmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & 1 \end{bmatrix} = k \cdot I_{2 \times 2}, \quad B_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} k & \cdot & \cdot \\ \cdot & k & \cdot \\ \cdot & \cdot & k \end{bmatrix} = k \cdot I_{3 \times 3}$$

۷- ماتریس صفر ( $\bar{O}$ ): ماتریسی که همه درایه‌های آن صفر باشد.

$$\bar{O}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad \bar{O}_{1 \times 2} = [\cdot \quad \cdot]$$



الفبا  
 اعداد  
 هندسه  
 الفبای عربی

تساوی دو ماتریس: دو ماتریس هم مرتبه  $m \times n$  را مساوی گوئیم هرگاه درایه‌های نظیر به نظیر در آنها با هم برابر باشند.

$$\forall_{i,j} : A_{ij} = B_{ij} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$$

مسئله: اگر  $A = B$  داشته باشیم  $A = B$  آنگاه مقدار  $x + y + z$  را بیابید.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2x + y \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 2x - y & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \rightarrow z = -2$$



المعادن العربية

جمع و تفریق دو ماتریس: برای جمع یا تفریق دو ماتریس هم مرتبه کافی است درایه‌های دو ماتریس را

نظیر به نظیر با هم جمع کرده یا از هم کم کنیم. بدیهی است که ماتریس حاصل جمع یا حاصل تفریق با

ماتریس‌های اولیه هم مرتبه خواهد بود.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A = [a_{ij}] , B = [b_{ij}]$$

$$A \pm B = [a_{ij}] \pm [b_{ij}] = [a_{ij} \pm b_{ij}]$$



عربی

ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس: برای ضرب کردن یک عدد حقیقی در یک ماتریس کافی است

آن عدد را در تمام درایه‌های ماتریس ضرب کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow 3A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A = [a_{ij}] \xrightarrow{r \in \mathbb{R}} rA = r[a_{ij}] = [ra_{ij}]$$



المعادن  
الرياضية  
المعاصرة  
المعاصرة  
المعاصرة

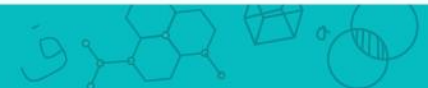
قرینه یک ماتریس: قرینه ماتریس  $A$  را با  $-A$  نمایش داده و از ضرب عدد  $(-1)$  در ماتریس  $A$  بدست

می آید.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow -A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

نکته: جمع هر ماتریس با قرینه اش، ماتریس صفر می شود:

$$A + (-A) = \bar{O}$$



مسئله: اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}_{2 \times 2}$  و  $C = A + B$  آنگاه ماتریس  $C$  را بیابید.

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$



المعادن  
المركبات  
الكيمياء  
الفيزياء  
البيولوجيا  
الرياضيات  
العلوم  
الطبيعية

مسئله: اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ y & 2 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 2 & -x^2 \\ y^2 & 3 \end{bmatrix}$  و  $C = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  داشته باشیم  $A - B = C$  آنگاه مقادیر  $x, y$  را محاسبه کنید.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2x + x^2 \\ y - y^2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$2x + x^2 = -1 \rightarrow x = \dots$$

$$y - y^2 = 0 \rightarrow y = \dots$$



المعادن  
المعقدة  
المعقدة  
المعقدة

خواص مهم جمع و تفریق ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس :  
برای ماتریس‌های هم‌مرتبه  $A, B, C$  و اعداد حقیقی  $r, s$  داریم؛

$$1) A + B = B + A$$

خاصیت جابه‌جایی

$$2) A + (B + C) = (A + B) + C$$

خاصیت شرکت‌پذیری

$$3) A + \bar{O} = \bar{O} + A = A$$

ماتریس صفر عضو خنثی عمل جمع

$$4) A + (-A) = (-A) + A = \bar{O}$$

ماتریس قرینه



العربية  
الرياضية  
الفيزياء  
الكيمياء  
البيولوجيا  
العلوم  
الاجتماعية  
الإنجليزية  
التاريخ  
الفن  
الرياضيات  
العلوم  
الاجتماعية  
الإنجليزية  
التاريخ  
الفن

$$\delta) r(A \pm B) = rA \pm rB$$

$$\epsilon) (r \pm s)A = rA \pm sA$$

$$\gamma) A = B \Rightarrow rA = rB$$

$$\lambda) rA = rB \Rightarrow A = B \quad r \neq 0$$



المعادن  
البيولوجية  
المغذيات  
الكربوهيدرات  
البروتينات  
الدهون  
الفيتامينات  
المعادن  
المعادن  
المعادن



بسیار سی

سؤالات امتحان نهایی درس : هندسه ۳	رشته : ریاضی فیزیک	مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه	ساعت شروع: ۸ صبح
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	نام و نام خانوادگی :	تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۳/۴	تعداد صفحه: ۲
دانش آموزان روزانه بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۴۰۱		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>	
ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد)		
نمره			

استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی و رادیکال) مجاز است .

۱	عبارت های زیر را کامل کنید . الف) اگر ماتریس $\begin{bmatrix} r & m-1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ یک ماتریس همانی باشد حاصل $m+r$ برابر با ..... است .	۱
---	---	---



المعادن  
الکیمیاء  
الرياضيات  
الفيزياء  
البيولوجيا  
العلوم  
الاجتماعية  
السياسة  
الادب  
التاريخ  
الفلسفة  
اللاهوت  
الطب  
الهندسة  
العمارة  
الزراعة  
الصيدا  
الصيدا  
الصيدا

سؤالات امتحان نهایی درس: هندسه ۳	مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه	تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۰۳/۰۷	ساعت شروع: ۸ صبح
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	رشته: ریاضی- فیزیک	نام و نام خانوادگی:	تعداد صفحه: ۲
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۴۰۲		مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش <a href="http://aee.medu.gov.ir">http://aee.medu.gov.ir</a>	

ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد)	نمره
------	-------------------------	------

استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی و رادیکال) مجاز است.

سؤالات فصل اول  $x + 2 = 5 \rightarrow x = 3$

۰/۵	<p>ماتریس‌های <math>A = \begin{bmatrix} 2 &amp; 3 \\ 5 &amp; 1 \end{bmatrix}</math> و <math>B = \begin{bmatrix} x+1 &amp; y+2 \\ 3 &amp; 2 \end{bmatrix}</math> را در نظر بگیرید، اگر <math>A + B = \begin{bmatrix} 5 &amp; 4 \\ 8 &amp; 3 \end{bmatrix}</math> باشد، آنگاه مقادیر <math>x</math> و <math>y</math> را به دست آورید.</p> <p><math>y + 5 = 8 \rightarrow y = 3</math></p>	۱
-----	---	---



المعالي العربية



# نهال دانش جمع

هندسه دوازدهم

ضرب ماتریس‌ها، ویژگی‌ها و نکات آن



## اپیزود ۲: ضرب ماتریسها، ویژگی ها و نکات آن

◀ شرط ضرب پذیری دو ماتریس در هم :

برای دو ماتریس  $A, B$  حاصلضرب  $A \times B$  زمانی قابل تعریف است که تعداد ستونهای ماتریس  $A$  با تعداد سطرهای ماتریس  $B$  برابر باشد :

$$A_{m \times n} \times B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

واضح است که ماتریس حاصلضرب دارای تعداد سطرهای ماتریس  $A$  و تعداد ستونهای ماتریس  $B$  است.



العربية

مثلاً برای دو ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$  حاصلضرب  $A_{3 \times 2} \times B_{2 \times 2}$  قابل تعریف است اما حاصلضرب  $B_{2 \times 2} \times A_{3 \times 2}$  تعریف نمی‌شود و داریم:

$$A_{3 \times 2} \times B_{2 \times 2} = \underline{C_{3 \times 2}}$$



الgebra  
عربی  
ماتریس  
حاصلضرب

ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی :

هر درایه ماتریس سطری در درایه نظیرش در ماتریس ستونی ضرب شده و حاصل ضربها را با هم جمع می کنیم تا ماتریس  $1 \times 1$  (عدد حقیقی) حاصل شود.

$$[a_1 \quad a_2 \quad a_3] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = [a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3] = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$[-1 \quad 5] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = [-2 + 20 + 20] = [48] = 48$$

$$[2 \quad -2 \quad 7] \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = -4 - 8 + 35 = 23$$



تجربیات العربیة

## ضرب ماتریس در ماتریس

اگر ماتریس  $A \times B$  قابل تعریف باشد آنگاه برای محاسبه آن، به روشی که قبلاً شرح داده شد هر یک از سطرهای ماتریس  $A$  را در هر یک از ستونهای ماتریس  $B$  ضرب کرده و عدد حقیقی بدست آمده را در جایگاه سطری و ستونی ماتریس حاصل ضرب می نویسیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \dots & 10 \dots \\ \dots & 22 \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 4} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$



تجربیات

مسئله: برای ماتریس‌های  $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  چه حاصلضربی قابل تعریف است؟ آن را حساب کنید.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -11 & 5 & 11 \\ 42 & 14 & 29 \end{bmatrix}$$

$$\cancel{B \times A}$$

$$\cancel{A \times B} = C$$



المعادن  
الرياضيات  
الفيزياء  
الكيمياء  
البيولوجيا  
العلوم  
الاجتماعية  
اللغة العربية

مسئله : جواب های معادله  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$  را بیابید.

$$\begin{bmatrix} -x+1 \\ 2x+3 \end{bmatrix} = 0$$

$$-x^2 + 2x + 3 = 0 \rightarrow \dots$$



مجموعه سوال های کنکور سراسری  
 ۱۳۹۷  
 ۱۳۹۸  
 ۱۳۹۹  
 ۱۴۰۰  
 ۱۴۰۱  
 ۱۴۰۲  
 ۱۴۰۳  
 ۱۴۰۴  
 ۱۴۰۵  
 ۱۴۰۶  
 ۱۴۰۷  
 ۱۴۰۸  
 ۱۴۰۹  
 ۱۴۱۰  
 ۱۴۱۱  
 ۱۴۱۲  
 ۱۴۱۳  
 ۱۴۱۴  
 ۱۴۱۵  
 ۱۴۱۶  
 ۱۴۱۷  
 ۱۴۱۸  
 ۱۴۱۹  
 ۱۴۲۰  
 ۱۴۲۱  
 ۱۴۲۲  
 ۱۴۲۳  
 ۱۴۲۴  
 ۱۴۲۵  
 ۱۴۲۶  
 ۱۴۲۷  
 ۱۴۲۸  
 ۱۴۲۹  
 ۱۴۳۰  
 ۱۴۳۱  
 ۱۴۳۲  
 ۱۴۳۳  
 ۱۴۳۴  
 ۱۴۳۵  
 ۱۴۳۶  
 ۱۴۳۷  
 ۱۴۳۸  
 ۱۴۳۹  
 ۱۴۴۰  
 ۱۴۴۱  
 ۱۴۴۲  
 ۱۴۴۳  
 ۱۴۴۴  
 ۱۴۴۵  
 ۱۴۴۶  
 ۱۴۴۷  
 ۱۴۴۸  
 ۱۴۴۹  
 ۱۴۵۰  
 ۱۴۵۱  
 ۱۴۵۲  
 ۱۴۵۳  
 ۱۴۵۴  
 ۱۴۵۵  
 ۱۴۵۶  
 ۱۴۵۷  
 ۱۴۵۸  
 ۱۴۵۹  
 ۱۴۶۰  
 ۱۴۶۱  
 ۱۴۶۲  
 ۱۴۶۳  
 ۱۴۶۴  
 ۱۴۶۵  
 ۱۴۶۶  
 ۱۴۶۷  
 ۱۴۶۸  
 ۱۴۶۹  
 ۱۴۷۰  
 ۱۴۷۱  
 ۱۴۷۲  
 ۱۴۷۳  
 ۱۴۷۴  
 ۱۴۷۵  
 ۱۴۷۶  
 ۱۴۷۷  
 ۱۴۷۸  
 ۱۴۷۹  
 ۱۴۸۰  
 ۱۴۸۱  
 ۱۴۸۲  
 ۱۴۸۳  
 ۱۴۸۴  
 ۱۴۸۵  
 ۱۴۸۶  
 ۱۴۸۷  
 ۱۴۸۸  
 ۱۴۸۹  
 ۱۴۹۰  
 ۱۴۹۱  
 ۱۴۹۲  
 ۱۴۹۳  
 ۱۴۹۴  
 ۱۴۹۵  
 ۱۴۹۶  
 ۱۴۹۷  
 ۱۴۹۸  
 ۱۴۹۹  
 ۱۵۰۰

خواص عمل ضرب ماتریس ها :

(۱) اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس مربعی باشند، آنگاه هر دو حاصل ضرب  $A \times B$  و  $B \times A$  برای آنها قابل تعریف است.

هم مرتبه

$$A_{n \times n} \times B_{n \times n} = C_{n \times n}$$

(۲) در حالت کلی ضرب ماتریس ها خاصیت جابجایی ندارد.

$$A \times B \neq B \times A$$

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} & A \times B &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \\
 B &= \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & B \times A &= \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



(۳) ماتریس همانی (I) عضو خنثای عمل ضرب ماتریس‌هاست.

$$A \times I = I \times A = A$$

مثال:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow AI = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

The diagram shows the matrix multiplication process. The matrix  $A$  is multiplied by the identity matrix  $I$ . The result is the same matrix  $A$ . The identity matrix  $I$  is shown as a 2x2 matrix with 1s on the diagonal and 0s elsewhere. The resulting matrix is circled in purple and labeled  $A$ .

(۴) ضرب ماتریس‌ها در جمع و تفریق آنها خاصیت توزیع‌پذیری (پخش‌ی) دارد.

$$A \times (B \pm C) = A \times B \pm A \times C$$



الgebra  
الهندسة  
الرياضيات  
الفيزياء  
الكيمياء  
البيولوجيا  
العلوم  
الاجتماعية  
الإنسانيات  
اللغات  
الفنون  
الرياضة  
العلوم الإنسانية  
العلوم الطبيعية  
العلوم الاجتماعية  
العلوم الإنسانية  
اللغات  
الفنون  
الرياضة

(۵) ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکت پذیری دارد.

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

(۶) توان در ماتریس‌های مربعی، از ضرب هر ماتریس در خودش حاصل می‌شود.

$$A^2 = A \times A, \quad A^3 = A^2 \times A, \quad A^4 = A^3 \times A, \quad \dots, \quad A^n = A^{n-1} \times A$$

$$A^5 = (A^2)^2 = A^2 \times A^2$$



مفاهیم ریاضی  
 هندسه  
 جبر  
 حسابان  
 آمار و احتمال  
 فیزیک  
 شیمی  
 زیست‌شناسی  
 علوم اجتماعی  
 ادبیات  
 زبان فارسی  
 زبان انگلیسی  
 عربی

مسئله : دو ماتریس  $2 \times 2$  مثال بنویسید که هیچکدام صفر نباشند اما حاصلضرب آنها صفر شود.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\bar{0} \neq \bar{0}$        $\bar{0} = \bar{0}$

$$A \times B = \bar{0} \implies A = \bar{0} \vee B = \bar{0}$$

گزینه نادرست



صفحه ۱۰۰  
 فصل ۲  
 مباحث ۱ تا ۱۰  
 الماتریه

مسئله: اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  ماتریس‌های  $A^y, A^e, A^r, A^z$  را حساب کنید.

$$A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^2 = A^1 \times A = I \times A = A$$

$$A^3 = A^2 \times A = A \times A = A^1 = I$$

$$A^4 = A^3 \times A = I \times A = A$$

$$A^y = A^0 \times A = A \times A = A^2 = I$$

$$A^r = A^1 \times A = I \times A = A$$



تجربا العربية

مسئله: اگر  $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  مقادیر  $a, b$  را طوری بیابید که  $A \times B$  ماتریس قطری شود.

$$\begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4a+3 & 2a-1 \\ b-2 & -2b-2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a-1=0 \rightarrow a=2 \\ b-2=0 \rightarrow b=2 \end{cases}$$



المعالم العربية

مسئله: اگر  $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$  باشد، مقادیر  $x, y$  را حساب کنید.

$$\begin{bmatrix} 2x - y \\ x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{روش حذف}} \dots$$



مفاهیم ریاضی  
 هندسه  
 جبر  
 آمار  
 الفبای عربی

مسئله : برای ماتریس  $A = \begin{bmatrix} x & y \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  مقادیر  $x, y$  را چنان تعیین کنید که داشته باشیم :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$



المعادن  
الرياضيات  
الفيزياء  
الكيمياء  
البيولوجيا  
العلوم  
الاجتماعية  
الإنسانيات

## دو خاصیت از ماتریس‌های قطری :

(۱) اگر یک ماتریس قطری در ماتریس هم مرتبه‌اش ضرب شود، هر درایه روی قطر اصلی در درایه‌های ستون

یا سطر نظیرش ضرب می‌شود.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & r_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 a & r_1 b & r_1 c \\ r_2 d & r_2 e & r_2 f \\ r_3 g & r_3 h & r_3 i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} r_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & r_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 a & r_1 b & r_1 c \\ r_2 d & r_2 e & r_2 f \\ r_3 g & r_3 h & r_3 i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 8 & 4 & 0 \\ 8 & 5 & -7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 8 & 4 & 0 \\ 8 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$



مجموعه‌های آموزشی

(۲) اگر یک ماتریس قطری به توان  $n$  برسد، درایه‌های روی قطر اصلی‌اش به توان  $n$  می‌رسند.

$$\begin{bmatrix} r_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & r_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & r_3 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} r_1^n & \cdot & \cdot \\ \cdot & r_2^n & \cdot \\ \cdot & \cdot & r_3^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 3 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 8 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 27 \end{bmatrix}$$



صفحه ۱۳۱ از ۱۳۲  
 کتاب ریاضیات پایه  
 فصل ۳  
 ماتریس  
 صفحه ۱۳۱ از ۱۳۲

دو ماتریس تعویض پذیر: دو ماتریس هم مرتبه و مربعی  $A, B$  را تعویض پذیر گوئیم هرگاه:

$$A \times B = B \times A$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$



صفحه ۱۰۰  
 فصل ۱۰  
 الماتریس  
 تعویض پذیر

نکات:

(۱) ماتریس اسکالر با هر ماتریس هم مرتبه‌اش تعویض پذیر است.

(۲) ماتریس همانی با هر ماتریس هم مرتبه‌اش تعویض پذیر است.

$$AI = IA = A$$

(۳) اگر دو ماتریس  $A, B$  تعویض پذیر باشند، آنگاه اتحادهای جبری در آنها برقرار است.

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$$



الفهم  
الرياضيات  
المعاصرة  
العربية

تذکر مهم: دقت کنید که اگر دو ماتریس  $A, B$  تعویض پذیر نباشند، آنگاه نمی توانیم از اتحادهای جبری استفاده کنیم و باید پرانتزها را در هم ضرب کنیم:

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + \underline{AB} + \underline{BA} + B^2$$

$$(A - B)(A + B) = A^2 + \underline{AB} - \underline{BA} - B^2$$



العربية  
 ١٠  
 ١١  
 ١٢  
 ١٣  
 ١٤  
 ١٥  
 ١٦  
 ١٧  
 ١٨  
 ١٩  
 ٢٠  
 ٢١  
 ٢٢  
 ٢٣  
 ٢٤  
 ٢٥  
 ٢٦  
 ٢٧  
 ٢٨  
 ٢٩  
 ٣٠  
 ٣١  
 ٣٢  
 ٣٣  
 ٣٤  
 ٣٥  
 ٣٦  
 ٣٧  
 ٣٨  
 ٣٩  
 ٤٠  
 ٤١  
 ٤٢  
 ٤٣  
 ٤٤  
 ٤٥  
 ٤٦  
 ٤٧  
 ٤٨  
 ٤٩  
 ٥٠  
 ٥١  
 ٥٢  
 ٥٣  
 ٥٤  
 ٥٥  
 ٥٦  
 ٥٧  
 ٥٨  
 ٥٩  
 ٦٠  
 ٦١  
 ٦٢  
 ٦٣  
 ٦٤  
 ٦٥  
 ٦٦  
 ٦٧  
 ٦٨  
 ٦٩  
 ٧٠  
 ٧١  
 ٧٢  
 ٧٣  
 ٧٤  
 ٧٥  
 ٧٦  
 ٧٧  
 ٧٨  
 ٧٩  
 ٨٠  
 ٨١  
 ٨٢  
 ٨٣  
 ٨٤  
 ٨٥  
 ٨٦  
 ٨٧  
 ٨٨  
 ٨٩  
 ٩٠  
 ٩١  
 ٩٢  
 ٩٣  
 ٩٤  
 ٩٥  
 ٩٦  
 ٩٧  
 ٩٨  
 ٩٩  
 ١٠٠

۱/۲۵	در معادله ماتریسی $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x & 2 \end{bmatrix}$ مقدار $x$ را بیابید.	۴
۱	اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ مقادیر $a$ و $b$ را طوری به دست آورید که $A \times B$ ماتریس قطری باشد.	۳
۱	دوماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & m-2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ n+1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ m & 0 & n \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ مفروض اند، اگر $A$ یک ماتریس قطری باشد، حاصل $AB$ را محاسبه کنید.	۳



مجموعه سوالات  
 ۱۳۰۰  
 ۱۳۰۱  
 ۱۳۰۲  
 ۱۳۰۳  
 ۱۳۰۴  
 ۱۳۰۵  
 ۱۳۰۶  
 ۱۳۰۷  
 ۱۳۰۸  
 ۱۳۰۹  
 ۱۳۱۰  
 ۱۳۱۱  
 ۱۳۱۲  
 ۱۳۱۳  
 ۱۳۱۴  
 ۱۳۱۵  
 ۱۳۱۶  
 ۱۳۱۷  
 ۱۳۱۸  
 ۱۳۱۹  
 ۱۳۲۰  
 ۱۳۲۱  
 ۱۳۲۲  
 ۱۳۲۳  
 ۱۳۲۴  
 ۱۳۲۵  
 ۱۳۲۶  
 ۱۳۲۷  
 ۱۳۲۸  
 ۱۳۲۹  
 ۱۳۳۰  
 ۱۳۳۱  
 ۱۳۳۲  
 ۱۳۳۳  
 ۱۳۳۴  
 ۱۳۳۵  
 ۱۳۳۶  
 ۱۳۳۷  
 ۱۳۳۸  
 ۱۳۳۹  
 ۱۳۴۰  
 ۱۳۴۱  
 ۱۳۴۲  
 ۱۳۴۳  
 ۱۳۴۴  
 ۱۳۴۵  
 ۱۳۴۶  
 ۱۳۴۷  
 ۱۳۴۸  
 ۱۳۴۹  
 ۱۳۵۰  
 ۱۳۵۱  
 ۱۳۵۲  
 ۱۳۵۳  
 ۱۳۵۴  
 ۱۳۵۵  
 ۱۳۵۶  
 ۱۳۵۷  
 ۱۳۵۸  
 ۱۳۵۹  
 ۱۳۶۰  
 ۱۳۶۱  
 ۱۳۶۲  
 ۱۳۶۳  
 ۱۳۶۴  
 ۱۳۶۵  
 ۱۳۶۶  
 ۱۳۶۷  
 ۱۳۶۸  
 ۱۳۶۹  
 ۱۳۷۰  
 ۱۳۷۱  
 ۱۳۷۲  
 ۱۳۷۳  
 ۱۳۷۴  
 ۱۳۷۵  
 ۱۳۷۶  
 ۱۳۷۷  
 ۱۳۷۸  
 ۱۳۷۹  
 ۱۳۸۰  
 ۱۳۸۱  
 ۱۳۸۲  
 ۱۳۸۳  
 ۱۳۸۴  
 ۱۳۸۵  
 ۱۳۸۶  
 ۱۳۸۷  
 ۱۳۸۸  
 ۱۳۸۹  
 ۱۳۹۰  
 ۱۳۹۱  
 ۱۳۹۲  
 ۱۳۹۳  
 ۱۳۹۴  
 ۱۳۹۵  
 ۱۳۹۶  
 ۱۳۹۷  
 ۱۳۹۸  
 ۱۳۹۹  
 ۱۴۰۰





# نهال رنگی جمع

هندسه دوازدهم

وارون یک ماتریس



## اپیزود ۳ : وارون یک ماتریس

◀ وارون یک ماتریس :

برای هر ماتریس مربعی مانند  $A$ ، وارون  $A$  ماتریسی است مانند  $B$  بطوریکه؛

$$A \times B = B \times A = I$$

که در اینصورت  $B$  را وارون ماتریس  $A$  نامیده و با  $A^{-1}$  نمایش می‌دهیم.

مثال : ماتریس‌های  $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  وارون یکدیگرند، زیرا :

$$\underline{A \times B} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$B = A^{-1}$$

$$\underline{B \times A} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A = B^{-1}$$



ماتریس وارون  
 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$   
 $B^{-1} = \frac{1}{|B|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$   
 $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$   
 $|B| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$   
 $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$   
 $B^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$   
 $A^{-1} = B^{-1}$   
 $A = B$

محاسبه وارون ماتریس  $2 \times 2$  :

اگر وارون ماتریس  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  ماتریس  $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$  باشد داریم :

$$AA^{-1} = I \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ax + bz & ay + bt \\ cx + dz & cy + dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{d}{ad - bc} \\ z = \frac{-c}{ad - bc} \end{cases}$$

$$, \begin{cases} ay + bt = 0 \\ cy + dt = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{-b}{ad - bc} \\ t = \frac{a}{ad - bc} \end{cases}$$



مجموعه سوالات و پاسخ‌ها

و از آنجا خواهیم داشت :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$



الماتریس معکوس  
 ۱  
 ۲  
 ۳  
 ۴  
 ۵  
 ۶  
 ۷  
 ۸  
 ۹  
 ۱۰  
 ۱۱  
 ۱۲  
 ۱۳  
 ۱۴  
 ۱۵  
 ۱۶  
 ۱۷  
 ۱۸  
 ۱۹  
 ۲۰  
 ۲۱  
 ۲۲  
 ۲۳  
 ۲۴  
 ۲۵  
 ۲۶  
 ۲۷  
 ۲۸  
 ۲۹  
 ۳۰  
 ۳۱  
 ۳۲  
 ۳۳  
 ۳۴  
 ۳۵  
 ۳۶  
 ۳۷  
 ۳۸  
 ۳۹  
 ۴۰  
 ۴۱  
 ۴۲  
 ۴۳  
 ۴۴  
 ۴۵  
 ۴۶  
 ۴۷  
 ۴۸  
 ۴۹  
 ۵۰  
 ۵۱  
 ۵۲  
 ۵۳  
 ۵۴  
 ۵۵  
 ۵۶  
 ۵۷  
 ۵۸  
 ۵۹  
 ۶۰  
 ۶۱  
 ۶۲  
 ۶۳  
 ۶۴  
 ۶۵  
 ۶۶  
 ۶۷  
 ۶۸  
 ۶۹  
 ۷۰  
 ۷۱  
 ۷۲  
 ۷۳  
 ۷۴  
 ۷۵  
 ۷۶  
 ۷۷  
 ۷۸  
 ۷۹  
 ۸۰  
 ۸۱  
 ۸۲  
 ۸۳  
 ۸۴  
 ۸۵  
 ۸۶  
 ۸۷  
 ۸۸  
 ۸۹  
 ۹۰  
 ۹۱  
 ۹۲  
 ۹۳  
 ۹۴  
 ۹۵  
 ۹۶  
 ۹۷  
 ۹۸  
 ۹۹  
 ۱۰۰

مسئله : وارون ماتریس‌های زیر را بیابید :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{15 - 14} \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & -8 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{16 - 24} \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$



تجربا العربية

قضیه یکتایی وارون : وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود منحصر بفرد است.

اثبات : فرض می کنیم ماتریس های  $C, B$  هر دو وارون  $A$  باشند، ثابت می کنیم  $B = C$ .  
طبق فرض داریم :

$$\begin{aligned} \underline{AB = BA = I} \\ \underline{AC = CA = I} \end{aligned}$$

و به کمک فرض داریم :

$$\underline{B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C}$$

پس وارون هر ماتریس مربعی یکتاست.



العربية

◀ خواص وارون یک ماتریس (ماتریس مربعی  $2 \times 2$ ):

$$1) (A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$$

$$2) (kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1} \quad k \in \mathbb{R}$$

$$3) (A^{-1})^{-1} = A$$

اثبات ۱ :

$$(A \times B) \times (B^{-1} \times A^{-1}) = A \times (B \times B^{-1}) \times A^{-1}$$

$$= (A \times I) \times A^{-1} = A \times A^{-1} = I$$

یعنی  $A \times B$  وارون  $B^{-1} \times A^{-1}$  است.



المعجم العربي

اثبات ۲ :

$$(kA) \times \left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = \left(k \times \frac{1}{k}\right)(A \times A^{-1}) = 1 \times I = I$$

یعنی  $\frac{1}{k}A^{-1}$  وارون  $(kA)$  است.

اثبات ۳ :

یعنی  $A$  وارون  $A^{-1}$  است یعنی  $A = (A^{-1})^{-1}$

$$A^{-1} \times A = I$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$



الفهم  
الرياضيات  
الهندسة  
الفيزياء  
الكيمياء  
البيولوجيا  
العلوم  
الاجتماعية  
اللغة العربية

مسئله: اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  و  $(BA)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  باشد، در اینصورت ماتریس B را بیابید.

$$A \times A^{-1} \times B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I \times (B^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B$$



تجربیات علمی

مسئله: اگر  $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$  حاصل عبارت  $2A^{-1} - 3B^{-1}$  را بیابید.



.....



تجربا العربية  
مفاهيم  
الرياضيات  
الفيزياء  
الكيمياء  
البيولوجيا  
العلوم  
الاجتماعية  
الإنجليزية  
الفرنسية  
الألمانية  
اليابانية  
الروسية  
الصينية  
الهندية  
البنغالية  
الاندونيسية  
البرازيلية  
الاسبانية  
البرتغالية  
الغالية  
الاسلامية  
الدينية  
الفلسفة  
التاريخ  
الجغرافيا  
السياسة  
الاقتصاد  
الطب  
الهندسة  
العلوم التطبيقية  
الرياضيات التطبيقية  
العلوم الحاسوبية  
الذكاء الاصطناعي  
الروبوتات  
الفضاء  
البيئة  
العلوم المتعددة التخصصات

مسئله : اگر  $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$  باشد مطلوبست محاسبه  $\left(\frac{3}{5}A\right)^{-1}$ .

$$\frac{3}{5}A^{-1} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{5-6} \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \dots$$



کتابخانه  
موسسه  
گنجینه  
دانش  
کتابخانه  
موسسه  
گنجینه  
دانش

مسئله: اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ x & 3 \end{bmatrix}$  و داشته باشیم  $A^2 + (A^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 15 & 1 \end{bmatrix}$  مقدار  $x$  را بدست آورید.

*(Handwritten notes in pink: 'A' above the second term, 'A^2' under the matrix, and a pink circle around the second term)*



نکته: مقدار  $ad - bc$  را در ماتریس  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  که حاصلضرب درایه‌های روی قطر اصلی منهای حاصلضرب درایه‌های روی قطر فرعی است، «دترمینان» ماتریس  $A$  نامیده و با نماد  $|A|$  نمایش می‌دهیم.

بیشتر مورد استفاده

$$A = \begin{bmatrix} a & d \\ b & c \end{bmatrix}; |A| = ad - bc$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = A \rightarrow |A| = 5 - (-3) = 8$$

$$|A|^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$



◀ وارون پذیری یک ماتریس مربعی :

ماتریس مربعی  $A$  را وارون پذیر گوئیم هرگاه دترمینان آن مخالف صفر باشد و برعکس.

$A$  وارون پذیر است.  $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

بدیهی است اگر  $|A| = 0$  باشد، ماتریس  $A$  وارون ندارد.

مسئله : وارون ماتریس زیر را بدست آورید :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \quad |A| = 12 - 12 = 0 \rightarrow A^{-1} \text{ وجود ندارد.}$$



العربية

مسئله: اگر ماتریس  $A = \begin{bmatrix} -a & 4 \\ -9 & a \end{bmatrix}$  وارون پذیر نباشد، مقدار  $a$  را حساب کنید.

$$|A| = 0 \rightarrow -a^2 + 36 = 0 \rightarrow a^2 = 36 \rightarrow a = \pm 6$$



مسئله: به ازای چه مقادیری از  $m$  ماتریس  $\begin{bmatrix} m^2 - m & m - 1 \\ m & 1 \end{bmatrix}$  وارون پذیر است؟  
 معادله  $|A| = 0$

$$|A| \neq 0 \rightarrow m^2 - m - m(m - 1) \neq 0$$

$$\cancel{m^2} - \cancel{m} - \cancel{m} + m \neq 0$$

$$0 \neq 0$$



المعادلة  
 $2x + 1 = 0$   
 $x = -\frac{1}{2}$   
 $x = -0.5$

# ویژه امتحان نهایی

سؤالات امتحان نهایی درس : هندسه ۳	رشته : ریاضی فیزیک	تاریخ امتحان: ۱۳۹۸/۳/۲	ساعت شروع: ۸ صبح
پایه: دوازدهم دوره دوم متوسطه	نام و نام خانوادگی :	مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه	تعداد صفحه: ۲
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۸		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>	
ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد)		
نمره			

استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی و رادیکال) مجاز است .

۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید .	۱
۱	الف) شرط لازم و کافی برای اینکه ماتریس مربعی $A$ وارون پذیر باشد آن است که دترمینان ماتریس $A$ ..... باشد .	

جی زلف صفر



ماده ۱۰۰ قانون اساسی  
ماده ۱۰۱ قانون اساسی  
ماده ۱۰۲ قانون اساسی  
ماده ۱۰۳ قانون اساسی  
ماده ۱۰۴ قانون اساسی  
ماده ۱۰۵ قانون اساسی  
ماده ۱۰۶ قانون اساسی  
ماده ۱۰۷ قانون اساسی  
ماده ۱۰۸ قانون اساسی  
ماده ۱۰۹ قانون اساسی  
ماده ۱۱۰ قانون اساسی  
ماده ۱۱۱ قانون اساسی  
ماده ۱۱۲ قانون اساسی  
ماده ۱۱۳ قانون اساسی  
ماده ۱۱۴ قانون اساسی  
ماده ۱۱۵ قانون اساسی  
ماده ۱۱۶ قانون اساسی  
ماده ۱۱۷ قانون اساسی  
ماده ۱۱۸ قانون اساسی  
ماده ۱۱۹ قانون اساسی  
ماده ۱۲۰ قانون اساسی  
ماده ۱۲۱ قانون اساسی  
ماده ۱۲۲ قانون اساسی  
ماده ۱۲۳ قانون اساسی  
ماده ۱۲۴ قانون اساسی  
ماده ۱۲۵ قانون اساسی  
ماده ۱۲۶ قانون اساسی  
ماده ۱۲۷ قانون اساسی  
ماده ۱۲۸ قانون اساسی  
ماده ۱۲۹ قانون اساسی  
ماده ۱۳۰ قانون اساسی  
ماده ۱۳۱ قانون اساسی  
ماده ۱۳۲ قانون اساسی  
ماده ۱۳۳ قانون اساسی  
ماده ۱۳۴ قانون اساسی  
ماده ۱۳۵ قانون اساسی  
ماده ۱۳۶ قانون اساسی  
ماده ۱۳۷ قانون اساسی  
ماده ۱۳۸ قانون اساسی  
ماده ۱۳۹ قانون اساسی  
ماده ۱۴۰ قانون اساسی  
ماده ۱۴۱ قانون اساسی  
ماده ۱۴۲ قانون اساسی  
ماده ۱۴۳ قانون اساسی  
ماده ۱۴۴ قانون اساسی  
ماده ۱۴۵ قانون اساسی  
ماده ۱۴۶ قانون اساسی  
ماده ۱۴۷ قانون اساسی  
ماده ۱۴۸ قانون اساسی  
ماده ۱۴۹ قانون اساسی  
ماده ۱۵۰ قانون اساسی

سؤالات امتحان نهایی درس: هندسه ۳	تعداد صفحه: ۳	تاریخ امتحان: ۱۳۹۹/۴/۱۴	ساعت شروع: ۸ صبح
پایه: دوازدهم دوره دوم متوسطه	نام و نام خانوادگی:	مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه	رشته: ریاضی فیزیک
دانش آموزان <b>روزانه</b> سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۹		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>	

ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد)	نمره
------	-------------------------	------

استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی و رادیکال) مجاز است.

الف) بخش الزامی  $|A| = 0 \rightarrow -6a - 24 = 0$

دانش آموزان عزیز به سوالات ا تا ۱۲ (جهت کسب ۱۶ نمره پاسخ دهید).

$-6a = 24 \rightarrow a = -4$

۱

جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

۱

الف) اگر  $A = \begin{bmatrix} a & 8 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$  وارون پذیر نباشد، مقدار  $a$  برابر ..... است.

ب) اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه های روی قطر اصلی با هم برابر باشند آن را یک ماتریس ..... می نامیم.

الکالر



۱/۲۵

ماتریس A را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

در تساوی ماتریسی

۳

$$A = \frac{1}{18 - 12} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \dots$$

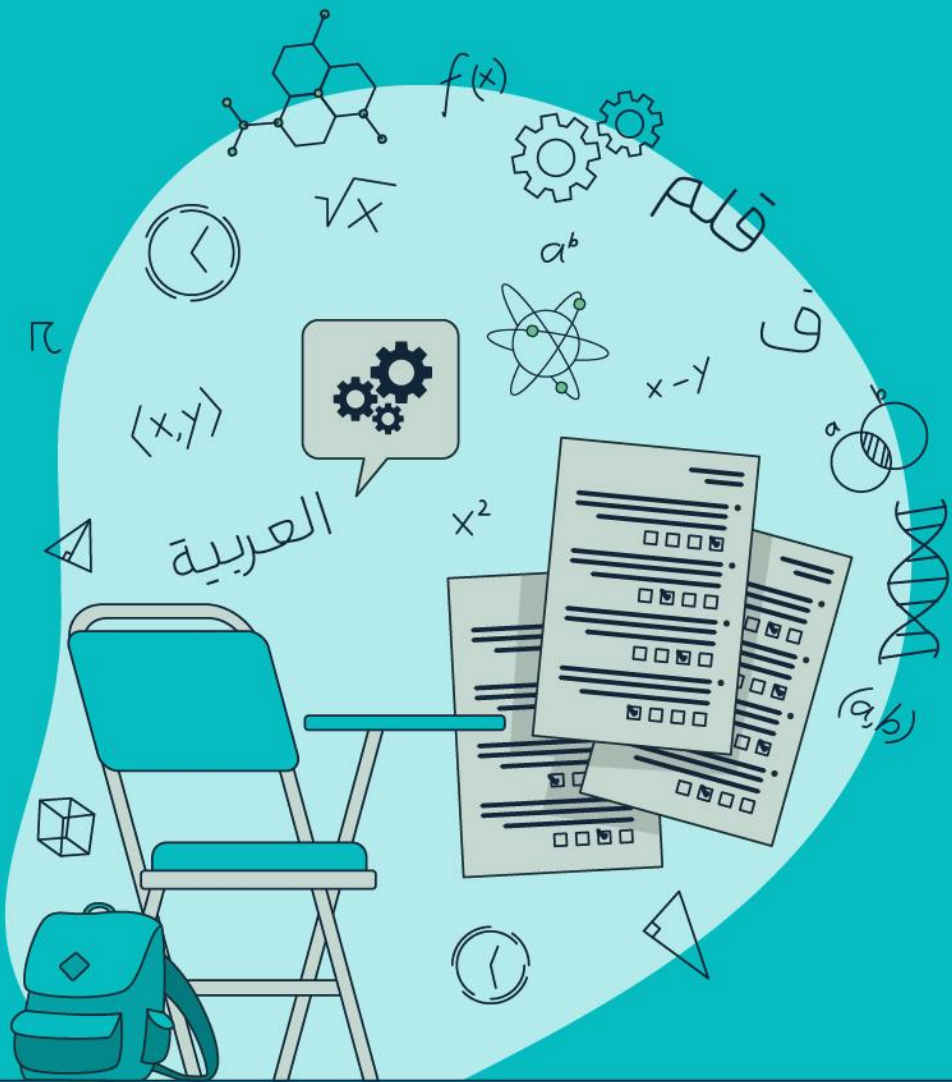




# نهنگی در جمع

هندسه دوازدهم

حل دستگاه دو معادله و دو  
مجهول با ماتریس وارون



## اپیزود ۴ : حل دستگاه دو معادله و دو مجهولی با واتریس وارون

◀ حل دستگاه معادلات دو مجهولی به کمک ماتریس وارون :

دستگاه روبرو را در نظر بگیرید :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

$$B = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$$

ماتریس‌های زیر را تعریف می‌کنیم :

(۱) ماتریس ضرایب

(۲) ماتریس مجهولات

(۳) ماتریس مقادیر معلوم (اعداد ثابت)

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$$

ماتریس ضرایب

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



ماتریس وارون

ماتریس مجهولات  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

ماتریس اعداد ثابت  $B = \begin{bmatrix} C \\ C' \end{bmatrix}$

$$AX = B$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

طرفین رابطه  $AX = B$  را در  $A^{-1}$  ضرب می کنیم:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow IX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

از دست چپ ۰ ۰

توجه: ضرب از دست چپ و درون ماتریس



فصل ۱۰

نتیجه: برای پیدا کردن جواب‌های دستگاه دو معادله و دو مجهولی کافی است وارون ماتریس ضرایب را در

ماتریس اعداد ثابت ضرب کنیم.

$$\begin{cases} x - 3y = -7 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= A^{-1} \times B = \frac{1}{2+6} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ 7 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 14 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.75 \\ 0.875 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 1.75 \\ y = 0.875 \end{cases} \end{aligned}$$



تجربه العربية

◀ شرط وجود جواب در دستگاه دو معادله و دو مجهولی:

شرط اینکه دستگاه دو معادله دو مجهولی جواب منحصر بفرد داشته باشد آن است که دترمینان ماتریس

ضرایب مخالف صفر باشد.

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -4x + 2 = 7 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 2 - 4 = 0$$

دستگاه  
جواب منحصر بفرد ندارد.  
چونیند



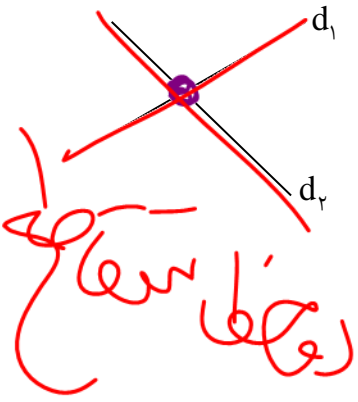
المعادلة  
المجهول  
المعروف

بحث در وجود جواب‌های دستگاه دو معادله و دو مجهولی :

دستگاه  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$  در حقیقت دو معادله خط را نشان می‌دهد که هدف از حل دستگاه پیدا کردن نقطه

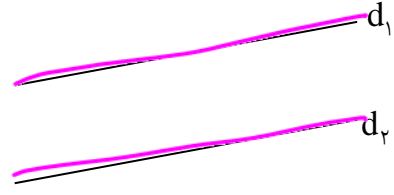
برخورد دو خط است.

$|A| \neq 0$



دو خط متقاطع

$|A| = 0$



دو خط موازی  
هیچ جواب ندارند

$|A| = 0$



دو خط منطبق  
بسیار جواب دارند



المعادلة العربية

ماتریس ضرایب دستگاه را در نظر بگیرید :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}; |A| = ab' - a'b$$

برای داشتن جواب منحصر بفرد :

$$|A| \neq 0 \Rightarrow ab' - a'b \neq 0 \Rightarrow ab' \neq a'b \Rightarrow \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$$



و در نتیجه در حالت کلی داریم :

$$ax + by = c$$

$$a'x + b'y = c'$$

$$1) \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$$

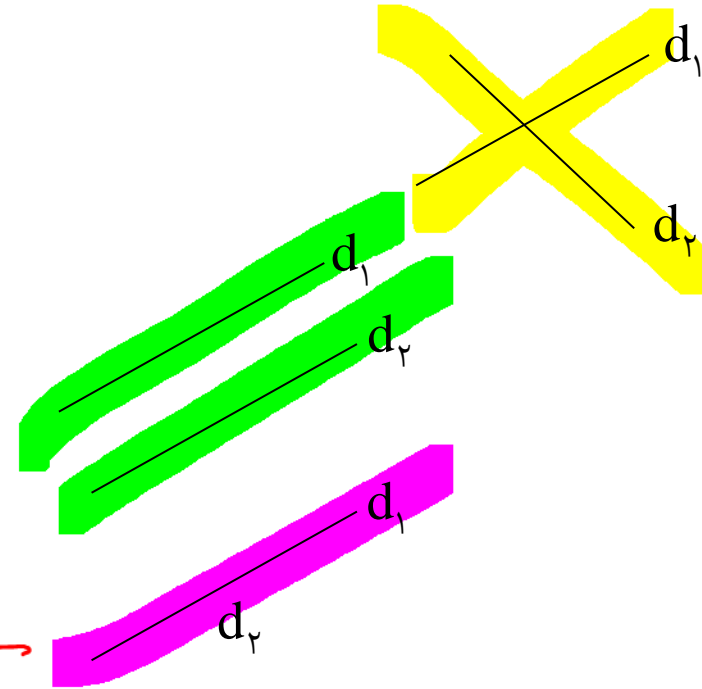
دستگاه جواب منحصر بفرد دارد.

$$2) \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

دستگاه جواب ندارد.

$$3) \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

دستگاه بیشمار جواب دارد.



المنهج  
الرياضي  
المعاصر  
الجزء  
الثاني  
الفصل  
الاول  
المعادن  
الخطية

مسئله : به ازای چه مقداری از  $k$  دستگاه  $\begin{cases} kx + 3y = 4 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$  یک دسته جواب منحصر بفرد دارد؟

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \rightarrow \frac{k}{1} \neq \frac{3}{-2}$$

$$\rightarrow k \neq -\frac{3}{2} \rightarrow k \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$$



الماتematica  
 ٢٠٢١/٢٠٢٢  
 ١٤٤٣  
 ١٤٤٤  
 ١٤٤٥  
 ١٤٤٦  
 ١٤٤٧  
 ١٤٤٨  
 ١٤٤٩  
 ١٤٥٠  
 ١٤٥١  
 ١٤٥٢  
 ١٤٥٣  
 ١٤٥٤  
 ١٤٥٥  
 ١٤٥٦  
 ١٤٥٧  
 ١٤٥٨  
 ١٤٥٩  
 ١٤٦٠  
 ١٤٦١  
 ١٤٦٢  
 ١٤٦٣  
 ١٤٦٤  
 ١٤٦٥  
 ١٤٦٦  
 ١٤٦٧  
 ١٤٦٨  
 ١٤٦٩  
 ١٤٧٠  
 ١٤٧١  
 ١٤٧٢  
 ١٤٧٣  
 ١٤٧٤  
 ١٤٧٥  
 ١٤٧٦  
 ١٤٧٧  
 ١٤٧٨  
 ١٤٧٩  
 ١٤٨٠  
 ١٤٨١  
 ١٤٨٢  
 ١٤٨٣  
 ١٤٨٤  
 ١٤٨٥  
 ١٤٨٦  
 ١٤٨٧  
 ١٤٨٨  
 ١٤٨٩  
 ١٤٩٠  
 ١٤٩١  
 ١٤٩٢  
 ١٤٩٣  
 ١٤٩٤  
 ١٤٩٥  
 ١٤٩٦  
 ١٤٩٧  
 ١٤٩٨  
 ١٤٩٩  
 ١٥٠٠

مسئله : به ازای کدام مقدار  $a$  دستگاه  

$$\begin{cases} 2x - y = a \\ ax + 2y = 3 \end{cases}$$
 جواب ندارد؟

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

$$\frac{2}{a} = \frac{-1}{2} \neq \frac{a}{3} \rightarrow \frac{-1}{2} = \frac{2}{a} \neq \frac{3}{a}$$

$$a = -6$$



الgebra  
 2  
 3  
 4  
 5  
 6  
 7  
 8  
 9  
 10  
 11  
 12  
 13  
 14  
 15  
 16  
 17  
 18  
 19  
 20  
 21  
 22  
 23  
 24  
 25  
 26  
 27  
 28  
 29  
 30  
 31  
 32  
 33  
 34  
 35  
 36  
 37  
 38  
 39  
 40  
 41  
 42  
 43  
 44  
 45  
 46  
 47  
 48  
 49  
 50  
 51  
 52  
 53  
 54  
 55  
 56  
 57  
 58  
 59  
 60  
 61  
 62  
 63  
 64  
 65  
 66  
 67  
 68  
 69  
 70  
 71  
 72  
 73  
 74  
 75  
 76  
 77  
 78  
 79  
 80  
 81  
 82  
 83  
 84  
 85  
 86  
 87  
 88  
 89  
 90  
 91  
 92  
 93  
 94  
 95  
 96  
 97  
 98  
 99  
 100

مسئله : دستگاه زیر را به روش ماتریس وارون حل کنید :

$$\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \frac{1}{4 - 12} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{-8} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$



تجربا العربية  
ماتریس وارون

مسئله : بر روی وجود یا عدم وجود و تعداد جواب‌های دستگاه‌های زیر بحث کنید.

الف) 
$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ -2x - 6y = 1 \end{cases}$$

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \neq \frac{c}{c_1}$$

$$\frac{1}{-2} = \frac{3}{-6} \neq \frac{5}{1}$$

رشته‌های جواب ندارند

ب) 
$$\begin{cases} -2x + 3y = 2 \\ 4x - 6y = -4 \end{cases}$$

$$\frac{-2}{4} = \frac{3}{-6} = \frac{2}{-4}$$

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$$

رشته‌های بی‌شمار جواب دارند



مسئله : به ازای چه مقداری از  $k$  دستگاه زیر بیشمار جواب دارد؟

$$\begin{cases} 2x - ky = 3 \\ kx - 8y = k + 2 \end{cases}$$

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$$

$$\frac{2}{k} = \frac{-k}{-8} = \frac{3}{k+2}$$

غلط  $k = -2 : \frac{-1}{2} = \frac{-1}{2} \neq \frac{-3}{2}$

درست  $k = 2 : \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \checkmark$

$$-k^2 = -16 \rightarrow k^2 = 16 \rightarrow k = \pm 4$$



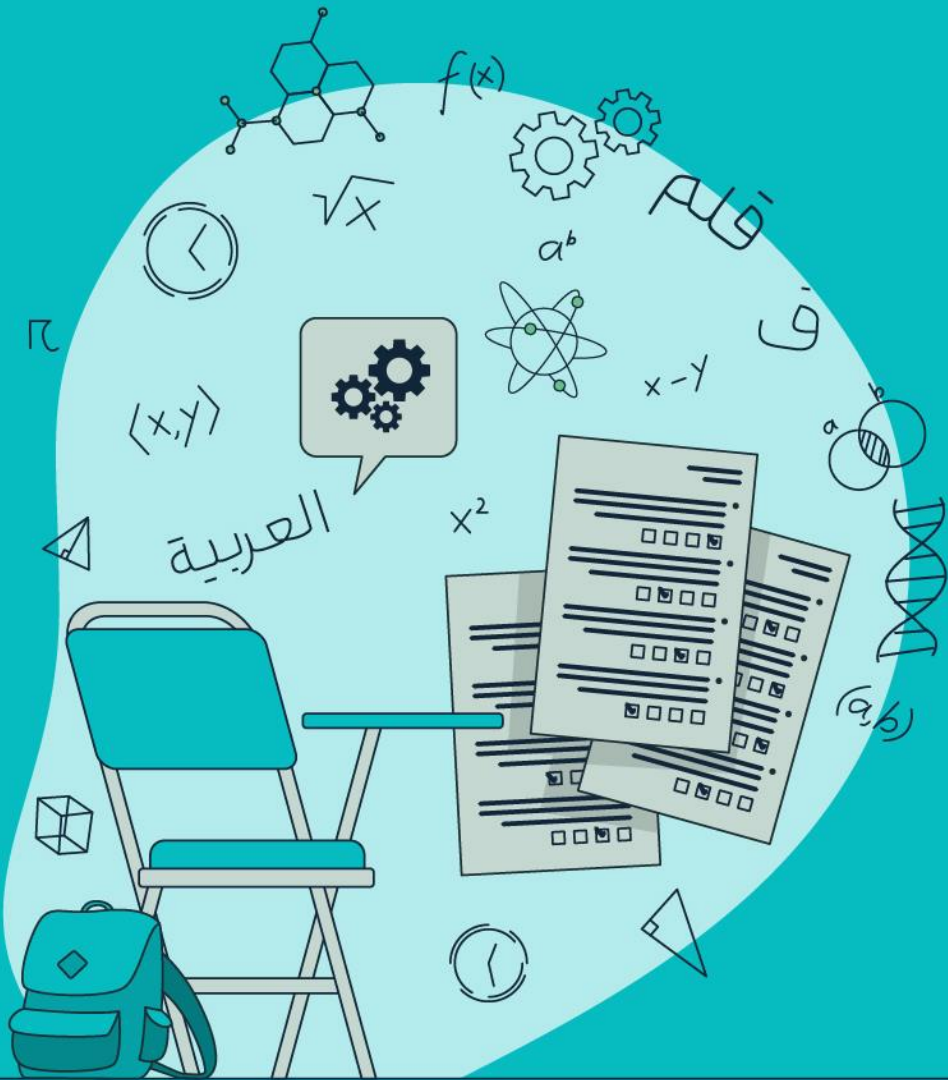
تجربا العربية

۱/۲۵	مقدار $m$ را چنان بیابید که دستگاه $\begin{cases} mx + 3y = -3 \\ 4x + (m + 4)y = 2 \end{cases}$ جواب نداشته باشد.	۵
۱	جواب دستگاه زیر را در صورت وجود، با استفاده از ماتریس وارون بیابید. $\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$	۵



۲۰۲۰/۲۰۲۱  
 امتحان نهایی  
 ریاضیات  
 پایه دهم





# نهال درد جمع

هندسه دوازدهم

دترمینان ماتریس مربعی و

خواص آن



## اپیزود ۵: دترمینان ماتریس مربعی و خواص آن

دترمینان یک ماتریس مربعی :

به هر ماتریس مربعی می‌توان یک عدد حقیقی نسبت داد که دترمینان آن ماتریس نامیده می‌شود. دترمینان ماتریس مربعی  $A$  را با نماد  $\det(A)$  یا  $|A|$  نمایش می‌دهند.

محاسبه دترمینان ماتریس مربعی  $2 \times 2$  :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = ad - bc$$



فصل ۱  
فصل ۲  
فصل ۳  
فصل ۴  
فصل ۵  
فصل ۶  
فصل ۷  
فصل ۸  
فصل ۹  
فصل ۱۰  
فصل ۱۱  
فصل ۱۲  
فصل ۱۳  
فصل ۱۴  
فصل ۱۵  
فصل ۱۶  
فصل ۱۷  
فصل ۱۸  
فصل ۱۹  
فصل ۲۰  
فصل ۲۱  
فصل ۲۲  
فصل ۲۳  
فصل ۲۴  
فصل ۲۵  
فصل ۲۶  
فصل ۲۷  
فصل ۲۸  
فصل ۲۹  
فصل ۳۰  
فصل ۳۱  
فصل ۳۲  
فصل ۳۳  
فصل ۳۴  
فصل ۳۵  
فصل ۳۶  
فصل ۳۷  
فصل ۳۸  
فصل ۳۹  
فصل ۴۰  
فصل ۴۱  
فصل ۴۲  
فصل ۴۳  
فصل ۴۴  
فصل ۴۵  
فصل ۴۶  
فصل ۴۷  
فصل ۴۸  
فصل ۴۹  
فصل ۵۰  
فصل ۵۱  
فصل ۵۲  
فصل ۵۳  
فصل ۵۴  
فصل ۵۵  
فصل ۵۶  
فصل ۵۷  
فصل ۵۸  
فصل ۵۹  
فصل ۶۰  
فصل ۶۱  
فصل ۶۲  
فصل ۶۳  
فصل ۶۴  
فصل ۶۵  
فصل ۶۶  
فصل ۶۷  
فصل ۶۸  
فصل ۶۹  
فصل ۷۰  
فصل ۷۱  
فصل ۷۲  
فصل ۷۳  
فصل ۷۴  
فصل ۷۵  
فصل ۷۶  
فصل ۷۷  
فصل ۷۸  
فصل ۷۹  
فصل ۸۰  
فصل ۸۱  
فصل ۸۲  
فصل ۸۳  
فصل ۸۴  
فصل ۸۵  
فصل ۸۶  
فصل ۸۷  
فصل ۸۸  
فصل ۸۹  
فصل ۹۰  
فصل ۹۱  
فصل ۹۲  
فصل ۹۳  
فصل ۹۴  
فصل ۹۵  
فصل ۹۶  
فصل ۹۷  
فصل ۹۸  
فصل ۹۹  
فصل ۱۰۰

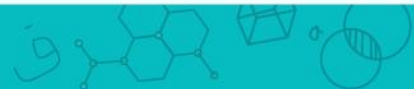
مثال :  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \dots = 7 - 15 = -8$

$A = \begin{bmatrix} \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 2 \\ \hline -1 & 1 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 5 \\ \hline 2 & 11 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & -3 \\ \hline 1 & 5 \\ \hline \end{array} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 13 \end{bmatrix}$

$\Sigma - 12$        $\Sigma + 2$   
 $\Sigma - 11$        $\Sigma + 12$

مسئله : دترمینان ماتریس زیر را حساب کنید :

$|A| = 12 + 4 = 16$



المعادن  
الطاقة  
البيئة  
العلوم  
التكنولوجيا

مسئله: اگر  $A = \begin{bmatrix} |A| & 2 \\ 1 & |A| \end{bmatrix}$  باشد،  $|A|$  را بیابید.

$$|A| = |A|^2 - 2 \xrightarrow{|A|=x} x^2 - x - 2 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = -1 \rightarrow |A| = -1 \\ x = 2 \rightarrow |A| = 2 \end{cases}$$



مجموعه  
مفاهیم  
مهم  
در  
آزمون  
نهایی  
ریاضی  
فصل  
اول  
و  
دوم

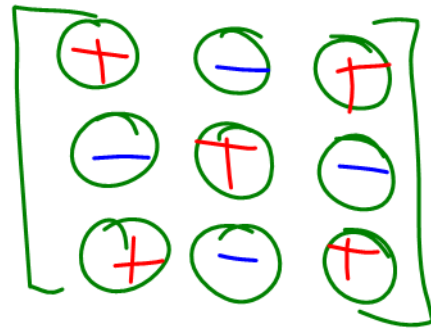
## محاسبه دترمینان ماتریس مربعی $3 \times 3$ :

روش اول ← روش بسط دادن نسبت به یک سطر یا ستون

در هر سطر یا ستون، سطر و ستون هر درایه را حذف کرده و دترمینان ماتریس  $2 \times 2$  باقیمانده را حساب کرده و در آن درایه ضرب می‌کنیم و سپس هر سه عدد را با هم جمع می‌کنیم. علامت هر یک از اعداد بصورت  $(-1)^{i+j}$  تعیین می‌شود.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Diagram illustrating the expansion of the determinant along the first row. The first row is highlighted in yellow. The elements  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ , and  $a_{13}$  are circled in red, blue, and green respectively. The signs  $+$ ,  $-$ , and  $+$  are written above them. The signs  $+$ ,  $-$ , and  $+$  are also written below the corresponding elements in the second and third rows.



$$|A| = (-1)^1 a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^2 a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^3 a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$



المعادن  
الرياضيات  
الفيزياء  
الكيمياء  
البيولوجيا  
الطب  
الهندسة  
العلوم  
التكنولوجيا

$$|A| = (-1)^r a_{1r} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^r a_{2r} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^r a_{3r} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

مسئله : دترمینان ماتریس‌های زیر را حساب کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = 1(1 - 12) - (-1)(2 + 4) + 2(8 + 2)$$

$$= -11 + 6 + 20 = 15$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = 2(18 + 4) - 2(10 - 4) = 44 - 14 = 30$$



تجربیات کاربردی

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = -\sum (1 - 3) = -20$$

همواره بسط دادن نسبت به سطر یا ستونی که تعداد صفر بیشتری دارد ساده‌تر است.



روش دوم ← روش ساروس

دو ستون اول و دوم ماتریس را سمت راست آن نوشته و آنگاه دترمینان ماتریس برابر است با مجموع حاصلضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی و دو قطر موازی آن، منهای مجموع حاصلضرب درایه‌های واقع بر قطر فرعی و دو قطر موازی آن.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{bmatrix}$$

$$|A| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$



الgebra  
عربی  
ماتریس  
دترمینان  
روش ساروس

مسئله : دترمینان ماتریس زیر را به روش ساروس حساب کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(0 + 2 \times 2 + 3 \times 5) - (0 + 3 \times 0 + 2 \times 18)$$

$$99 - 22 = 77$$



مجموعه  
مفاهیم  
مهم  
در  
ماتریس  
و  
دترمینان

مسئله : اگر داشته باشیم

$$A + x \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 1 \\ x & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

آنگاه مقدار  $A$  را حساب کنید.



مسئله: اگر ماتریس  $A = \begin{bmatrix} -6 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}$  وارون پذیر نباشد، مقادیر  $a$  را حساب کنید.

$$|A| = 0$$

$$a(-a-1) - (-1)(9-0) = 0$$

$$-a^2 - a + 9 = 0$$

$$a^2 + a - 9 = 0 \rightarrow (a+3)(a-2) = 0$$

$$\underline{a = -3} \quad \underline{a = 2}$$



## خواص دترمینان یک ماتریس :

(۱) دترمینان حاصلضرب دو ماتریس مربعی با حاصلضرب دترمینان آنها برابر است.

$$|AB| = |A||B|$$

(۲) دترمینان هر ماتریس مربعی صفر، برابر صفر است.

$$|\bar{O}| = 0$$

(۳) دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با حاصلضرب درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس.

$$A = \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot \\ \cdot & b & \cdot \\ \cdot & \cdot & c \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = abc$$



الکلیات  
الفصل  
۱  
۲  
۳  
۴  
۵  
۶  
۷  
۸  
۹  
۱۰  
۱۱  
۱۲  
۱۳  
۱۴  
۱۵  
۱۶  
۱۷  
۱۸  
۱۹  
۲۰  
۲۱  
۲۲  
۲۳  
۲۴  
۲۵  
۲۶  
۲۷  
۲۸  
۲۹  
۳۰  
۳۱  
۳۲  
۳۳  
۳۴  
۳۵  
۳۶  
۳۷  
۳۸  
۳۹  
۴۰  
۴۱  
۴۲  
۴۳  
۴۴  
۴۵  
۴۶  
۴۷  
۴۸  
۴۹  
۵۰  
۵۱  
۵۲  
۵۳  
۵۴  
۵۵  
۵۶  
۵۷  
۵۸  
۵۹  
۶۰  
۶۱  
۶۲  
۶۳  
۶۴  
۶۵  
۶۶  
۶۷  
۶۸  
۶۹  
۷۰  
۷۱  
۷۲  
۷۳  
۷۴  
۷۵  
۷۶  
۷۷  
۷۸  
۷۹  
۸۰  
۸۱  
۸۲  
۸۳  
۸۴  
۸۵  
۸۶  
۸۷  
۸۸  
۸۹  
۹۰  
۹۱  
۹۲  
۹۳  
۹۴  
۹۵  
۹۶  
۹۷  
۹۸  
۹۹  
۱۰۰

(۴) برای خروج ضریب ماتریس از داخل دترمینان، ضریب را به توان مرتبه ماتریس می‌رسانیم.

$$|kA_{2 \times 2}| = k^2 |A|$$

$$|kA_{3 \times 3}| = k^3 |A|$$

$$|kA_{n \times n}| = k^n |A|$$



مسئله: اگر  $A$  ماتریس اسکالر مرتبه ۳ بوده و  $a_{11} = ۳$  باشد، آنگاه دترمینان  $A$  را محاسبه کنید.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 3^3 = 27$$



تجربها العربية

(۵) دترمینان ماتریس همانی، برابر یک است.

$$|\mathbf{I}_{2 \times 2}| = |\mathbf{I}_{3 \times 3}| = 1$$

(۶) برای هر ماتریس مربعی داریم :

$$|\mathbf{A}^n| = |\mathbf{A}|^n$$

$$|\mathbf{A}^r| = |\mathbf{A}|^r$$

$$|\mathbf{A}^c| = |\mathbf{A}|^c$$



المعادن  
الهندسة  
الرياضيات  
الفيزياء  
الكيمياء  
البيولوجيا  
الطب  
العلوم  
التكنولوجيا  
البيئة  
الاجتماع  
الاقتصاد  
السياسة  
الفلسفة  
الدين  
الثقافة  
التاريخ  
اللغة  
الفن  
الرياضة  
الترفيه  
الصحة  
السلامة  
البيئة  
التكنولوجيا  
العلوم  
البيولوجيا  
الطب  
الكيمياء  
الفيزياء  
الهندسة  
المعادن

(۷) دترمینان وارون ماتریس  $A$  با وارون دترمینان آن برابر است :

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

می‌دانیم  $AA^{-1} = I \Rightarrow |AA^{-1}| = |I|$

$\Rightarrow \frac{|A||A^{-1}|}{|A|} = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

اثبات :



العربية  
الرياضيات  
الفيزياء  
الكيمياء  
البيولوجيا  
العلوم  
الاجتماعية  
الإنجليزية  
التاريخ  
الفن  
الرياضة

مسئله: اگر  $A$  ماتریسی  $2 \times 2$  و  $|A| = 3$  باشد حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$|A^3| - 3|A^{-1}| + 5 =$$

$$|A|^3 - 3 \frac{1}{|A|} + 5 = 3^3 - 3 \times \frac{1}{3} + 5 = 27 - 1 + 5 = 31$$



مسئله: اگر  $A$  ماتریسی  $3 \times 3$  و  $|A| = 5$  باشد، حاصل  $|A|A$  را بیابید.

$$|5A| = 5^3 |A| = 5^3 = 125$$

$$|A|A = |A|^2 = 25$$



تجربا العربية  
 2  
 3  
 4  
 5  
 6  
 7  
 8  
 9  
 10  
 11  
 12  
 13  
 14  
 15  
 16  
 17  
 18  
 19  
 20  
 21  
 22  
 23  
 24  
 25  
 26  
 27  
 28  
 29  
 30  
 31  
 32  
 33  
 34  
 35  
 36  
 37  
 38  
 39  
 40  
 41  
 42  
 43  
 44  
 45  
 46  
 47  
 48  
 49  
 50

مسئله: اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$  باشند حاصل  $|B^T A|$  را حساب کنید.

$$|B^T| \times |A| = |B|^T \times |A| =$$



الکیمیاء  
الرياضيات  
الفيزياء  
العلوم  
الطبيعية

مسئله: اگر  $|A| = 2$  و  $A$  ماتریس مربعی مرتبه ۳ باشد، در اینصورت دترمینان ماتریس  $-4A^3$  چقدر است؟

$$\begin{aligned}
 |(-4A^3)| &= (-4)^3 |A^3| = -64 |A|^3 = -64 \times 2^3 \\
 &= -64 \times 8 = -512
 \end{aligned}$$



مجموعه  
 ۲۰۲۰  
 ۱۴۰۳  
 ۱۴۰۲  
 ۱۴۰۱  
 ۱۴۰۰  
 ۱۳۹۹  
 ۱۳۹۸  
 ۱۳۹۷  
 ۱۳۹۶  
 ۱۳۹۵  
 ۱۳۹۴  
 ۱۳۹۳  
 ۱۳۹۲  
 ۱۳۹۱  
 ۱۳۹۰  
 ۱۳۸۹  
 ۱۳۸۸  
 ۱۳۸۷  
 ۱۳۸۶  
 ۱۳۸۵  
 ۱۳۸۴  
 ۱۳۸۳  
 ۱۳۸۲  
 ۱۳۸۱  
 ۱۳۸۰  
 ۱۳۷۹  
 ۱۳۷۸  
 ۱۳۷۷  
 ۱۳۷۶  
 ۱۳۷۵  
 ۱۳۷۴  
 ۱۳۷۳  
 ۱۳۷۲  
 ۱۳۷۱  
 ۱۳۷۰  
 ۱۳۶۹  
 ۱۳۶۸  
 ۱۳۶۷  
 ۱۳۶۶  
 ۱۳۶۵  
 ۱۳۶۴  
 ۱۳۶۳  
 ۱۳۶۲  
 ۱۳۶۱  
 ۱۳۶۰  
 ۱۳۵۹  
 ۱۳۵۸  
 ۱۳۵۷  
 ۱۳۵۶  
 ۱۳۵۵  
 ۱۳۵۴  
 ۱۳۵۳  
 ۱۳۵۲  
 ۱۳۵۱  
 ۱۳۵۰  
 ۱۳۴۹  
 ۱۳۴۸  
 ۱۳۴۷  
 ۱۳۴۶  
 ۱۳۴۵  
 ۱۳۴۴  
 ۱۳۴۳  
 ۱۳۴۲  
 ۱۳۴۱  
 ۱۳۴۰  
 ۱۳۳۹  
 ۱۳۳۸  
 ۱۳۳۷  
 ۱۳۳۶  
 ۱۳۳۵  
 ۱۳۳۴  
 ۱۳۳۳  
 ۱۳۳۲  
 ۱۳۳۱  
 ۱۳۳۰  
 ۱۳۲۹  
 ۱۳۲۸  
 ۱۳۲۷  
 ۱۳۲۶  
 ۱۳۲۵  
 ۱۳۲۴  
 ۱۳۲۳  
 ۱۳۲۲  
 ۱۳۲۱  
 ۱۳۲۰  
 ۱۳۱۹  
 ۱۳۱۸  
 ۱۳۱۷  
 ۱۳۱۶  
 ۱۳۱۵  
 ۱۳۱۴  
 ۱۳۱۳  
 ۱۳۱۲  
 ۱۳۱۱  
 ۱۳۱۰  
 ۱۳۰۹  
 ۱۳۰۸  
 ۱۳۰۷  
 ۱۳۰۶  
 ۱۳۰۵  
 ۱۳۰۴  
 ۱۳۰۳  
 ۱۳۰۲  
 ۱۳۰۱  
 ۱۳۰۰  
 ۱۲۹۹  
 ۱۲۹۸  
 ۱۲۹۷  
 ۱۲۹۶  
 ۱۲۹۵  
 ۱۲۹۴  
 ۱۲۹۳  
 ۱۲۹۲  
 ۱۲۹۱  
 ۱۲۹۰  
 ۱۲۸۹  
 ۱۲۸۸  
 ۱۲۸۷  
 ۱۲۸۶  
 ۱۲۸۵  
 ۱۲۸۴  
 ۱۲۸۳  
 ۱۲۸۲  
 ۱۲۸۱  
 ۱۲۸۰  
 ۱۲۷۹  
 ۱۲۷۸  
 ۱۲۷۷  
 ۱۲۷۶  
 ۱۲۷۵  
 ۱۲۷۴  
 ۱۲۷۳  
 ۱۲۷۲  
 ۱۲۷۱  
 ۱۲۷۰  
 ۱۲۶۹  
 ۱۲۶۸  
 ۱۲۶۷  
 ۱۲۶۶  
 ۱۲۶۵  
 ۱۲۶۴  
 ۱۲۶۳  
 ۱۲۶۲  
 ۱۲۶۱  
 ۱۲۶۰  
 ۱۲۵۹  
 ۱۲۵۸  
 ۱۲۵۷  
 ۱۲۵۶  
 ۱۲۵۵  
 ۱۲۵۴  
 ۱۲۵۳  
 ۱۲۵۲  
 ۱۲۵۱  
 ۱۲۵۰  
 ۱۲۴۹  
 ۱۲۴۸  
 ۱۲۴۷  
 ۱۲۴۶  
 ۱۲۴۵  
 ۱۲۴۴  
 ۱۲۴۳  
 ۱۲۴۲  
 ۱۲۴۱  
 ۱۲۴۰  
 ۱۲۳۹  
 ۱۲۳۸  
 ۱۲۳۷  
 ۱۲۳۶  
 ۱۲۳۵  
 ۱۲۳۴  
 ۱۲۳۳  
 ۱۲۳۲  
 ۱۲۳۱  
 ۱۲۳۰  
 ۱۲۲۹  
 ۱۲۲۸  
 ۱۲۲۷  
 ۱۲۲۶  
 ۱۲۲۵  
 ۱۲۲۴  
 ۱۲۲۳  
 ۱۲۲۲  
 ۱۲۲۱  
 ۱۲۲۰  
 ۱۲۱۹  
 ۱۲۱۸  
 ۱۲۱۷  
 ۱۲۱۶  
 ۱۲۱۵  
 ۱۲۱۴  
 ۱۲۱۳  
 ۱۲۱۲  
 ۱۲۱۱  
 ۱۲۱۰  
 ۱۲۰۹  
 ۱۲۰۸  
 ۱۲۰۷  
 ۱۲۰۶  
 ۱۲۰۵  
 ۱۲۰۴  
 ۱۲۰۳  
 ۱۲۰۲  
 ۱۲۰۱  
 ۱۲۰۰  
 ۱۱۹۹  
 ۱۱۹۸  
 ۱۱۹۷  
 ۱۱۹۶  
 ۱۱۹۵  
 ۱۱۹۴  
 ۱۱۹۳  
 ۱۱۹۲  
 ۱۱۹۱  
 ۱۱۹۰  
 ۱۱۸۹  
 ۱۱۸۸  
 ۱۱۸۷  
 ۱۱۸۶  
 ۱۱۸۵  
 ۱۱۸۴  
 ۱۱۸۳  
 ۱۱۸۲  
 ۱۱۸۱  
 ۱۱۸۰  
 ۱۱۷۹  
 ۱۱۷۸  
 ۱۱۷۷  
 ۱۱۷۶  
 ۱۱۷۵  
 ۱۱۷۴  
 ۱۱۷۳  
 ۱۱۷۲  
 ۱۱۷۱  
 ۱۱۷۰  
 ۱۱۶۹  
 ۱۱۶۸  
 ۱۱۶۷  
 ۱۱۶۶  
 ۱۱۶۵  
 ۱۱۶۴  
 ۱۱۶۳  
 ۱۱۶۲  
 ۱۱۶۱  
 ۱۱۶۰  
 ۱۱۵۹  
 ۱۱۵۸  
 ۱۱۵۷  
 ۱۱۵۶  
 ۱۱۵۵  
 ۱۱۵۴  
 ۱۱۵۳  
 ۱۱۵۲  
 ۱۱۵۱  
 ۱۱۵۰  
 ۱۱۴۹  
 ۱۱۴۸  
 ۱۱۴۷  
 ۱۱۴۶  
 ۱۱۴۵  
 ۱۱۴۴  
 ۱۱۴۳  
 ۱۱۴۲  
 ۱۱۴۱  
 ۱۱۴۰  
 ۱۱۳۹  
 ۱۱۳۸  
 ۱۱۳۷  
 ۱۱۳۶  
 ۱۱۳۵  
 ۱۱۳۴  
 ۱۱۳۳  
 ۱۱۳۲  
 ۱۱۳۱  
 ۱۱۳۰  
 ۱۱۲۹  
 ۱۱۲۸  
 ۱۱۲۷  
 ۱۱۲۶  
 ۱۱۲۵  
 ۱۱۲۴  
 ۱۱۲۳  
 ۱۱۲۲  
 ۱۱۲۱  
 ۱۱۲۰  
 ۱۱۱۹  
 ۱۱۱۸  
 ۱۱۱۷  
 ۱۱۱۶  
 ۱۱۱۵  
 ۱۱۱۴  
 ۱۱۱۳  
 ۱۱۱۲  
 ۱۱۱۱  
 ۱۱۱۰  
 ۱۱۰۹  
 ۱۱۰۸  
 ۱۱۰۷  
 ۱۱۰۶  
 ۱۱۰۵  
 ۱۱۰۴  
 ۱۱۰۳  
 ۱۱۰۲  
 ۱۱۰۱  
 ۱۱۰۰  
 ۱۰۹۹  
 ۱۰۹۸  
 ۱۰۹۷  
 ۱۰۹۶  
 ۱۰۹۵  
 ۱۰۹۴  
 ۱۰۹۳  
 ۱۰۹۲  
 ۱۰۹۱  
 ۱۰۹۰  
 ۱۰۸۹  
 ۱۰۸۸  
 ۱۰۸۷  
 ۱۰۸۶  
 ۱۰۸۵  
 ۱۰۸۴  
 ۱۰۸۳  
 ۱۰۸۲  
 ۱۰۸۱  
 ۱۰۸۰  
 ۱۰۷۹  
 ۱۰۷۸  
 ۱۰۷۷  
 ۱۰۷۶  
 ۱۰۷۵  
 ۱۰۷۴  
 ۱۰۷۳  
 ۱۰۷۲  
 ۱۰۷۱  
 ۱۰۷۰  
 ۱۰۶۹  
 ۱۰۶۸  
 ۱۰۶۷  
 ۱۰۶۶  
 ۱۰۶۵  
 ۱۰۶۴  
 ۱۰۶۳  
 ۱۰۶۲  
 ۱۰۶۱  
 ۱۰۶۰  
 ۱۰۵۹  
 ۱۰۵۸  
 ۱۰۵۷  
 ۱۰۵۶  
 ۱۰۵۵  
 ۱۰۵۴  
 ۱۰۵۳  
 ۱۰۵۲  
 ۱۰۵۱  
 ۱۰۵۰  
 ۱۰۴۹  
 ۱۰۴۸  
 ۱۰۴۷  
 ۱۰۴۶  
 ۱۰۴۵  
 ۱۰۴۴  
 ۱۰۴۳  
 ۱۰۴۲  
 ۱۰۴۱  
 ۱۰۴۰  
 ۱۰۳۹  
 ۱۰۳۸  
 ۱۰۳۷  
 ۱۰۳۶  
 ۱۰۳۵  
 ۱۰۳۴  
 ۱۰۳۳  
 ۱۰۳۲  
 ۱۰۳۱  
 ۱۰۳۰  
 ۱۰۲۹  
 ۱۰۲۸  
 ۱۰۲۷  
 ۱۰۲۶  
 ۱۰۲۵  
 ۱۰۲۴  
 ۱۰۲۳  
 ۱۰۲۲  
 ۱۰۲۱  
 ۱۰۲۰  
 ۱۰۱۹  
 ۱۰۱۸  
 ۱۰۱۷  
 ۱۰۱۶  
 ۱۰۱۵  
 ۱۰۱۴  
 ۱۰۱۳  
 ۱۰۱۲  
 ۱۰۱۱  
 ۱۰۱۰  
 ۱۰۰۹  
 ۱۰۰۸  
 ۱۰۰۷  
 ۱۰۰۶  
 ۱۰۰۵  
 ۱۰۰۴  
 ۱۰۰۳  
 ۱۰۰۲  
 ۱۰۰۱  
 ۱۰۰۰

مسئله : به ازای چه مقداری از  $m$  دترمینان ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ m & 5 \end{bmatrix}$  با دترمینان وارونش برابر است؟

$$|A| = |A^{-1}| \rightarrow |A| = \frac{1}{|A|} \rightarrow |A|^2 = 1 \rightarrow |A| = \pm 1$$

نتیجه!

$$1 + 2m = \pm 1$$

}
 $m = \dots$ 
 $m = \dots$



۱	<p>اگر <math>A = \begin{bmatrix} 2 &amp; 3 &amp; 4 \\ 0 &amp; 2 &amp; 3 \\ 0 &amp; 1 &amp; 2 \end{bmatrix}</math> باشد، حاصل <math> A^3 </math> را محاسبه کنید.</p>	۳
۱/۷۵	<p>دو ماتریس <math>A = \begin{bmatrix} 2 &amp; m-2 \\ n+1 &amp; 1 \end{bmatrix}</math> و <math>B = \begin{bmatrix} 2 &amp; 1 &amp; 1 \\ m &amp; 0 &amp; n \\ 3 &amp; -1 &amp; 2 \end{bmatrix}</math> مفروض اند. اگر <math>A</math> یک ماتریس قطری باشد، حاصل <math> A  +  B </math> را محاسبه کنید.</p>	۳
۱/۲۵	<p>الف) اگر <math>A = \begin{bmatrix}  A  &amp; 8 \\ 3 &amp; 5 \end{bmatrix}</math> در این صورت حاصل <math> A </math> را بیابید. ب) ماتریس وارون <math>A</math> را حساب کنید.</p>	۴



المعادن العنصرية

اگر  $2A = \begin{bmatrix} |A| & -4 \\ 1 & |A| \end{bmatrix}$  باشد، در این صورت حاصل  $|A^{-1}|$  را بیابید.

$$|2A| = |A|^2 + \Sigma$$

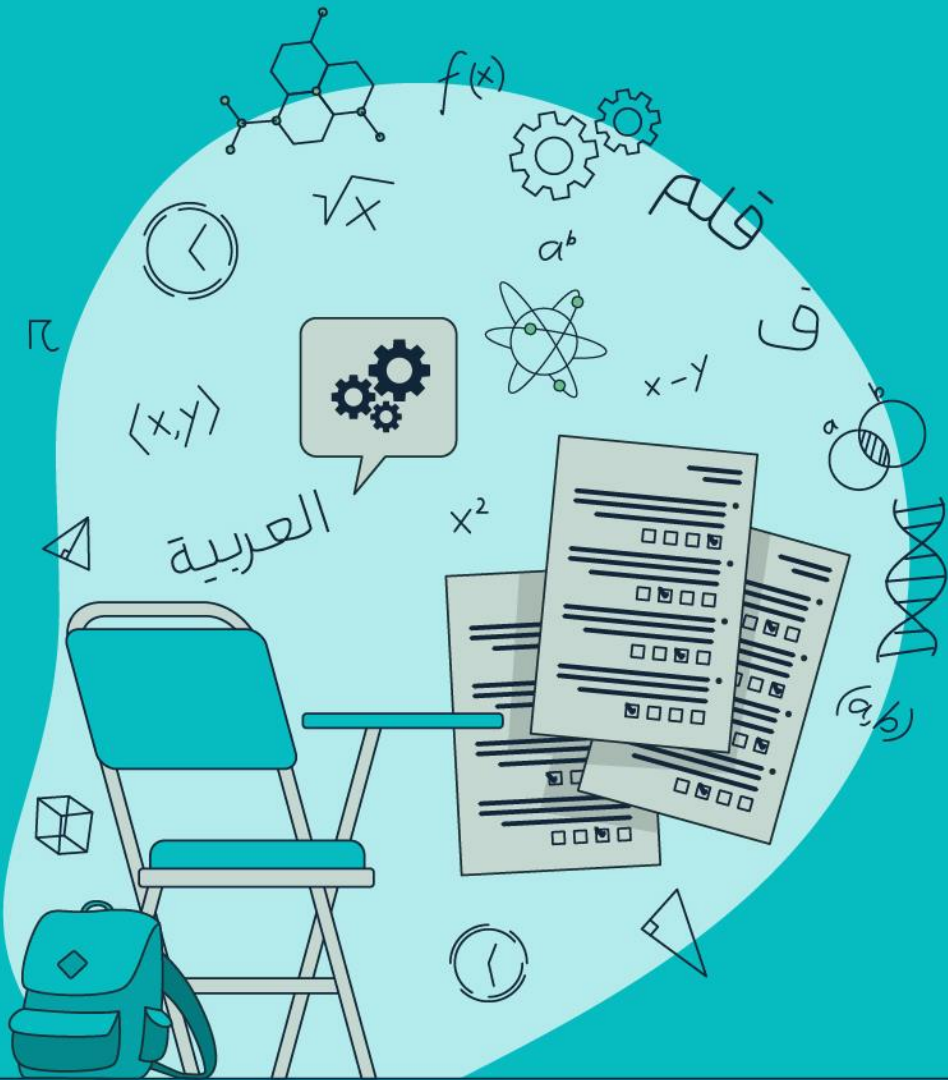
$$\Sigma |A| = |A|^2 + \Sigma$$

$$|A|^2 - \Sigma |A| + \Sigma = 0$$

$$(|A| - 2)^2 = 0 \rightarrow |A| = 2$$







# نهال درخت جمع

هندسه دوازدهم

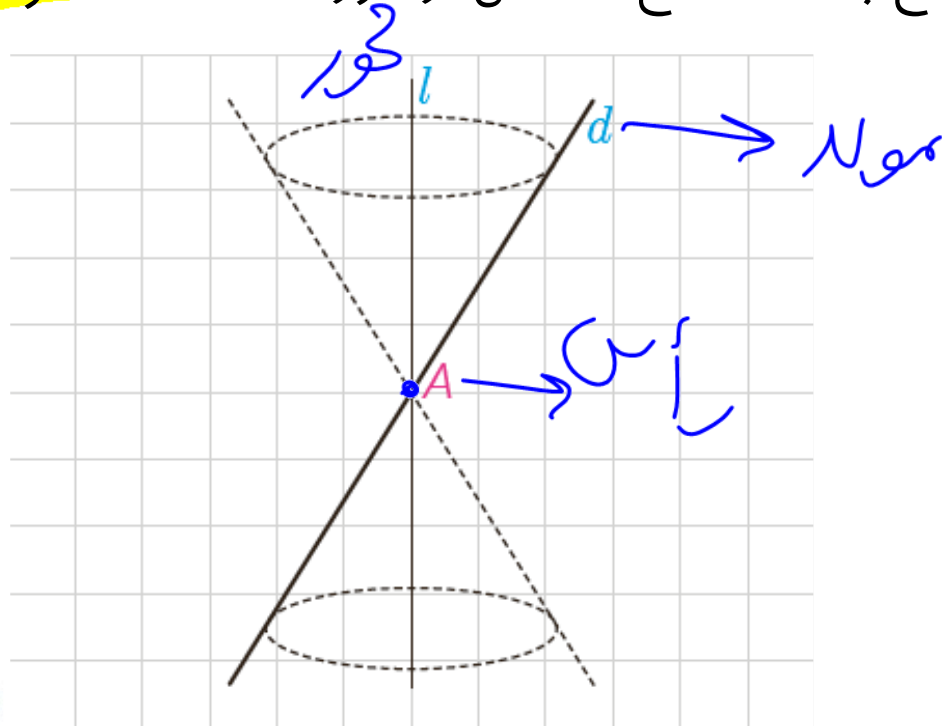
مقاطع مخروطی و

مکان هندسی



## اپیزود ۶: مقاطع مخروطی و مکان هندسی

رویه مخروطی: فرض کنید دو خط  $d, l$  در نقطه  $A$  متقاطع باشند. سطح حاصل از دوران خط  $d$  حول



خط  $l$  را یک رویه مخروطی (سطح مخروطی) می‌نامیم.

$A$ : رأس رویه مخروطی

$l$ : محور رویه مخروطی

$d$ : مولد رویه مخروطی



◀ فصل مشترک یک صفحه و یک سطح مخروطی: اگر صفحه  $P$  رویه مخروطی را قطع کند یکی از

شکل‌های زیر ممکن است از فصل مشترک آنها حاصل شود:

نقطه - خط - دایره - بیضی - سهمی - هذلولی

مقاطع مخروطی

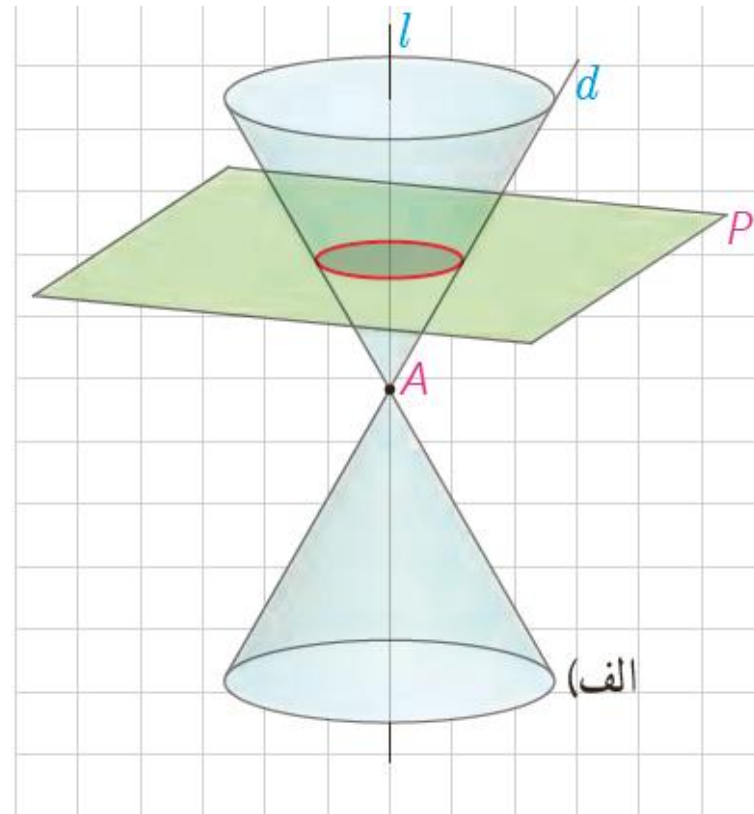
غیرمخروطی



الکلیات  
هندسه  
معماری  
عربی  
فصل مشترک  
سطح مخروطی  
صفحه

(۱) اگر صفحه  $P$  بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس رویه عبور نکند، فصل مشترک آنها یک دایره

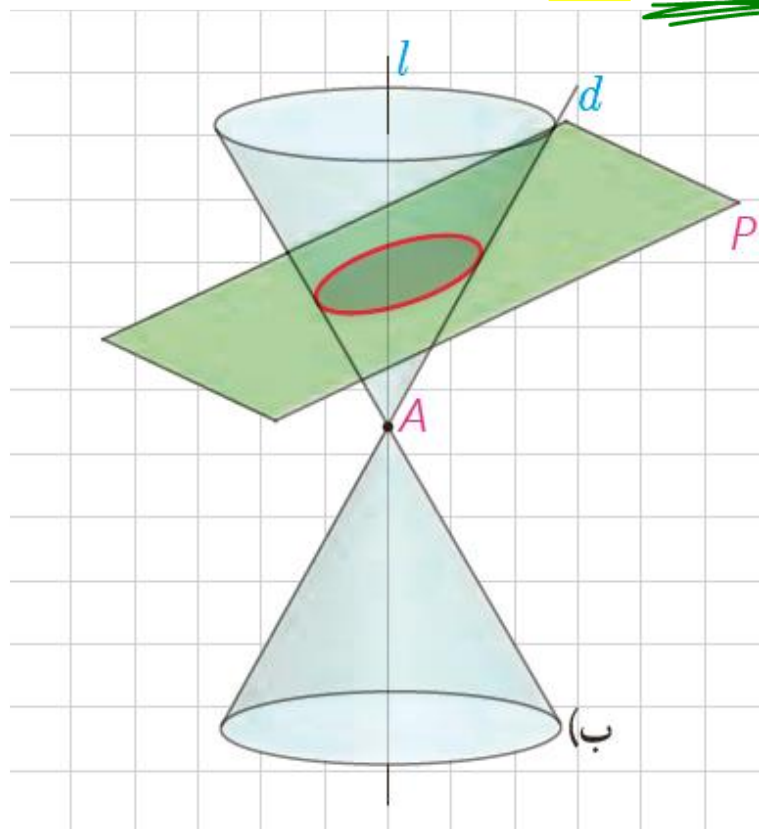
است:



۲) اگر صفحه  $P$  بر محور رویه مخروطی عمود بوده و از رأس رویه نیز بگذرد، فصل مشترک آنها یک نقطه است که همان رأس رویه است.

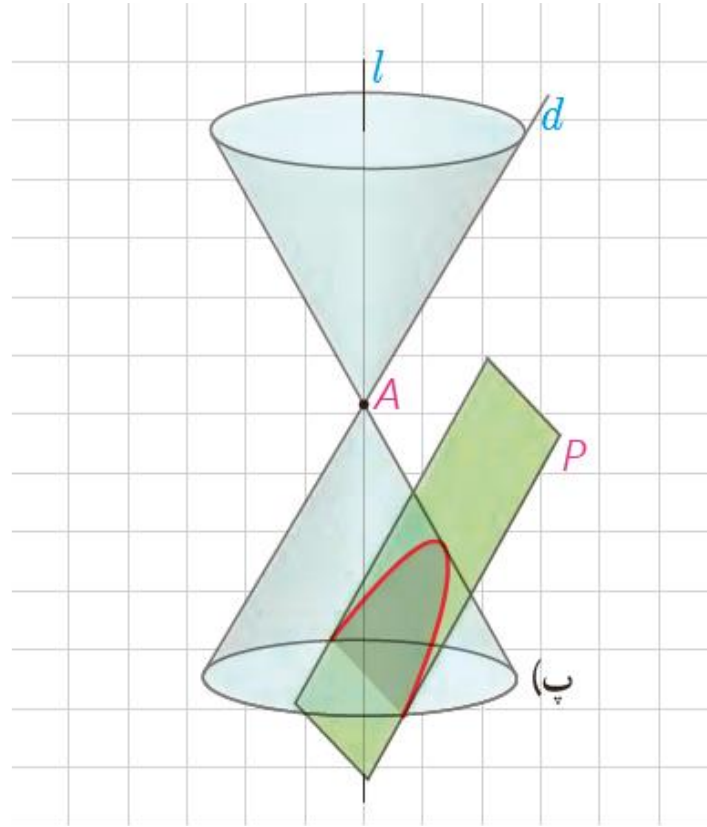


۳) اگر صفحه  $P$  بر محور رویه عمود نباشد و با مولد رویه نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، فصل مشترک آنها یک بیضی است.



العربية  
المعاصرة  
الرياضيات  
الفيزياء  
الكيمياء  
البيولوجيا  
التاريخ  
الجغرافيا  
العلوم  
الاجتماعية  
الادب  
الفنون  
الرياضيات  
الفيزياء  
الكيمياء  
البيولوجيا  
التاريخ  
الجغرافيا  
العلوم  
الاجتماعية  
الادب  
الفنون

۴) اگر صفحه  $P$  با مولد رویه موازی باشد و از رأس رویه عبور نکند، فصل مشترک یک سهمی است.



الکعبه  
المربع  
المثلث  
الدائرة  
المستطيل  
المخروط  
الاسطوانة  
الكرة  
المكعب  
المشربان  
البرق  
الشمس  
القمر  
النجوم  
الفضاء  
الزمن  
الطاقة  
الحرارة  
البرودة  
اللون  
الذوق  
الشم  
الظل  
الريح  
المطر  
الثلج  
البرق  
الشمس  
القمر  
النجوم  
الفضاء  
الزمن  
الطاقة  
الحرارة  
البرودة  
اللون  
الذوق  
الشم  
الظل  
الريح  
المطر  
الثلج

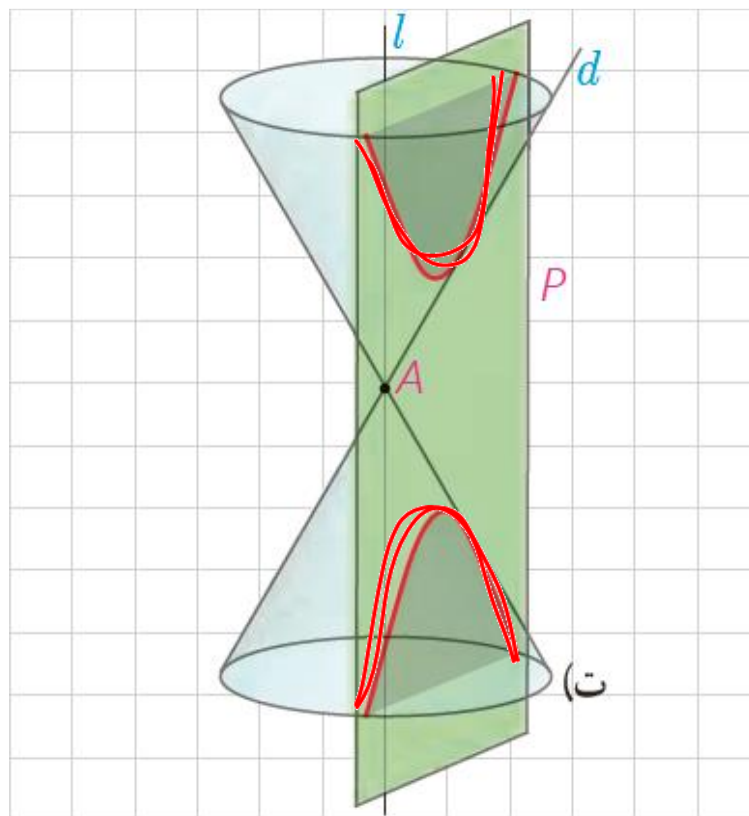
۵) اگر صفحه P با مولد رویه موازی بوده و از رأس رویه نیز عبور کند، فصل مشترک آنها یک خط است که همان مولد رویه است.

خط لایزرها



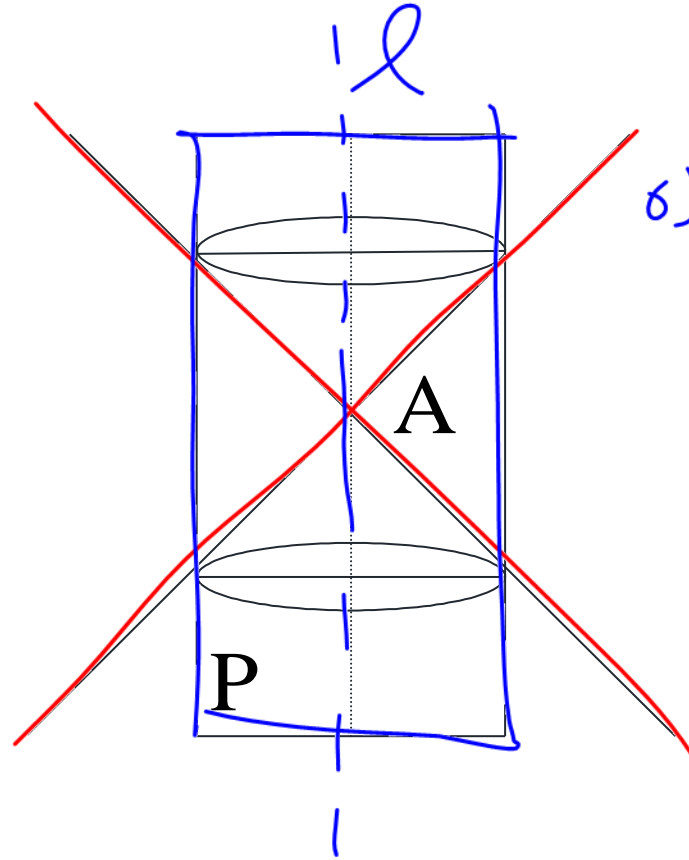
الکیمیا  
الفلسفة  
الطبیعة  
الرياضیة  
التاريخ  
الجغرافیا  
الاجتماع  
السیاسة  
الادب  
اللغة العربیة

۶) اگر صفحه  $P$  هر دو تکه بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند، فصل مشترک آنها یک هذلولی خواهد بود.



فصل مشترک هذلولی خواهد بود.

(۷) اگر صفحه P شامل محور سطح مخروطی آنها برش دهد، فصل مشترک حاصل دو خط متقاطع است.



صعق P هوردنگه؛ لادری بین رلقوع کرده

وازراس عبورکنند

رطق متقاطع



المعربية  
الرياض  
2017  
المعربية  
الرياض  
2017

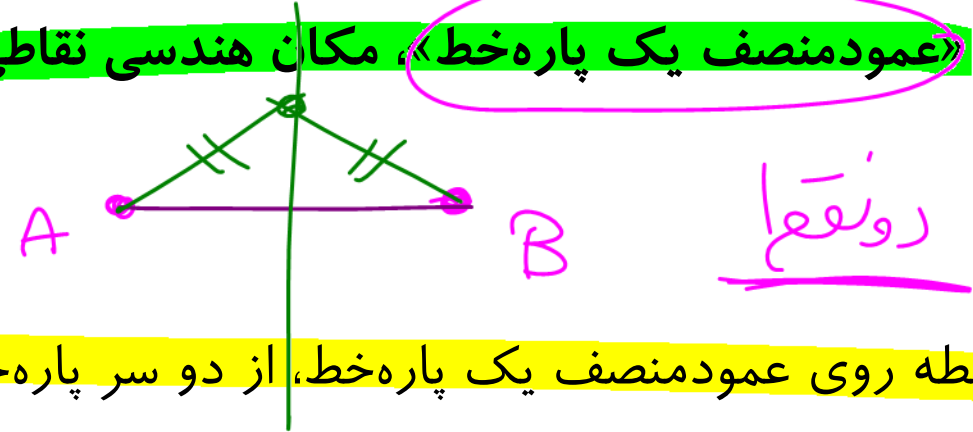
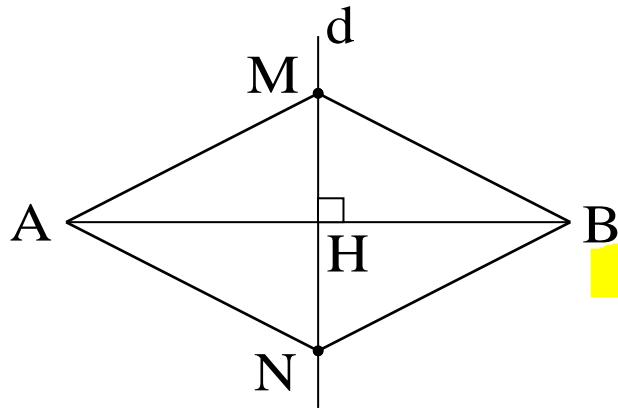
◀ **مکان هندسی**: مجموعه نقاطی را گویند که همگی دارای یک ویژگی مشترک هستند و همچنین هر نقطه‌ای که دارای ویژگی مورد نظر باشد، عضو این مجموعه است.

◀ هر مکان هندسی بیانگر این قضیه دوشروطی است که معمولاً با اصطلاح «اگر و فقط اگر» بیان می‌شود.



العربية  
الرياضية  
العلوم  
الطبیعیة

مثال ۱: «عمودمنصف یک پاره‌خط» مکان هندسی نقاطی است که از دو سر پاره‌خط به یک فاصله‌اند.



(۱) هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.

(۲) هر نقطه‌ای که از دو سر پاره‌خط به یک فاصله باشد روی عمودمنصف پاره‌خط قرار دارد

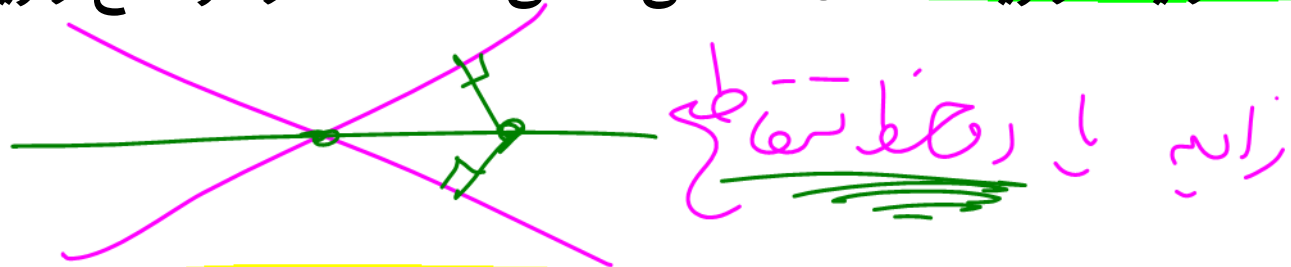
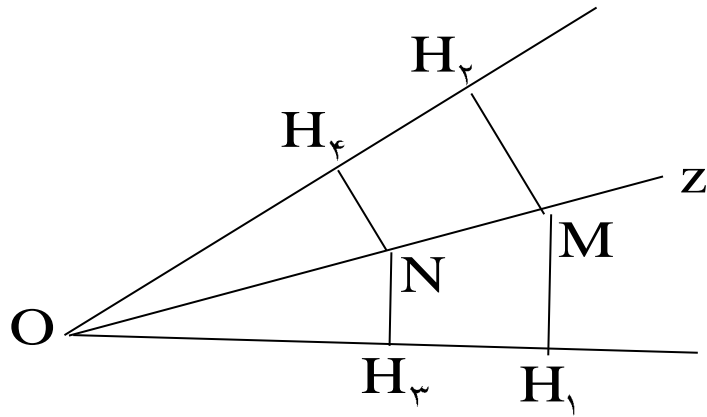
◀ بیان مکان هندسی عمودمنصف به صورت دوشرطی: یک نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط است اگر و فقط اگر از دو سر پاره‌خط به یک فاصله باشد.

$$M \in d, AB \text{ عمودمنصف } \Leftrightarrow MA = MB$$



المعادن  
الکیمیاء  
الطبیعیة

مثال ۲: «نیمساز یک زاویه»، مکان هندسی نقاطی است که از دو ضلع زاویه به یک فاصله‌اند.



(۱) هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

(۲) هر نقطه‌ای که از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز زاویه قرار دارد.

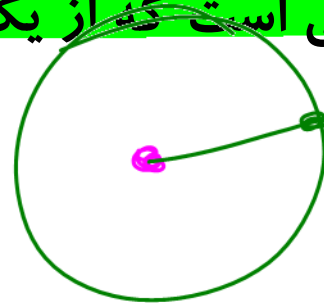
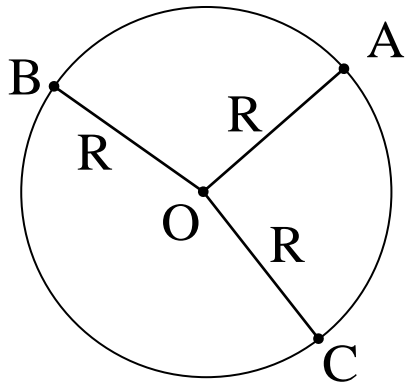
◀ بیان مکان هندسی نیمساز بصورت دوشرطی: یک نقطه روی نیمساز زاویه است اگر و فقط اگر از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد.

$$M \in Oz, \hat{xOy} \text{ نیمساز } Oz \Rightarrow MH_1 = MH_2$$



فصل ۱۰ - مکان هندسی نقاطی که از دو خط متقاطع به یک فاصله است

مثال ۳: «دایره» مکان هندسی نقاطی است که از یک نقطه ثابت در صفحه، به فاصله ثابت قرار دارند.



یک نقطه

(۱) هر نقطه روی دایره از مرکز آن به فاصله ثابت شعاع دایره قرار دارد.

(۲) هر نقطه که از مرکز دایره به فاصله ثابت شعاع دایره باشد، روی دایره قرار دارد.

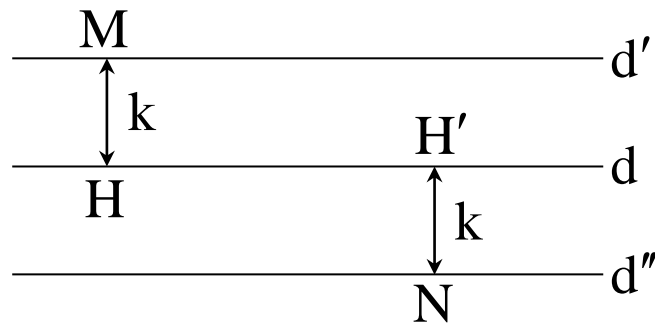
◀ بیان مکان هندسی دایره بصورت دوشرطی: نقطه  $A$  روی دایره  $C(O, R)$  است اگر و فقط اگر فاصله  $A$  از مرکز  $O$  برابر شعاع  $R$  باشد.

$$A \in C(O, R) \Leftrightarrow OA = R$$



فصل ۱۰  
مکان هندسی  
دایره  
شعاع  
رادیوس  
مركز  
نقطه  
فاصله  
مکان هندسی  
دایره  
شعاع  
رادیوس  
مركز  
نقطه  
فاصله  
مکان هندسی  
دایره  
شعاع  
رادیوس  
مركز  
نقطه  
فاصله

مثال ۴: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط مفروض  $d$  در صفحه به فاصله ثابت  $k$  قرار داشته باشند،



دو خط موازی، با خط  $d$  و در طرفین  $d$  و به فاصله  $k$  از  $d$  است.



(۱) هر نقطه روی یکی از دو خط  $d'$  یا  $d''$  از خط  $d$  به فاصله  $k$  قرار دارد.

(۲) هر نقطه که از خط  $d$  به فاصله ثابت  $k$  باشد، روی یکی از دو خط  $d'$  یا  $d''$  است.

بیان مکان هندسی دو خط موازی به صورت دوشرطی: یک نقطه در صفحه از خط مفروض  $d$  به فاصله

$k$  است اگر و فقط اگر روی یکی از دو خط  $d'$  و  $d''$  که موازی  $d$  هستند و به فاصله  $k$  از  $d$  قرار دارند واقع

باشد.

$$M \in \begin{matrix} d' \\ d'' \end{matrix} \Leftrightarrow MH = k$$



جمع‌بندی ۴ مثال ارائه شده و ارائه ۴ مکان هندسی مهم :

(۱) مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه ثابت  $A$  و  $B$  در صفحه به فاصله یکسان باشند، عمودمنصف  $AB$  است.

(۲) مکان هندسی نقاطی که از دو ضلع زاویه  $xoy$  به فاصله یکسان قرار دارند، نیمساز آن زاویه است.

(۳) مکان هندسی نقاطی که از نقطه ثابت  $O$  به فاصله ثابت  $R$  قرار دارند، دایره‌ای است به مرکز  $O$  و شعاع  $R$ .

(۴) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط مفروض  $d$  به فاصله ثابت  $k$  قرار دارند، دو خط موازی  $d$  و به فاصله  $k$  از آن در طرفین آن است.



فصل ۱  
۲  
۳  
۴  
۵  
۶  
۷  
۸  
۹  
۱۰  
۱۱  
۱۲  
۱۳  
۱۴  
۱۵  
۱۶  
۱۷  
۱۸  
۱۹  
۲۰  
۲۱  
۲۲  
۲۳  
۲۴  
۲۵  
۲۶  
۲۷  
۲۸  
۲۹  
۳۰  
۳۱  
۳۲  
۳۳  
۳۴  
۳۵  
۳۶  
۳۷  
۳۸  
۳۹  
۴۰  
۴۱  
۴۲  
۴۳  
۴۴  
۴۵  
۴۶  
۴۷  
۴۸  
۴۹  
۵۰  
۵۱  
۵۲  
۵۳  
۵۴  
۵۵  
۵۶  
۵۷  
۵۸  
۵۹  
۶۰  
۶۱  
۶۲  
۶۳  
۶۴  
۶۵  
۶۶  
۶۷  
۶۸  
۶۹  
۷۰  
۷۱  
۷۲  
۷۳  
۷۴  
۷۵  
۷۶  
۷۷  
۷۸  
۷۹  
۸۰  
۸۱  
۸۲  
۸۳  
۸۴  
۸۵  
۸۶  
۸۷  
۸۸  
۸۹  
۹۰  
۹۱  
۹۲  
۹۳  
۹۴  
۹۵  
۹۶  
۹۷  
۹۸  
۹۹  
۱۰۰

◀ کاربرد مکان هندسی : مهم‌ترین کاربرد مکان‌های هندسی، ترسیم‌های هندسی و یافتن نقاطی است که دارای ویژگی مشخص و مشترکی هستند.

اگر  $S_1$  و  $S_2$  به ترتیب مکان هندسی نقاطی با ویژگی  $P_1$  و  $P_2$  باشند،  $S_1 \cap S_2$  مجموعه نقاطی هستند که هر دو ویژگی  $P_1$  و  $P_2$  را دارند.

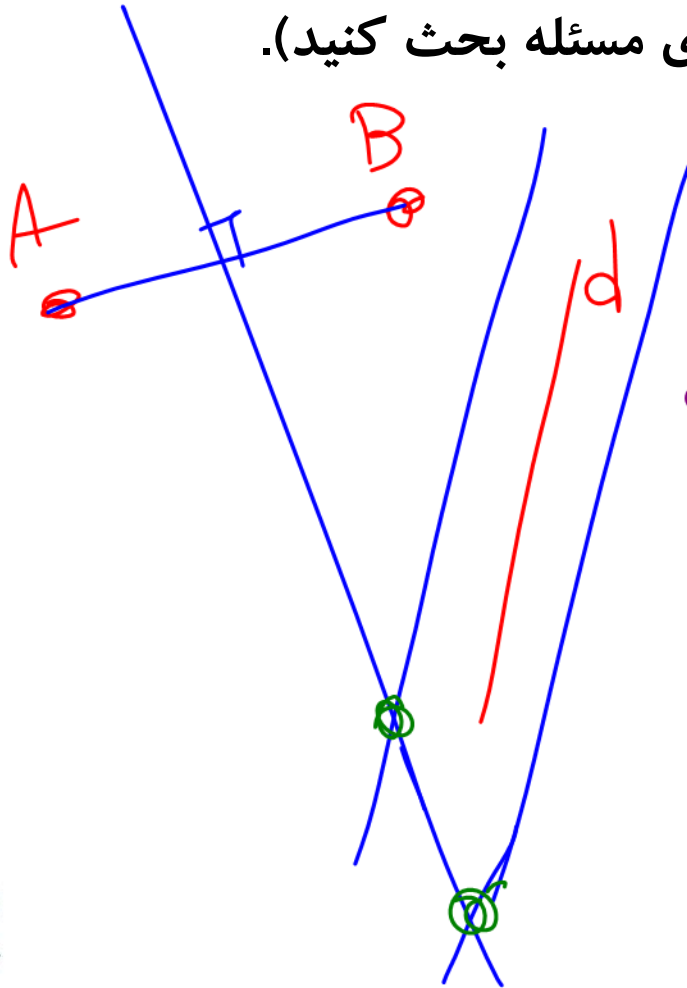
◀ پیدا کردن نقاط با ویژگی مشترک (نقطه مجهول) : برای یافتن نقاطی که هر دو ویژگی  $P_1$  و  $P_2$  از مکان‌های هندسی  $S_1$  و  $S_2$  را دارند کافی است نمودارهای  $S_1$  و  $S_2$  را رسم کرده و نقاط تلاقی (برخورد) آنها را به دست آورد.



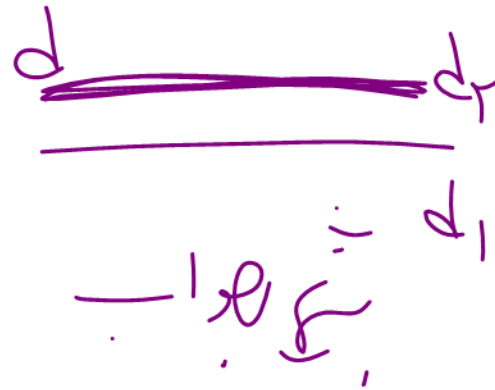
العربية

# ویژه امتحان نهایی

مثال : دو نقطه  $A$  و  $B$  و خط  $d$  که شامل هیچیک نیست در صفحه مفروضند. نقطه‌ای بیابید که از  $A$  و  $B$  به یک فاصله بوده و از  $d$  به فاصله  $3$  سانتی‌متر باشد (در تعداد جواب‌های مسئله بحث کنید).



خط وسط  $AB$  را بنویس  $d$

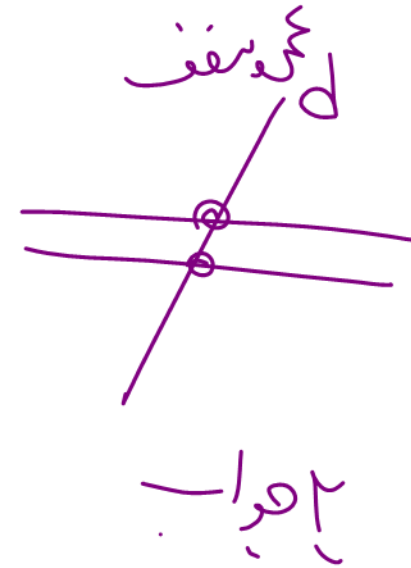


۲ جواب



صفر جواب

خط وسط  $AB$



۲ جواب

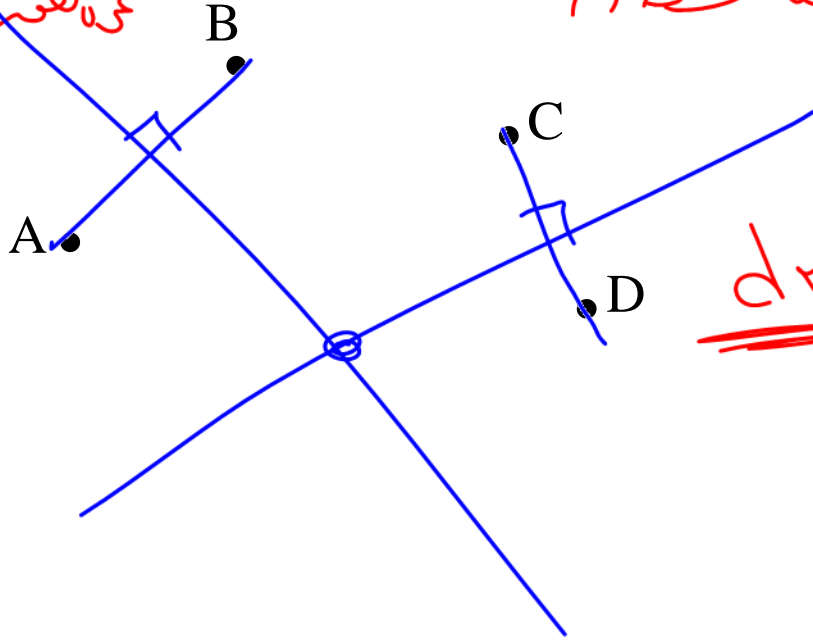


کتابخانه  
 دبیرستان  
 الفیاضی

مسئله: نقاط  $D, C, B, A$  در صفحه مفروضند. نقطه‌ای بیابید که از  $A$  و  $B$  به یک فاصله و از  $C$  و  $D$  نیز به یک فاصله باشد (روی جواب‌های مسئله بحث کنید).

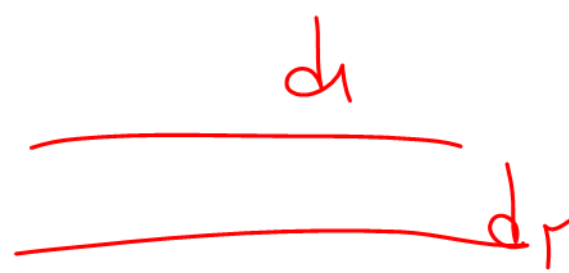
عمودنصف  $CD$

عمودنصف  $AB$

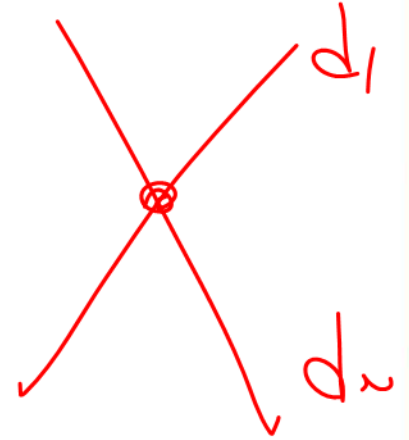


~~$d_1$   $d_2$~~

شکل جواب



مفروضات



جواب



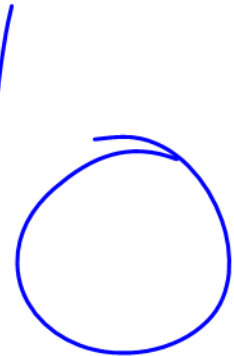
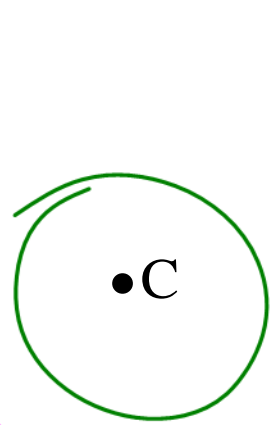
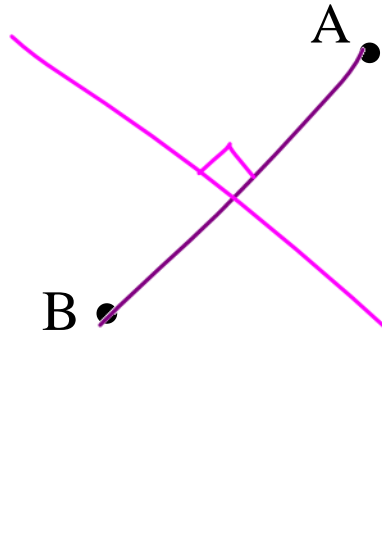
تجرباتی  
المانی  
الهندسی  
الکیمی  
الفیزیکی  
الریاضی  
الکتاب

مسئله: نقاط  $C, B, A$  در صفحه مفروضند. نقطه‌ای بیابید که از  $A$  و  $B$  به یک فاصله و از  $C$  به فاصله  $k$

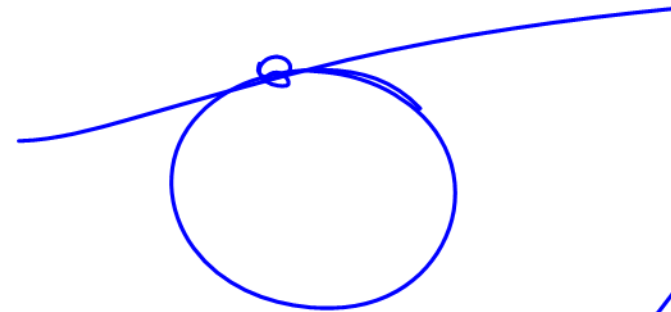
باشد (روی جواب‌های مسئله بحث کنید).

دایره شعاع  $k$

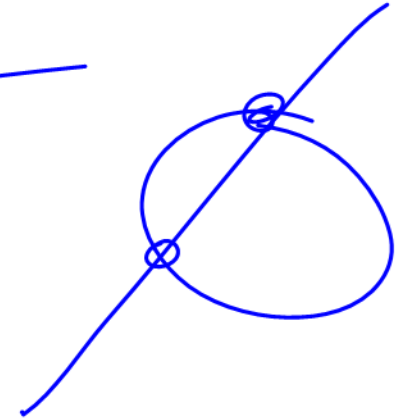
محورصف  $AB$



صفوحه



اجرا



اجرا



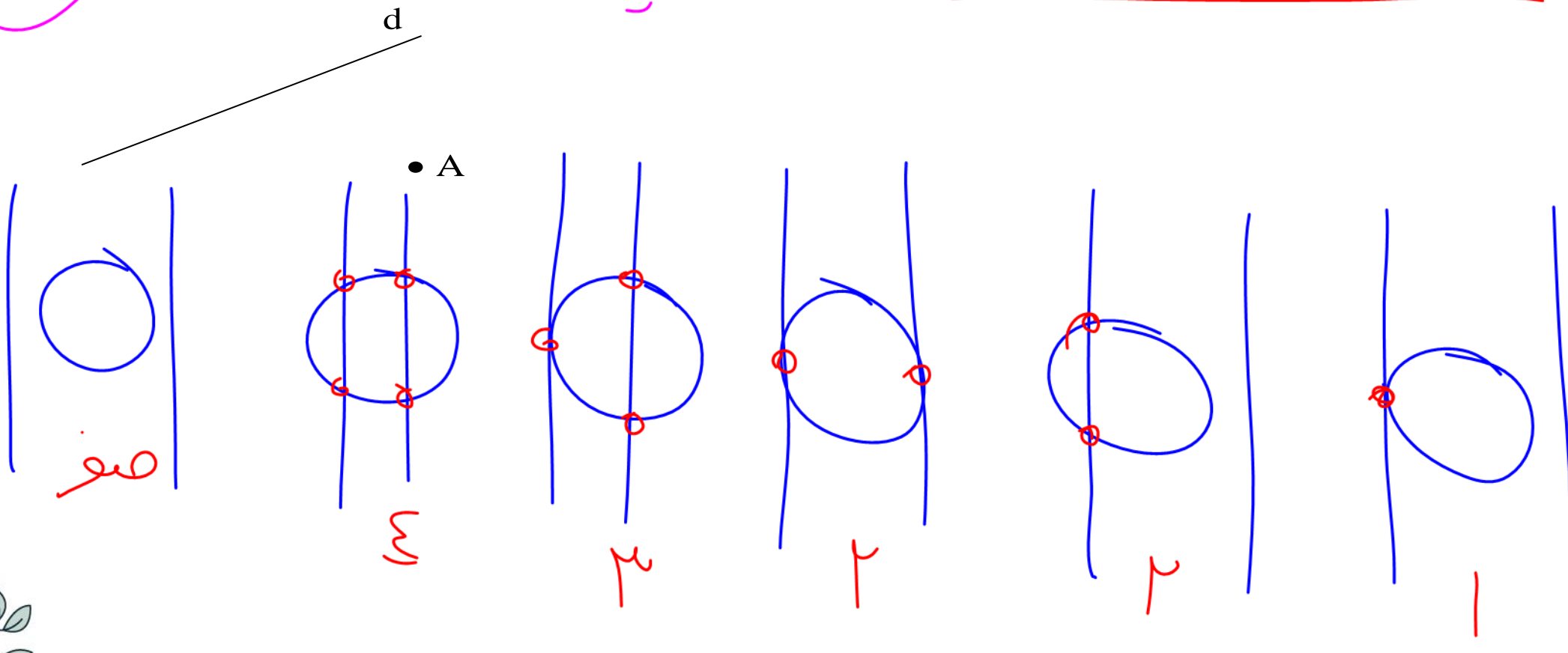
تجربه العربیة

مسئله: نقطه  $A$  و خط  $d$  در صفحه مفروضند. نقطه‌ای بیابید که از  $A$  به فاصله  $k$  و از خط  $d$  به فاصله  $k'$

باشد (روی تعداد جواب‌های مسئله بحث کنید).

در خط  $d$  سبزه

دایره



تجربا العربية

مسئله : خط  $d$  و نقاط  $B, A$  در صفحه مفروضند. مکان هندسی نقاطی را تعیین کنید که از خط  $d$  به فاصله ۴ سانتی متر بوده و از نقاط  $B, A$  به فاصله یکسان باشند. (روی تعداد جواب‌های مسئله بحث کنید)



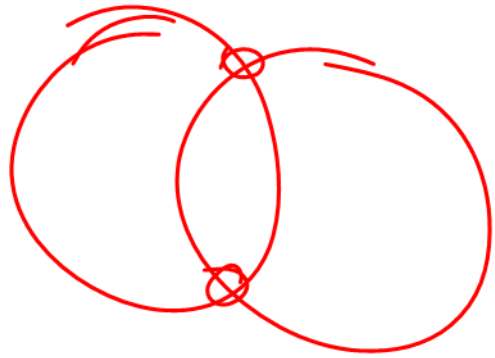
المعادن  
الکیمیاء  
الفيزياء  
الرياضيات  
العلوم  
الاجتماعيات  
اللغات  
التاريخ  
الاجتماعيات  
اللغات  
التاريخ



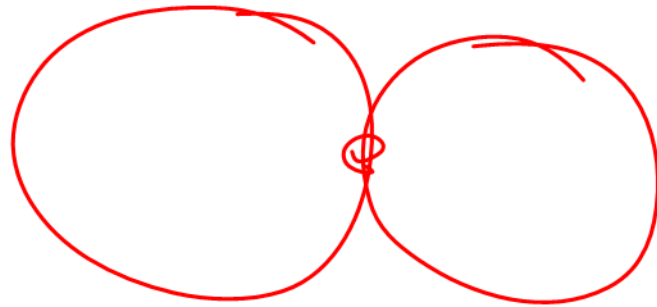
مسئله : نقاط  $A, B$  در صفحه مفروضند. مکان هندسی نقاطی را تعیین کنید که از  $A$  به فاصله  $۲$  سانتی متر بوده و از  $B$  به فاصله  $۴$  سانتی متر باشند. (روی تعداد جواب‌های مسئله بحث کنید)

دایره به شعاع  $۲$

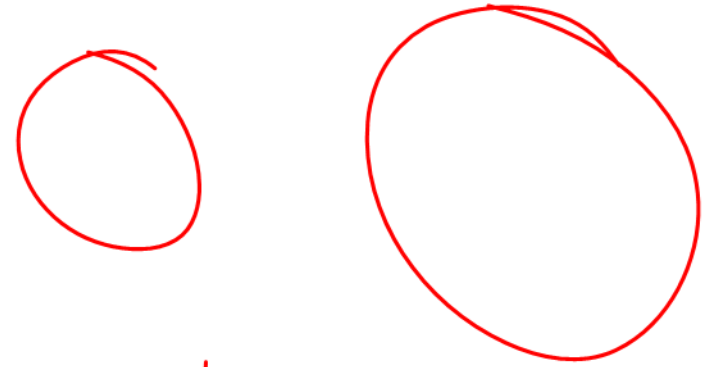
دایره به شعاع  $۴$



۲ جواب



۱ جواب

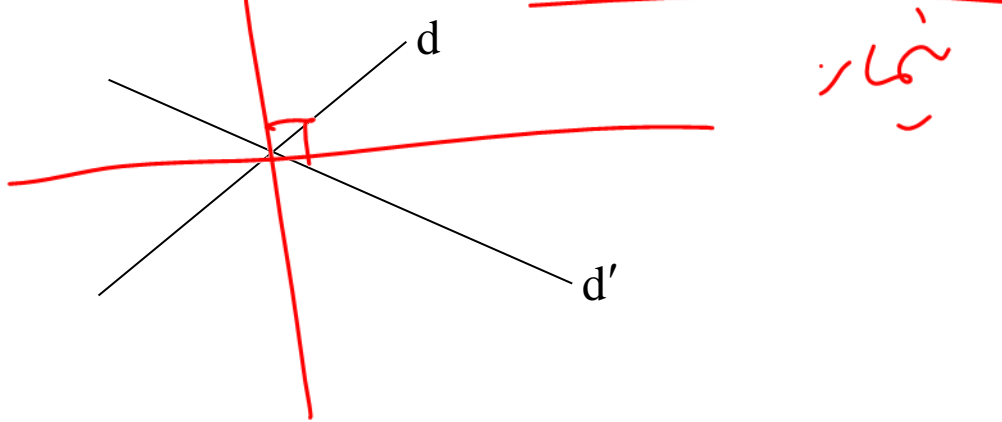


هیچ جواب



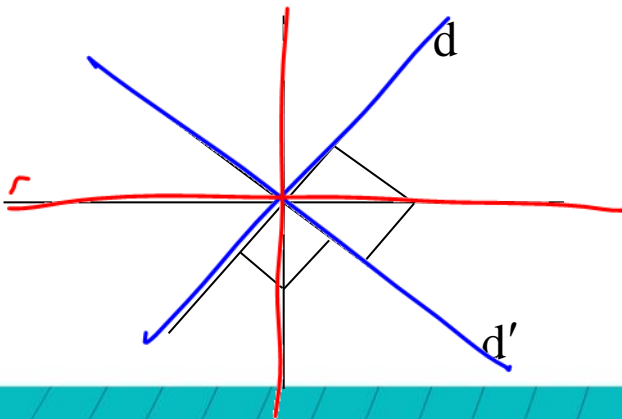
فصل ۱  
۲  
۳  
۴  
۵  
۶  
۷  
۸  
۹  
۱۰  
۱۱  
۱۲  
۱۳  
۱۴  
۱۵  
۱۶  
۱۷  
۱۸  
۱۹  
۲۰  
۲۱  
۲۲  
۲۳  
۲۴  
۲۵  
۲۶  
۲۷  
۲۸  
۲۹  
۳۰  
۳۱  
۳۲  
۳۳  
۳۴  
۳۵  
۳۶  
۳۷  
۳۸  
۳۹  
۴۰  
۴۱  
۴۲  
۴۳  
۴۴  
۴۵  
۴۶  
۴۷  
۴۸  
۴۹  
۵۰  
۵۱  
۵۲  
۵۳  
۵۴  
۵۵  
۵۶  
۵۷  
۵۸  
۵۹  
۶۰  
۶۱  
۶۲  
۶۳  
۶۴  
۶۵  
۶۶  
۶۷  
۶۸  
۶۹  
۷۰  
۷۱  
۷۲  
۷۳  
۷۴  
۷۵  
۷۶  
۷۷  
۷۸  
۷۹  
۸۰  
۸۱  
۸۲  
۸۳  
۸۴  
۸۵  
۸۶  
۸۷  
۸۸  
۸۹  
۹۰  
۹۱  
۹۲  
۹۳  
۹۴  
۹۵  
۹۶  
۹۷  
۹۸  
۹۹  
۱۰۰  
۱۰۱  
۱۰۲  
۱۰۳  
۱۰۴  
۱۰۵  
۱۰۶  
۱۰۷  
۱۰۸  
۱۰۹  
۱۱۰  
۱۱۱  
۱۱۲  
۱۱۳  
۱۱۴  
۱۱۵  
۱۱۶  
۱۱۷  
۱۱۸  
۱۱۹  
۱۲۰  
۱۲۱  
۱۲۲  
۱۲۳  
۱۲۴  
۱۲۵  
۱۲۶  
۱۲۷  
۱۲۸  
۱۲۹  
۱۳۰  
۱۳۱  
۱۳۲  
۱۳۳  
۱۳۴  
۱۳۵  
۱۳۶  
۱۳۷  
۱۳۸  
۱۳۹  
۱۴۰  
۱۴۱  
۱۴۲  
۱۴۳  
۱۴۴  
۱۴۵  
۱۴۶  
۱۴۷  
۱۴۸  
۱۴۹  
۱۵۰  
۱۵۱  
۱۵۲  
۱۵۳  
۱۵۴  
۱۵۵  
۱۵۶  
۱۵۷  
۱۵۸  
۱۵۹  
۱۶۰  
۱۶۱  
۱۶۲  
۱۶۳  
۱۶۴  
۱۶۵  
۱۶۶  
۱۶۷  
۱۶۸  
۱۶۹  
۱۷۰  
۱۷۱  
۱۷۲  
۱۷۳  
۱۷۴  
۱۷۵  
۱۷۶  
۱۷۷  
۱۷۸  
۱۷۹  
۱۸۰  
۱۸۱  
۱۸۲  
۱۸۳  
۱۸۴  
۱۸۵  
۱۸۶  
۱۸۷  
۱۸۸  
۱۸۹  
۱۹۰  
۱۹۱  
۱۹۲  
۱۹۳  
۱۹۴  
۱۹۵  
۱۹۶  
۱۹۷  
۱۹۸  
۱۹۹  
۲۰۰

مسئله: مکان هندسی نقاطی از صفحه را مشخص کنید که از دو خط متقاطع  $d$  و  $d'$  به یک فاصله باشند.



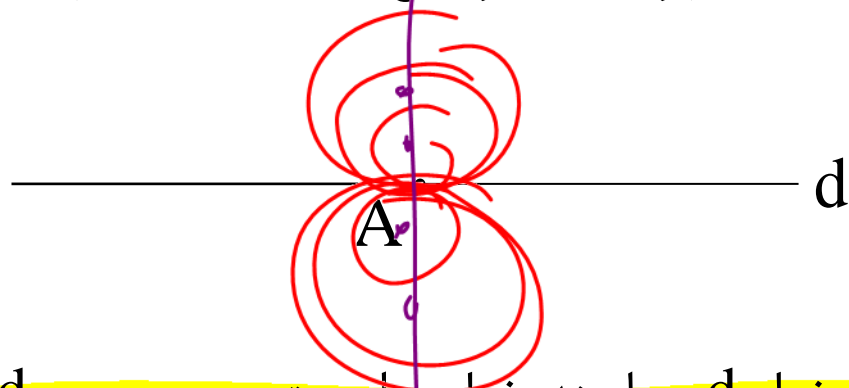
مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع  $d$  و  $d'$  به یک فاصله باشند، دو خط عمود بر هم است

که همان نیمسازهای زوایای بین دو خط است و از محل تلاقی دو خط می‌گذرند.

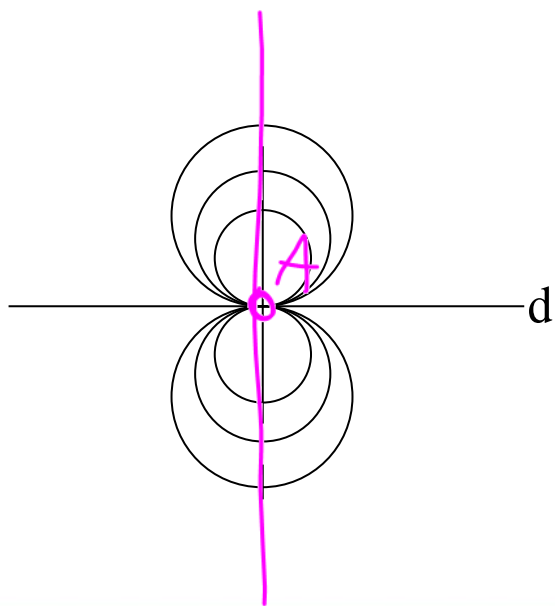


الکلیه  
الهندسیه  
المتربیه  
العلمیه

مسئله: مکان هندسی مراکز همه دایره‌هایی در صفحه را تعیین کنید که بر خط مفروض  $d$  در نقطه ثابت  $A$  مماسند.

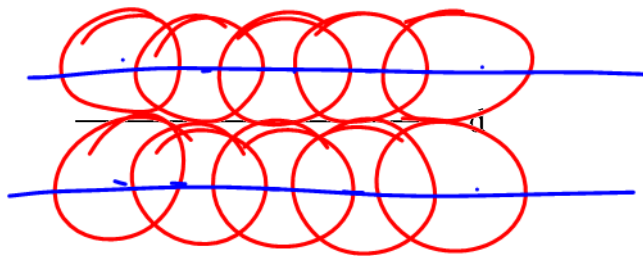


مکان هندسی مراکز تمام دایره‌ای که در نقطه  $A$  روی خط  $d$  بر خط  $d$  مماسند خطی است عمود بر  $d$  در نقطه  $A$ .



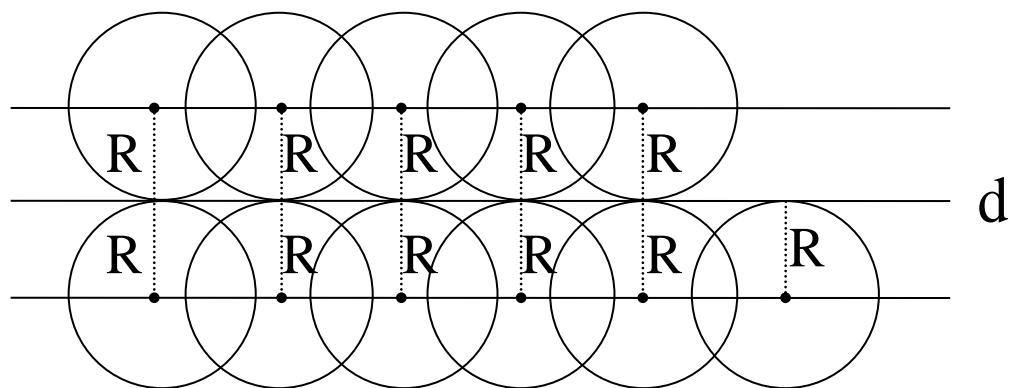
المنهج العربي

مسئله: مکان هندسی مراکز همه دایره‌های با شعاع ثابت  $R$  را که بر خط  $d$  در صفحه مماسند تعیین کنید.

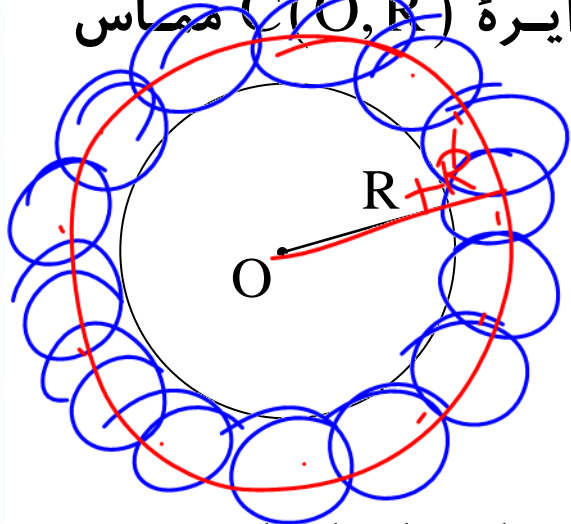


مکان هندسی مراکز همه دایره‌هایی که با شعاع ثابت  $R$  بر خط  $d$  در صفحه مماسند، دو خط به موازات  $d$

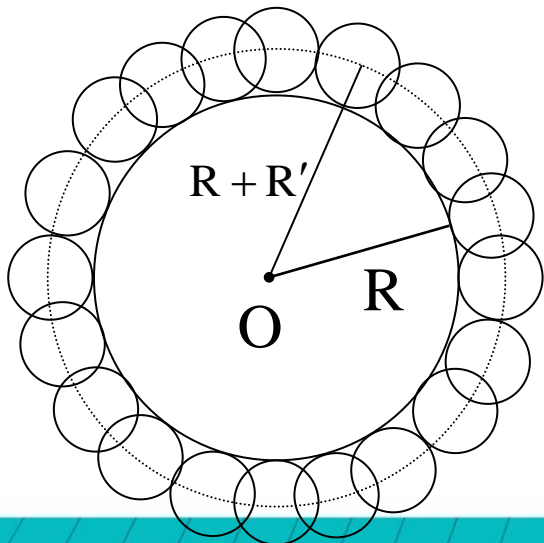
و در طرفین  $d$  و به فاصله  $R$  از خط  $d$  است.



مسئله: مکان هندسی مراکز دایری را تعیین کنید که با شعاع ثابت  $R'$  بر دایره  $C(O, R)$  مماس خارجی اند.



مکان هندسی مراکز دایری که با شعاع ثابت  $R'$  بر دایره  $C(O, R)$  مماس خارجی اند دایره‌ای است به مرکز  $O$  و شعاع  $R + R'$ .



العربية

## ویژه امتحان نهایی

ب) مکان هندسی، مجموعه نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه آنها یک ..... داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.

ب) در حالتی که صفحه  $P$  بر محور سطح مخروطی  $(l)$  عمود نباشد و با مولد آن  $(d)$  نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، فصل مشترک حاصل یک بیضی خواهد بود.

پ) مکان هندسی مرکز همه دایره‌هایی با شعاع ثابت  $r$  که بر دایره  $C(O, r)$  در صفحه این دایره مماس خارج‌اند، دایره  $C'(O, 2r)$  است.

۱/۵	نقاط $A, B, C$ و $D$ در صفحه مفروض‌اند، نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از $A$ و $B$ به یک فاصله و از $C$ و $D$ نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید).	۶
-----	--	---



العربية  
الرياضية  
الفيزياء  
الكيمياء  
البيولوجيا  
التاريخ  
الجغرافيا  
اللغة الإنجليزية  
العلوم  
الرياضيات



# نهال ریاضی

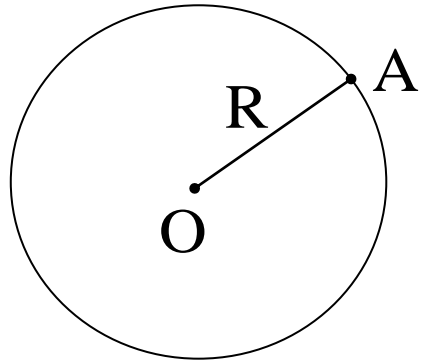
هندسه دوازدهم

دایره، وضعیت نقطه و خط با  
دایره و وضعیت دو دایره



## اپیزود ۷: دایره، وضعیت نقطه و خط با دایره و وضعیت دو دایره

◀ دایره: مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطه ثابت (مرکز دایره) به فاصله ثابت (شعاع دایره) قرار دارند.



◀ معادله استاندارد دایره: معادله استاندارد دایره  $C(O, R)$  به مرکز  $O(\alpha, \beta)$  و شعاع  $R$  بصورت زیر است:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$



مثال : معادله دایره‌ای به مرکز  $O(2, -1)$  و شعاع ۲ را نوشته و مختصات نقاط برخورد آن با محورهای مختصات را بدست آورید.

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 2$$

$$x = 0 \longrightarrow 4 + (y + 1)^2 = 2 \longrightarrow (y + 1)^2 = 0 \longrightarrow y + 1 = 0$$

$$y = 0 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow y = -1 \longrightarrow A(0, -1)$$



◀ **معادله ضمنی دایره** : اگر معادله استاندارد دایره را به کمک اتحادهای جبری به توان رسانده و ساده کنیم،

معادله ضمنی دایره بصورت زیر حاصل می شود :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

که در آن مرکز و شعاع دایره به طریق زیر بدست می آیند :

$$\text{مرکز : } O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$$

$$\text{شعاع : } R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

مثال : مختصات مرکز و طول شعاع دایره به معادله ضمنی زیر را تعیین کنید :

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$$

$$O(-1, 2), R = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 - 4} = 2$$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$$



المعادلات الجبرية

معادلهٔ ضمنی هر دایره را با مربع کامل کردن می‌توان به معادلهٔ استاندارد تبدیل کرد.

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$$

○ R → استاندارد

شرط دایره بودن معادلهٔ ضمنی  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} ; a^2 + b^2 - 4c > 0$$

$$a^2 + b^2 - 4c > 0$$

دایره

$$a^2 + b^2 - 4c = 0$$

نقطه  $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$

$$a^2 + b^2 - 4c < 0$$

تهی



العربية  
الرياضيات  
الفيزياء  
الكيمياء  
البيولوجيا

مسئله : در هر حالت نوع معادلهٔ ضمنی را تعیین کنید.

الف)  $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 7 = 0$

$$\frac{2 + 16}{2} - 28 = -8 < 0 \quad \text{نقطه}$$

ب)  $x^2 + y^2 - 3x + 2y + 3 = 0$

$$\frac{9 + 4}{2} - 12 = 1 > 0 \quad \text{دایره}$$

پ)  $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5 = 0$



مسئله: حدود  $a$  را طوری تعیین کنید که معادله زیر معادله یک دایره باشد:  $x^2 + y^2 - 3x + 5y + a = 0$

$$a^2 + b^2 - 2c > 0$$

$$9 + 25 - 2a > 0$$

$$32 > 2a$$

$$a < 16$$



تجربها العربيه

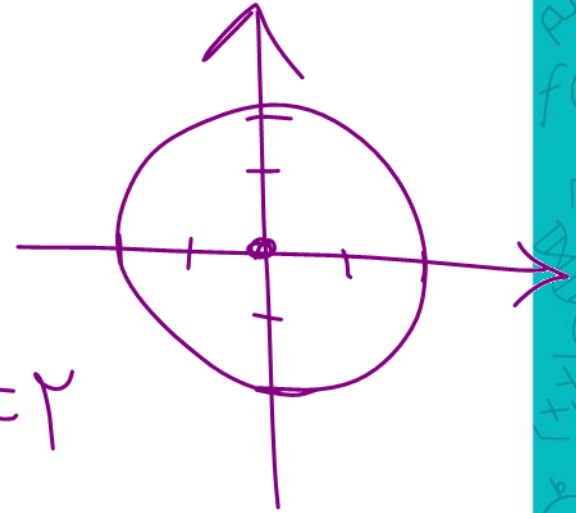
معادله دایره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع  $R$  :

$$O(\cdot, \cdot) ; \alpha = \beta = \cdot$$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = R^2$$

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$O(0, 0), R = 2$$



تربیت عالی

مسئله : معادله استاندارد و ضمنی دایره‌ای بنویسید که مرکز آن نقطه  $O(0,1)$  بوده و شعاع آن ۳ واحد باشد.

$$x^2 + (y - 1)^2 = 3^2$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 - 9 = 0$$

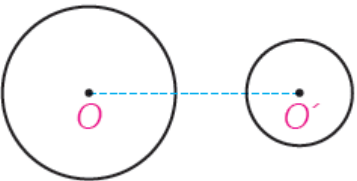
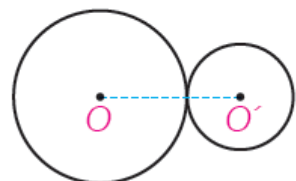
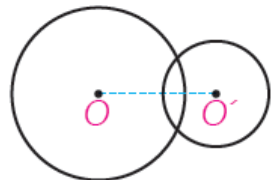
$$x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$$



تجربا العربية

وضعیت دو دایره نسبت به هم : وضعیت دو دایره  $C(O, R)$  و  $C'(O', R')$  با طول خط‌المرکزین  $d = OO'$  یکی از ۶ حالت زیر است :

$R + R'$   
 $R - R'$   
 !  
 مماس

	$d > R + R'$	دو دایره بیرون هم (متخارج)
	$d = R + R'$	دو دایره مماس بیرون
	$R - R' < d < R + R'$	دو دایره متقاطع




خط‌المرکزین

$$OO' = \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2}$$



المعاني العربية

# ویژه امتحان نهایی

	$d = R - R'$	دو دایره مماس درون
	$d < R - R'$	دو دایره متداخل
	$d = 0$	دایره های هم مرکز



مسئله : وضعیت هر یک از جفت دایره‌های زیر را تعیین کنید :

الف)  $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0 \rightarrow O(2, 3), R = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 36 + 12} = 2$

$x^2 + y^2 - 10x - 14y + 73 = 0 \rightarrow O'(5, 7), R' = \frac{1}{2} \sqrt{100 + 196 - 292} = 1$

$d = OO' = \sqrt{9 + 14} = 2$

$R + R' = 2 + 1 = 3$

$R - R' = 2 - 1 = 1$

$d = R + R'$  پس خارج

ب)  $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$

$x^2 + y^2 = 1$



مجموعه‌های مختلف از اشکال هندسی و ریاضی در حاشیه راست.

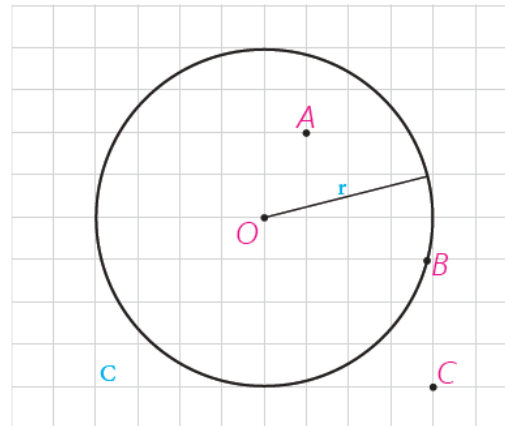
وضعیت نقطه نسبت به دایره: می‌خواهیم وضعیت نقطه  $(x, y)$  را نسبت به دایره به معادله  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  را تعیین کنیم. دو روش زیر قابل استفاده است:

- روش کار: مرکز و شعاع دایره و همچنین فاصله مرکز دایره تا نقطه مورد نظر را بدست می‌آوریم.

(الف) اگر فاصله نقطه تا مرکز دایره از شعاع دایره کمتر باشد، نقطه داخل دایره است.  $(OA < R)$

(ب) اگر فاصله نقطه تا مرکز دایره با شعاع دایره برابر باشد، نقطه روی دایره است.  $(OB = R)$

(پ) اگر فاصله نقطه تا مرکز دایره از شعاع دایره بیشتر باشد، نقطه خارج دایره است.  $(OC > R)$



مثال : دایره به معادله  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$  را در نظر گرفته و وضعیت هر یک از نقاط زیر را

نسبت به آن تعیین کنید :

الف)  $A(-1, -1)$

$$O(1, -2)$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{2 + 12 + 20} = \sqrt{10} \approx 3.16$$

ب)  $B(2, 3)$

$$OB = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26} \approx 5.1 \dots OB > R$$

ضعیف دایره

پ)  $C(4, -1)$



المعادلة  
المعروفة  
بأنها  
تستخدم  
في  
حساب  
المسافة  
بين  
نقطتين  
في  
الفضاء  
الثلاثي  
الابعادي

وضعیت خط و دایره : می‌خواهیم وضعیت خط به معادله  $ax + by + c = 0$  را نسبت به دایره با معادله  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  تعیین کنیم. بدین منظور دو روش وجود دارد که در ادامه به تشریح آنها می‌پردازیم:

- روش اول: از معادله خط، متغیر  $y$  را بدست آورده و در معادله دایره جایگذاری می‌کنیم. اینک پس از ساده‌سازی یک معادله درجه ۲ بر حسب  $x$  وجود دارد که بسته به مقدار  $\Delta$  تعداد نقاط تلاقی خط و نقطه به دست می‌آید:

- + دایره و خط در دو نقطه متقاطعند.
- $\Delta$ 
  - خط در یک نقطه بر دایره مماس است.
  - دایره و خط متخارجند و نقطه تقاطع ندارند.



مثال : وضعیت خط به معادله  $x + y = 4$  نسبت به دایره به معادله  $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$  چگونه است؟



$$y = 4 - x$$

$$x^2 + (4 - x)^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x^2 + 16 + x^2 - 8x - 2x - 3 = 0$$

$$2x^2 - 10x + 13 = 0$$

$$\Delta = 100 - 4(2)(13) = -36 < 0$$

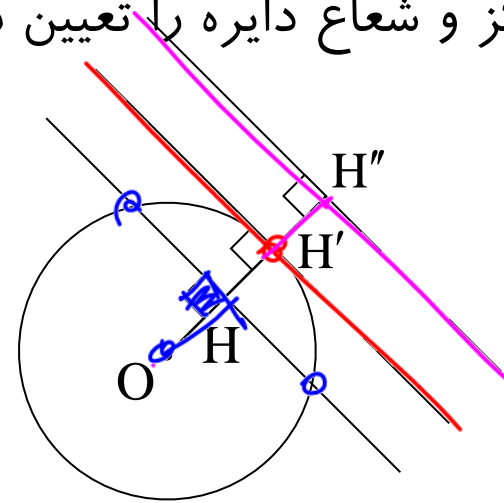
خط دایره بیخارجینه

صورتها تقاطع



تربیتی  
عربی  
ریاضی  
فیزیک  
شیمی  
تاریخ  
جغرافیه  
ادبیات  
هنر  
موسیقی  
ورزش

- روش دوم : ابتدا مختصات مرکز و شعاع دایره را تعیین می کنیم. سپس فاصله مرکز دایره از خط مفروض را بدست می آوریم. آنگاه :



$$OH < R$$

خط و دایره متقاطع

$$OH' = R$$

خط بر دایره مماس

$$OH'' > R$$

خط و دایره متخارج



الطريق الى النجاح  
من خلال التعلم المستمر

حل مثال قبل با روش دوم :

$$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow O(1, 0), R = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2 + 0 + 12} = \underline{2}$$

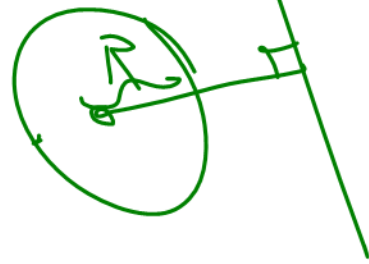
$$x + y = 4$$

$$x + y - 4 = 0$$

$$OH = \frac{|1 + 0 - 4|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2.12 > R = 2$$

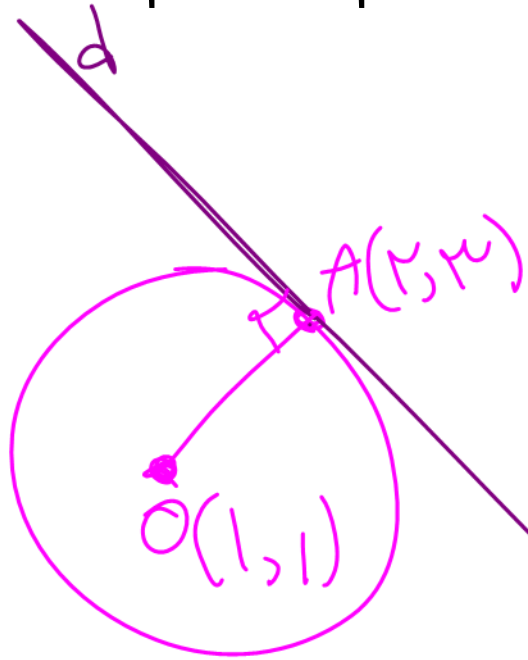
محل مرکز خط  
صورتی است

فاصله مرکز تا خط



مسئله : در نقطه  $A(2,3)$  روی دایره  $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$  مماسی بر آن رسم کرده‌ایم. معادله خط مماس را بنویسید.

$$O(1,1)$$



$$m_{OA} = \frac{3-1}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$m_d = -\frac{1}{2}$$

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$



۱	در نقطه $A(2,3)$ روی دایره $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$ مماسی رسم کرده‌ایم، معادله این خط مماس را به دست آورید.	۷
---	--	---

۱	وضعیت نقطه $A(1,-2)$ نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ را تعیین کنید.	۸
---	---	---

۱/۵	وضعیت دایره $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$ با دایره ای به مرکز مبدا مختصات و شعاع یک را نسبت به هم مشخص کنید.	۷
-----	--	---

$$x^2 + y^2 = 1$$

	پ) نقطه $A(1,-2)$ در ..... دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ قرار دارد.	
--	---	--







# نهال دانش جمع

هندسه دوازدهم

نوشتن معادله دایره

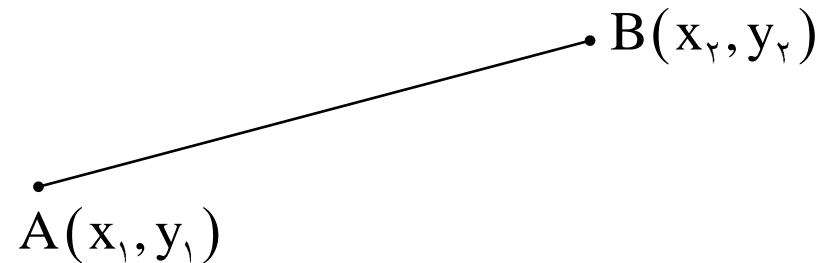


## اپیزود ۸ : نوشتن معادله دایره

◀ مدل های مختلف و متنوع نوشتن معادله دایره

یادآوری : فاصله بین دو نقطه  $A(x_1, y_1)$  و  $B(x_2, y_2)$  (طول پاره خط  $AB$ ) برابر است با :

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

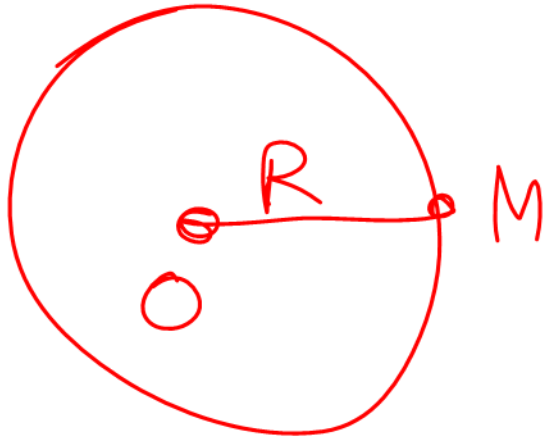


# ویژه امتحان نهایی

مسئله : معادله دایره‌ای بنویسید که نقطه  $O(-2, -1)$  مرکز آن بوده و نقطه  $M(1, 1)$  یک نقطه از آن باشد.

$$OM = R$$

$$(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = R^2$$

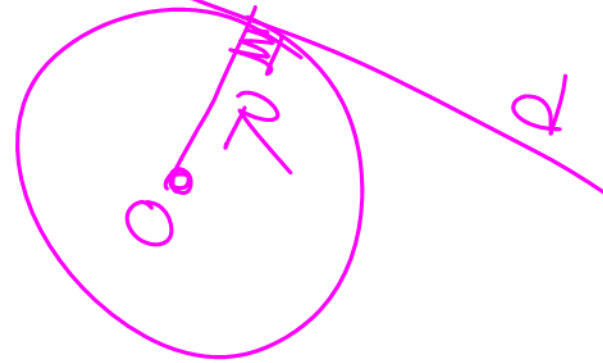
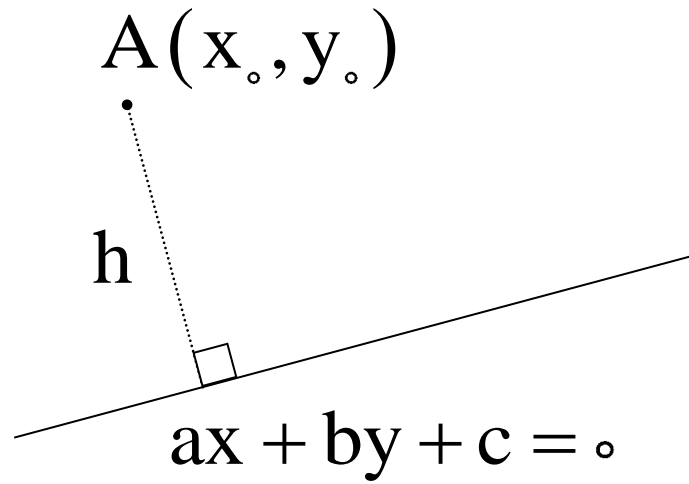


العربية  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20  
21  
22  
23  
24  
25  
26  
27  
28  
29  
30  
31  
32  
33  
34  
35  
36  
37  
38  
39  
40  
41  
42  
43  
44  
45  
46  
47  
48  
49  
50



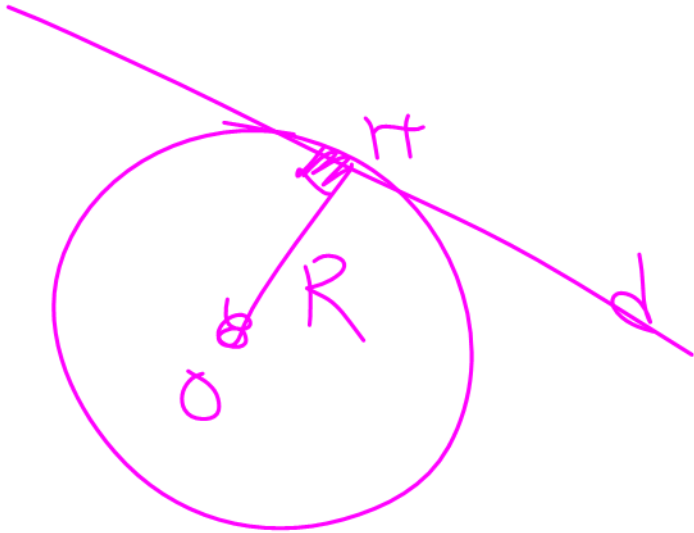
یادآوری : فاصله نقطه  $A(x_0, y_0)$  از خط  $ax + by + c = 0$  برابر است با :

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



مسئله : معادله دایره‌ای بنویسید که نقطه  $O(1, -1)$  مرکز آن بوده و بر خط به معادله  $3x - 4y + 3 = 0$  مماس باشد.

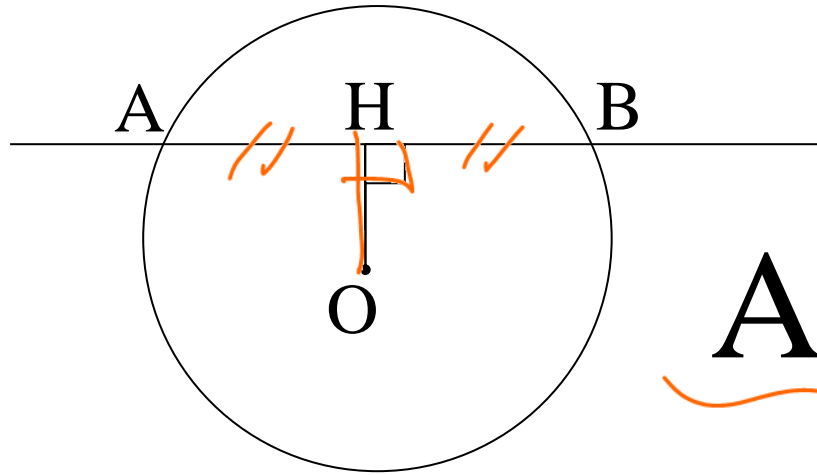
$$OH = R$$



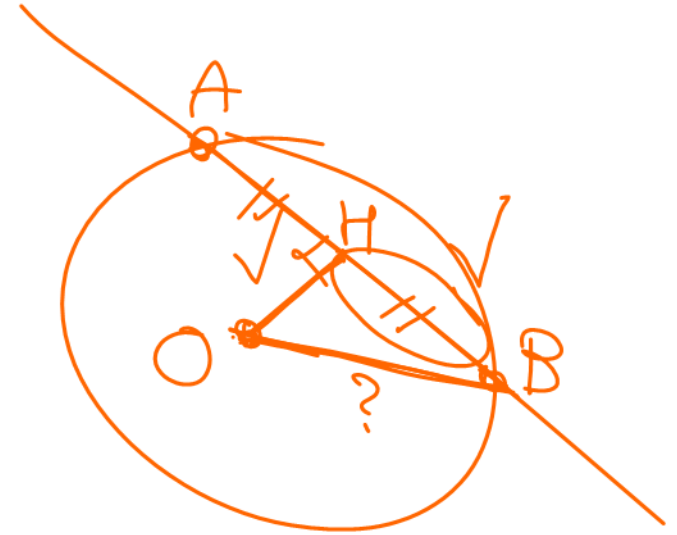
$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = R^2$$



یادآوری : قطر (شعاع) عمود بر وتر، وتر را نصف می کند.



$$AH = BH$$



تجربا العربية

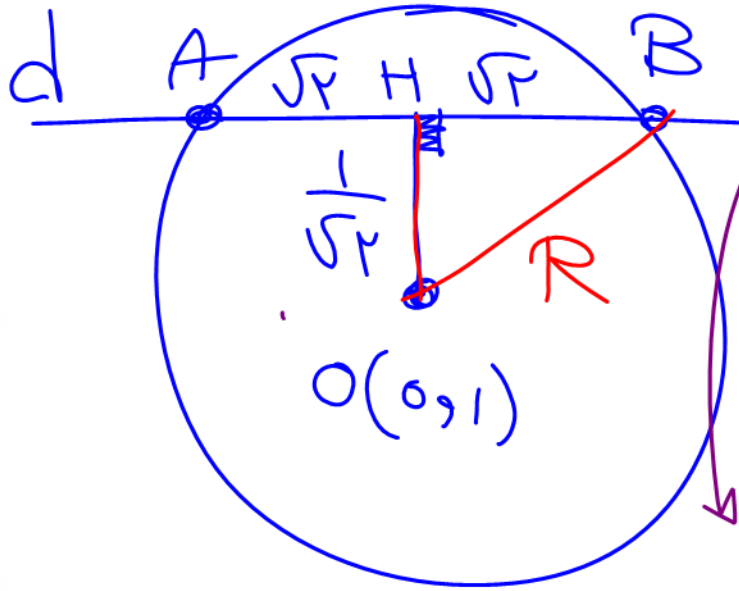
مسئله : معادله دایره‌ای بنویسید که مرکز آن  $O(0,1)$  بوده و روی خط به معادله  $x+y=2$  وترى به طول  $2\sqrt{2}$  جدا کند.

$$x+y-2=0$$

$$OH = \frac{|0+1-2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

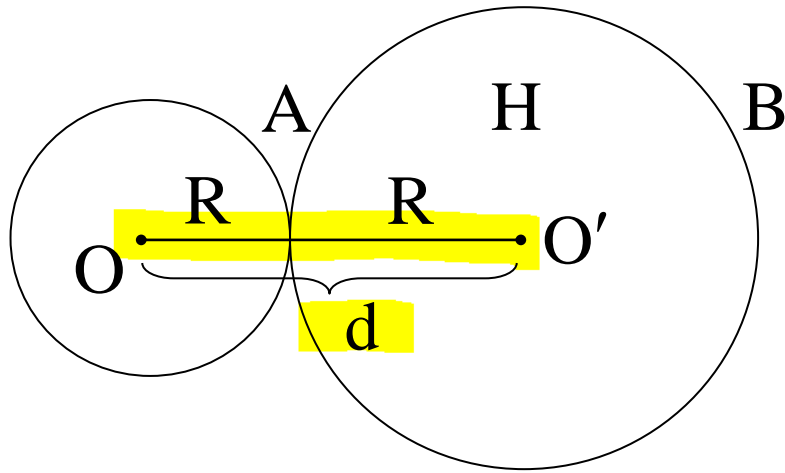
$$R^2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

$$(x-0)^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{2}$$



تجربا العربية

یادآوری : در دو دایره مماس خارج، طول خط‌المرکزین برابر با مجموع شعاع‌های دو دایره است.



$$d = R + R'$$



الکعبه  
المنارة  
العلماء  
البرق  
الشمس  
القمر  
الارض  
الفضاء  
الزمن  
الطاقة  
الحرارة  
البرق  
الشمس  
القمر  
الارض  
الفضاء  
الزمن  
الطاقة  
الحرارة

مسئله: معادله دایره‌های بنویسید که مرکز آن نقطه  $O(-1, 1)$  بوده و بر دایره به معادله  $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$  مماس خارج باشد.

$$d = OO' = \dots$$

$$d = R + R'$$

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = r^2$$

$$O'(-1, 1)$$

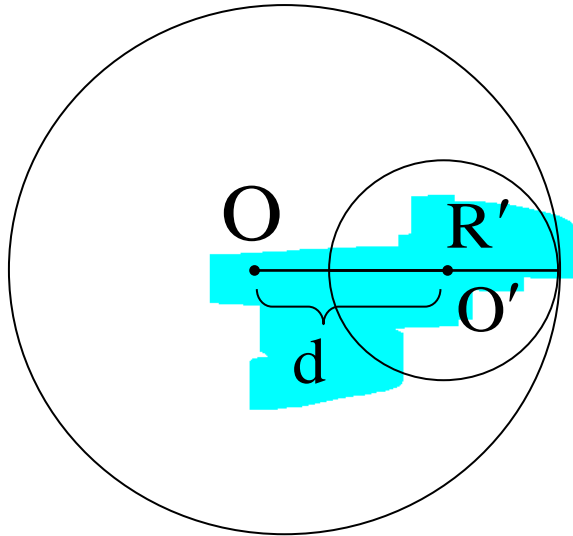
$$R' = \frac{1}{2} \sqrt{2 + 2 - 0} = \sqrt{2}$$

$$r^2$$



تجربا العربية

یادآوری : در دو دایره مماس داخلی، طول خط‌المرکزین برابر با قدرمطلق تفاضل شعاع‌های دو دایره است.



$$d = |R - R'|$$



مجموعه  
فصل ۲  
هندسه  
کتابخانه  
معماری  
تاریخ  
ادبیات  
فلسفه  
علوم  
ریاضیات  
تجربه  
معماری  
تاریخ



مسئله: معادله دایره‌ای بنویسید که مرکز آن  $O(0, 1)$  بوده و با دایره به معادله  $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$  مماس داخل باشد.

Handwritten solution steps:

$d = 00' = |R - R'|$

$O(0, 1)$

$O(2, 3)$

Handwritten calculation for the radius:

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{14 + 3^2 + 12}$$

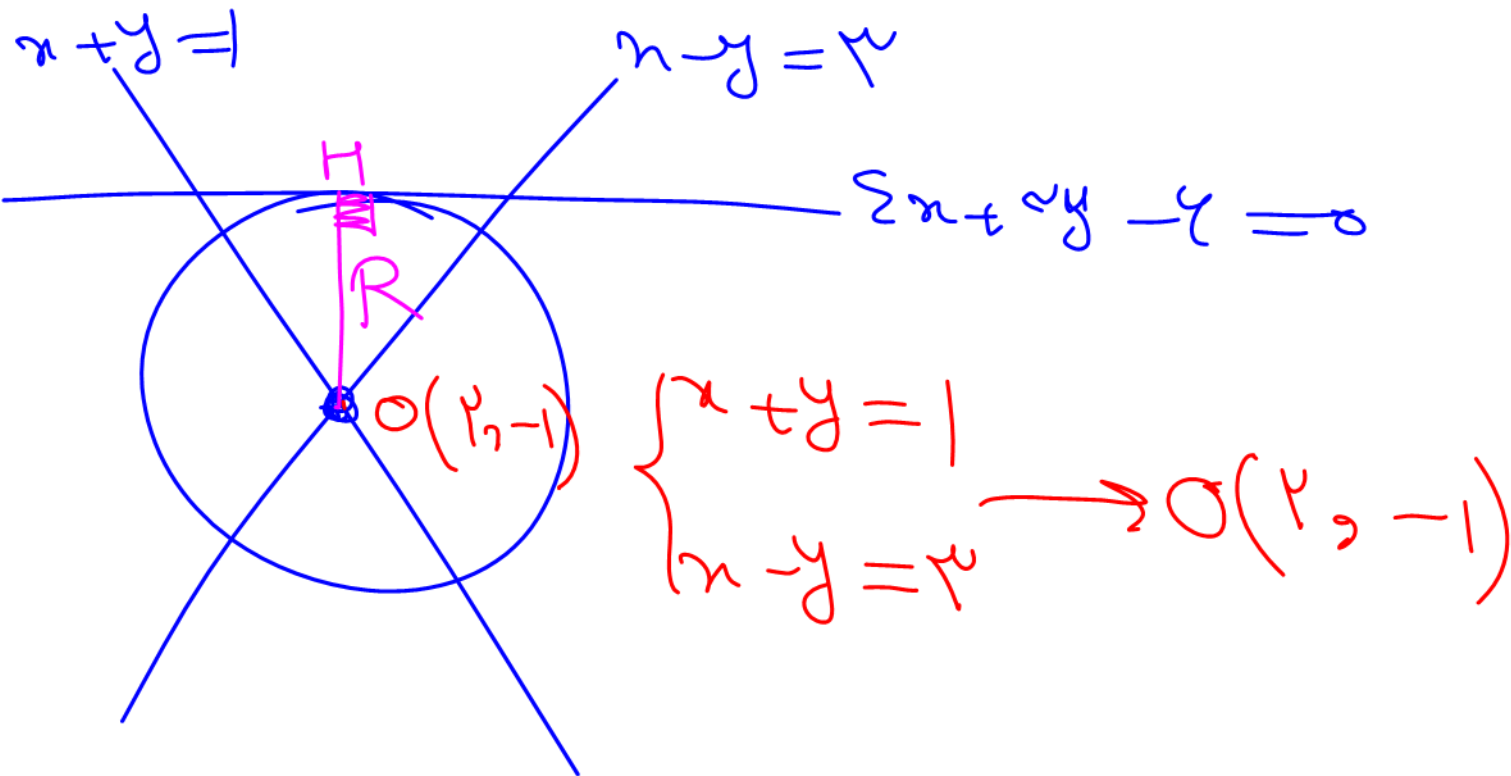
$$R' = \dots$$



Handwritten text on the right margin: "تجربا العربية"

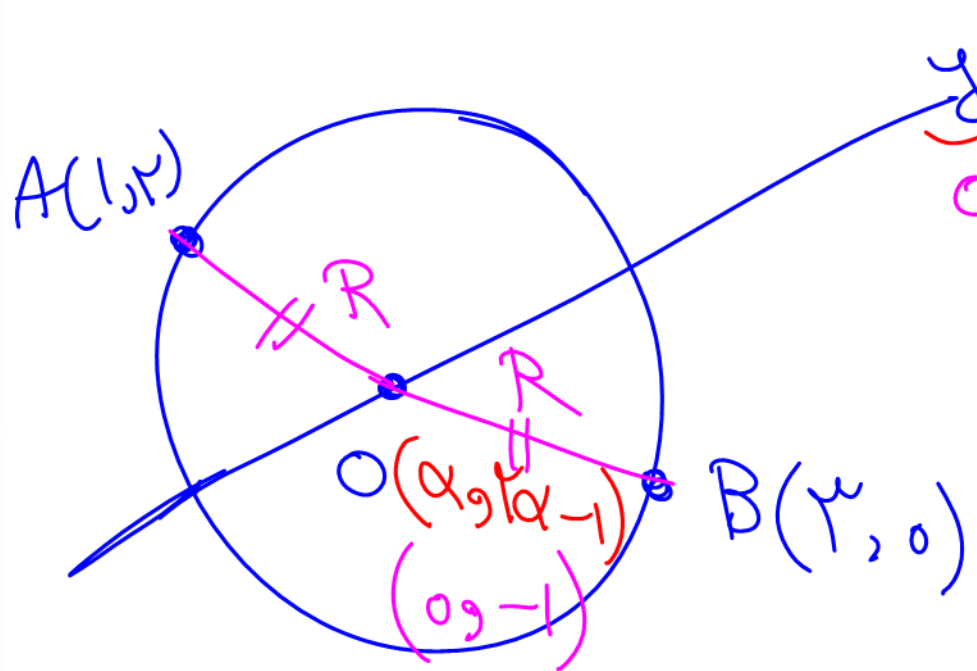
مسئله: معادله دایره‌ای را بنویسید که خطوط  $x + y = 1$  و  $x - y = 3$  دو قطر از آن بوده و بر خط

$4x + 3y = 6$  مماس باشد.



مجموعه  
فصل  
۲  
۳  
۴  
۵  
۶  
۷  
۸  
۹  
۱۰  
۱۱  
۱۲  
۱۳  
۱۴  
۱۵  
۱۶  
۱۷  
۱۸  
۱۹  
۲۰  
۲۱  
۲۲  
۲۳  
۲۴  
۲۵  
۲۶  
۲۷  
۲۸  
۲۹  
۳۰  
۳۱  
۳۲  
۳۳  
۳۴  
۳۵  
۳۶  
۳۷  
۳۸  
۳۹  
۴۰  
۴۱  
۴۲  
۴۳  
۴۴  
۴۵  
۴۶  
۴۷  
۴۸  
۴۹  
۵۰  
۵۱  
۵۲  
۵۳  
۵۴  
۵۵  
۵۶  
۵۷  
۵۸  
۵۹  
۶۰  
۶۱  
۶۲  
۶۳  
۶۴  
۶۵  
۶۶  
۶۷  
۶۸  
۶۹  
۷۰  
۷۱  
۷۲  
۷۳  
۷۴  
۷۵  
۷۶  
۷۷  
۷۸  
۷۹  
۸۰  
۸۱  
۸۲  
۸۳  
۸۴  
۸۵  
۸۶  
۸۷  
۸۸  
۸۹  
۹۰  
۹۱  
۹۲  
۹۳  
۹۴  
۹۵  
۹۶  
۹۷  
۹۸  
۹۹  
۱۰۰

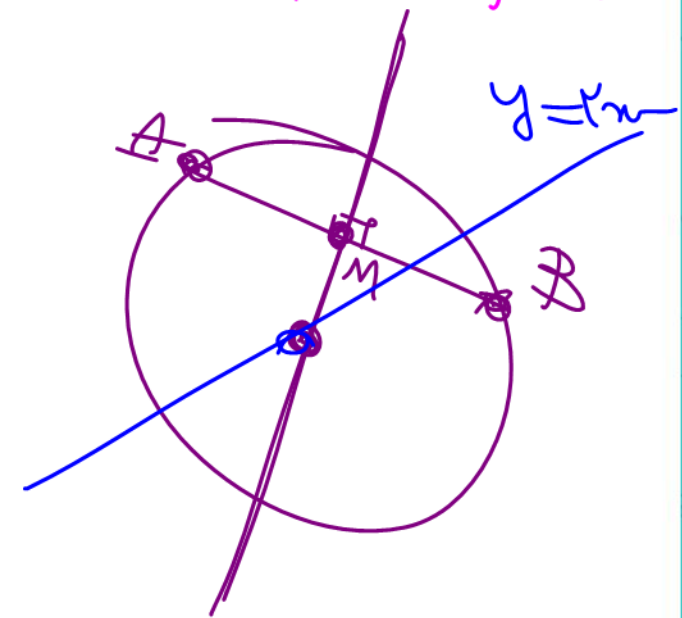
مسئله : معادله دایره‌ای بنویسید که  $A(1,2)$  و  $B(3,0)$  دو نقطه از آن بوده و قطر آن روی خط  $y = 2x - 1$  واقع باشد.



$$y = 2x - 1$$

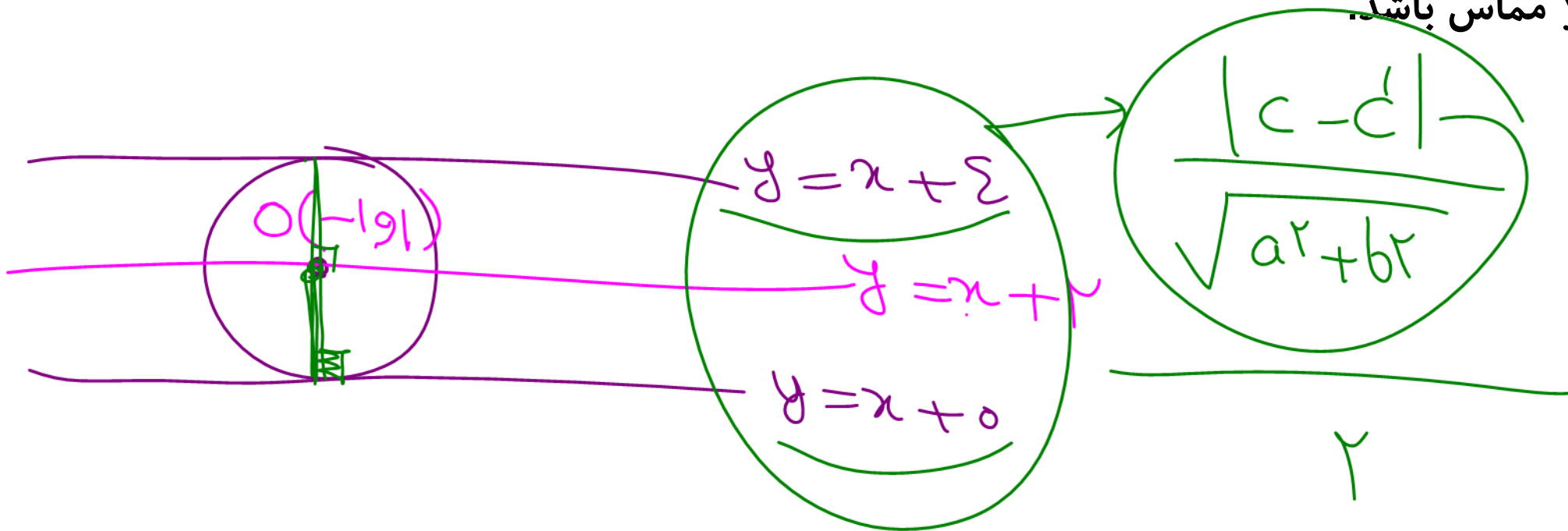
$$OA = OB \rightarrow \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (\alpha - 2)^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (\alpha - 1)^2}$$

$$\rightarrow \alpha = 0$$



تجربة العربية

مساله : معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن به طول ۱- بوده و بر دو خط به معادلات  $y = |x|$  و  $y = |x + 4|$  مماس باشد.

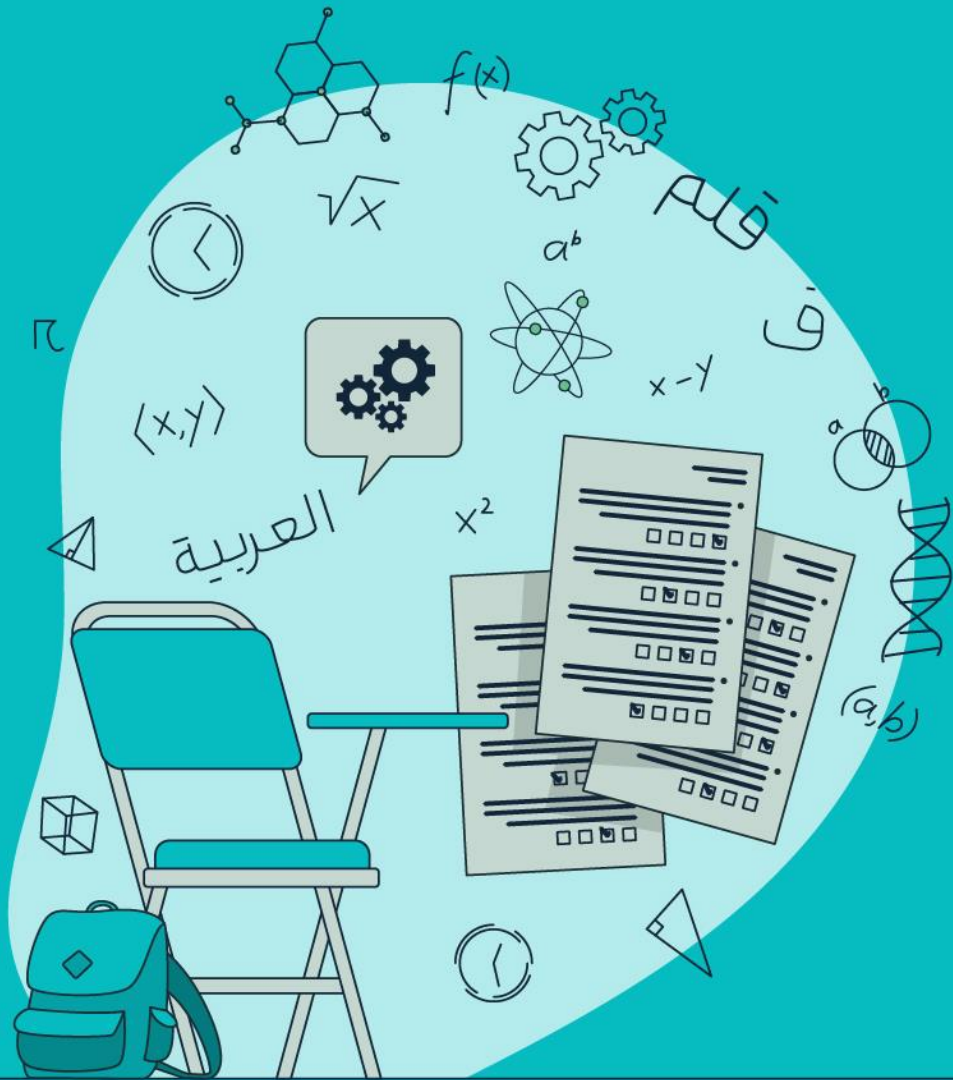


تجربا العربية

۱/۵	معادله دایره‌ای را بنویسید که خطوط $x + y = 1$ و $x - y = 3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x + 3y = -5$ بر آن مماس باشد.	۶
۱/۲۵	معادله دایره‌ای را بنویسید که $O(-1, -1)$ مرکز آن بوده و روی خط $2x + y = 2$ وترى به طول ۴ ایجاد کند.	۷
۱	معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O'(2, 1)$ بوده و بر خط $3x + 4y = -5$ مماس باشد.	۶







# نهج جدید در یادگیری

هندسه دوازدهم

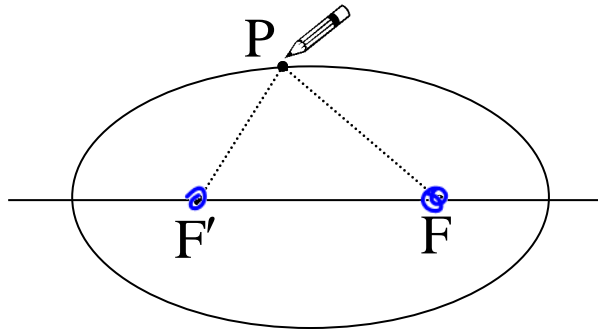
بیضی



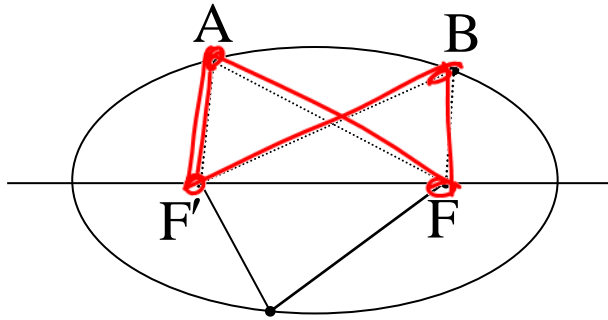
## اپیزود ۹: بیضی

تعریف ترسیمی بیضی: یک تکه نخ به طول  $l$  را در نظر گرفته و دو سر آن را مطابق شکل در دو نقطه ثابت  $F', F$  کنید بطوریکه  $FF' < l$ .

یک مداد را داخل نخ قرار داده و منحنی بگونه‌ای رسم کنید که در تمام زمان رسم، دو طرف نخ کاملاً بصورت صاف و کشیده باشد. شکل حاصل منحنی بسته‌ای خواهد بود که بیضی نام دارد.



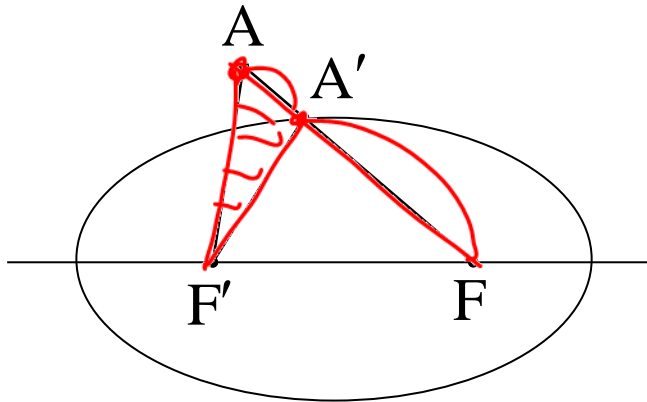
ویژگی نقاط روی بیضی : مطابق با ترسیم، همواره مجموع فاصله‌های هر نقطه روی بیضی از نقاط  $F, F'$  برابر طول نخ ( $l$ ) است.



$$\begin{aligned} \underline{FA + F'A} &= l \\ \underline{FB + F'B} &= l \\ \underline{FC + F'C} &= l \end{aligned}$$

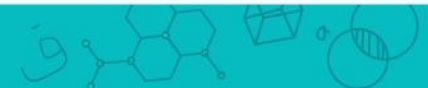


حالت اول : فرض می کنیم نقطه  $A$  خارج بیضی باشد؛ پس داریم :

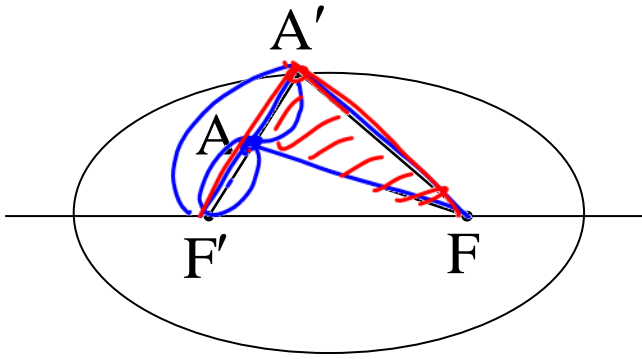


$$FA + F'A = FA' + \underbrace{A'A + F'A}_{> F'A'} > FA' + F'A' = l$$

نتیجه: مجموع فواصل هر نقطه خارج بیضی از نقاط  $F, F'$  از طول نخ ( $l$ ) بیشتر است.



حالت دوم : فرض می کنیم نقطه  $A$  داخل بیضی باشد؛



$$FA + F'A = FA + F'A' - AA' = F'A' + \underbrace{(FA - AA')}_{<FA'} < F'A' + FA' = l$$

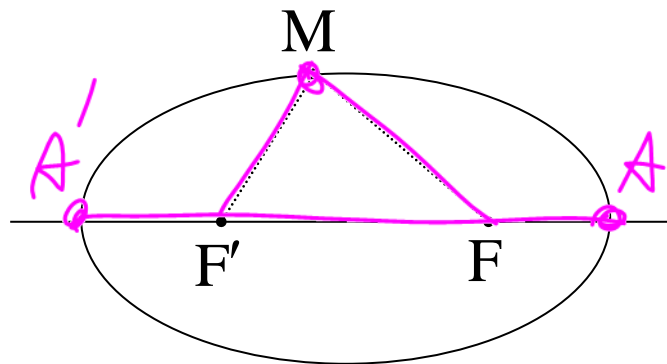
نتیجه: مجموع فواصل هر نقطه داخل بیضی از نقاط  $F, F'$  از طول نخ ( $l$ ) کمتر است.



مجموعه  
فصل  
۲  
۳  
۴  
۵  
۶  
۷  
۸  
۹  
۱۰  
۱۱  
۱۲  
۱۳  
۱۴  
۱۵  
۱۶  
۱۷  
۱۸  
۱۹  
۲۰  
۲۱  
۲۲  
۲۳  
۲۴  
۲۵  
۲۶  
۲۷  
۲۸  
۲۹  
۳۰  
۳۱  
۳۲  
۳۳  
۳۴  
۳۵  
۳۶  
۳۷  
۳۸  
۳۹  
۴۰  
۴۱  
۴۲  
۴۳  
۴۴  
۴۵  
۴۶  
۴۷  
۴۸  
۴۹  
۵۰  
۵۱  
۵۲  
۵۳  
۵۴  
۵۵  
۵۶  
۵۷  
۵۸  
۵۹  
۶۰  
۶۱  
۶۲  
۶۳  
۶۴  
۶۵  
۶۶  
۶۷  
۶۸  
۶۹  
۷۰  
۷۱  
۷۲  
۷۳  
۷۴  
۷۵  
۷۶  
۷۷  
۷۸  
۷۹  
۸۰  
۸۱  
۸۲  
۸۳  
۸۴  
۸۵  
۸۶  
۸۷  
۸۸  
۸۹  
۹۰  
۹۱  
۹۲  
۹۳  
۹۴  
۹۵  
۹۶  
۹۷  
۹۸  
۹۹  
۱۰۰

تعریف مکان هندسی بیضی: بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصلشان از دو نقطه ثابت در صفحه یک مقدار ثابت است.

دو نقطه ثابت  $F, F'$  کانون‌های بیضی و مقدار ثابت، طول قطر بزرگ بیضی است.



$$MF + MF' = \text{مقدار ثابت } (l)$$

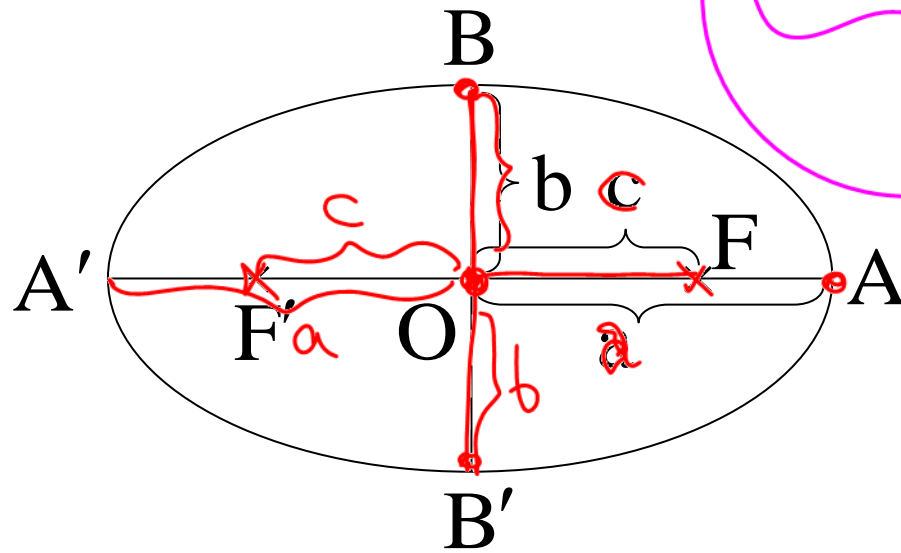
$$l = \text{طول نخ} = \text{طول قطر بزرگ بیضی}$$



الgebra  
عربیة  
مکان هندسی

پارامترهای بیضی :

OA = a , OB = b , OF = c



O : مرکز بیضی (وسط FF')

FF' : فاصله کانونی بیضی = 2c

AA' : قطر بزرگ بیضی = 2a

BB' : قطر کوچک بیضی = 2b



الgebra  
العربية  
المعروف

## ویژه امتحان نهایی

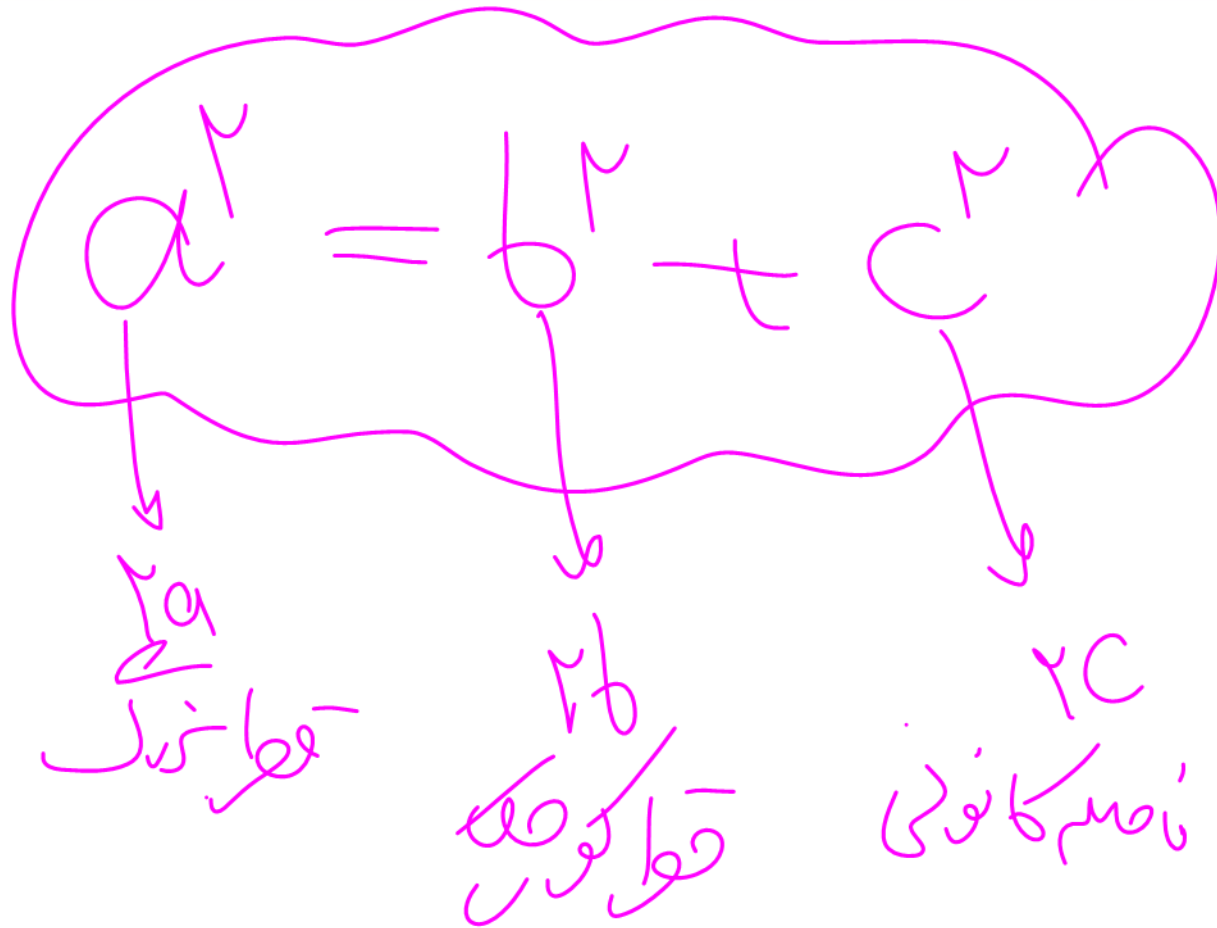
در هر بیضی ثابت کنید :

$$AA' = 2a \quad (\text{الف})$$

$$l = 2a \quad (\text{ب}) \quad \text{طول نخ}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (\text{پ})$$

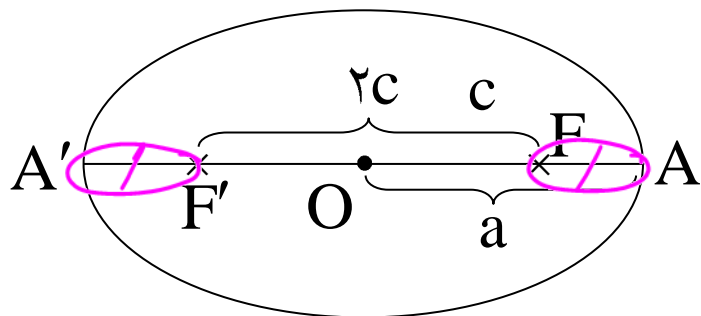
$$BB' = 2b \quad (\text{ت})$$



المعادن  
الرياضيات  
الفيزياء  
الكيمياء  
البيولوجيا  
العلوم  
الاجتماعية  
الإنسانيات  
الهندسة  
الطب  
العلوم  
الرياضيات  
الفيزياء  
الكيمياء  
البيولوجيا  
العلوم  
الاجتماعية  
الإنسانيات  
الهندسة  
الطب  
العلوم

اثبات (الف) : ابتدا ثابت می کنیم؛  $FA = F'A'$

اگر مداد در نقطه  $A$  باشد داریم :



$$FA + F'A = l \Rightarrow FA + F'F + FA = l \Rightarrow 2FA + 2c = l$$

$$\Rightarrow FA = \frac{l - 2c}{2} \Rightarrow A' \Rightarrow FA = F'A' = \frac{l - 2c}{2}$$

به دلیل مشابه در نقطه

و اینک داریم :

$$OA' = OF' + F'A' = OF + FA = OA = a$$

$$\Rightarrow AA' = OA + OA' = a + a = 2a$$



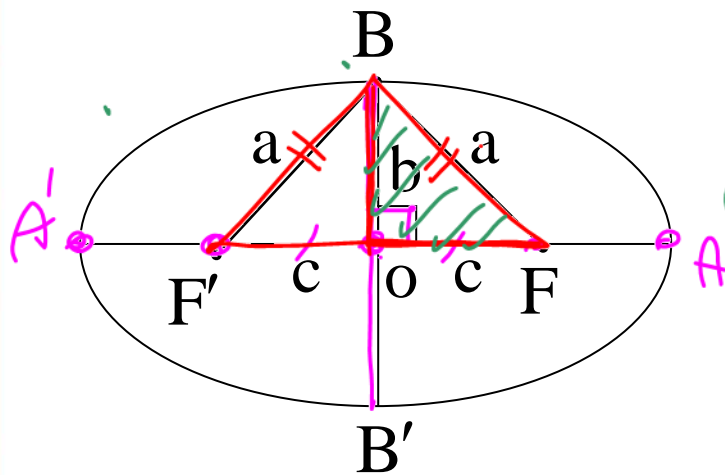
اثبات (ب) :

$$OA = OF + FA = c + \frac{l - 2c}{2} = \frac{2c + l - 2c}{2} = \frac{l}{2}$$

$$\text{از طرفی: } OA = a \Rightarrow \frac{l}{2} = a \Rightarrow \underline{l = 2a}$$



اثبات (پ) :  $OB$  هم میانه است و هم ارتفاع پس مثلث  $BFF'$  متساوی الساقین است و  $\underline{BF = BF' = a}$  و طبق قضیه فیثاغورس داریم :



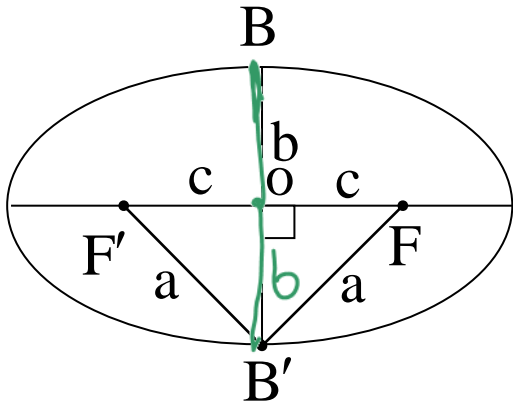
$$BF^2 = OB^2 + OF^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$



تجربا العربية

اثبات (ت) : بدلیل مشابه :



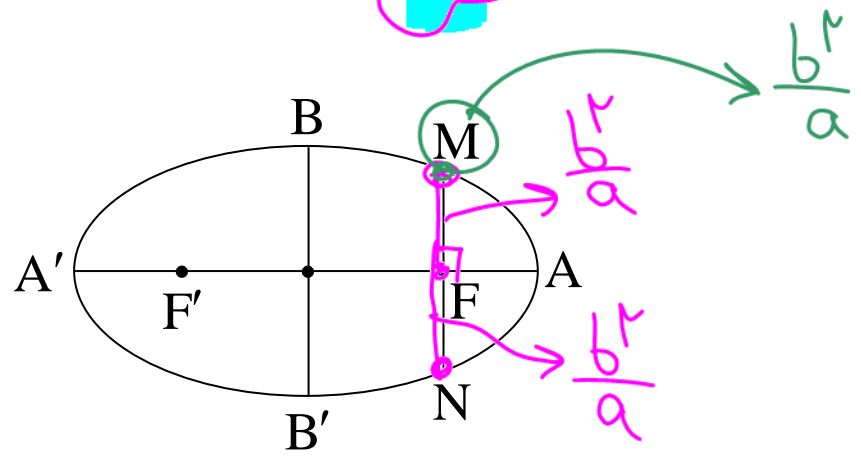
$$\begin{aligned} OB^2 &= BF^2 - OF^2 = a^2 - c^2 = OB^2 \\ \Rightarrow OB &= OB' = b \\ \Rightarrow BB' &= OB + OB' = b + b = 2b \end{aligned}$$



عربی  
الغریبی

وتر کانونی بیضی: خط عمود بر  $AA'$  (قطر کانونی) در نقطه  $F$  (کانون)، بیضی را در نقاط  $M$  و  $N$  قطع

می کند،  $MN$  را وتر کانونی بیضی می نامیم. طول وتر کانونی بیضی برابر است با:  $\frac{2b^2}{a}$



المعاني العربية

◀ ثابت کنید طول وتر کانونی بیضی برابر با  $\frac{2b^2}{a}$  است.

اثبات : اولاً می‌دانیم

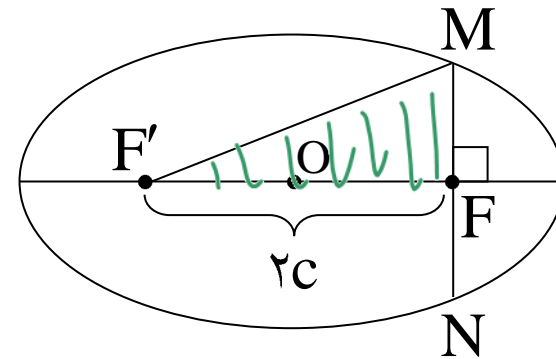
$$\Rightarrow MF'' = 2a - MF \quad MF + MF' = 2a$$

ثانیاً طبق قضیه فیثاغورس در مثل  $MF'F$  داریم :

$$MF^2 = MF'^2 - FF'^2 \Rightarrow MF^2 = (2a - MF)^2 - (2c)^2$$

$$\Rightarrow MF^2 = 4a^2 - 4a.MF + MF^2 - 4c^2$$

$$\Rightarrow 4a.MF = 4a^2 - 4c^2 \Rightarrow MF = \frac{a^2 - c^2}{a} \quad (1)$$



مجموعه  
سازمان  
آموزش  
و پرورش  
انسان  
گنجینه  
معارف  
و تجربیات  
آموزشی  
و تربیتی  
موسسه  
تربیتی  
و آموزشی  
گنجینه  
معارف  
و تجربیات  
آموزشی  
و تربیتی

از طرفی می دانیم  $(۲) \Rightarrow a^r - c^r = b^r$   $: a^r = b^r + c^r$

$$(۲) \rightarrow (۱) : MF = \frac{b^r}{a}$$

$$NF = \frac{b^r}{a} : \text{به دلیل مشابه}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{2b^r}{a}$$



**رسم بیضی** : با داشتن مقادیر  $c, a$  می توان بیضی را رسم نمود بدین ترتیب که ابتدا نقاط  $F, F'$  را به فاصله  $2c$  از یکدیگر رسم می کنیم، سپس نقاط  $A, A'$  را به ترتیب در راست  $F$  و چپ  $F'$  به فاصله  $a - c$  از آنها رسم می کنیم. در انتها با محاسبه مقدار  $b$  از رابطه  $b^2 = a^2 - c^2$  نقاط  $B, B'$  را نیز مشخص کرده و بیضی را

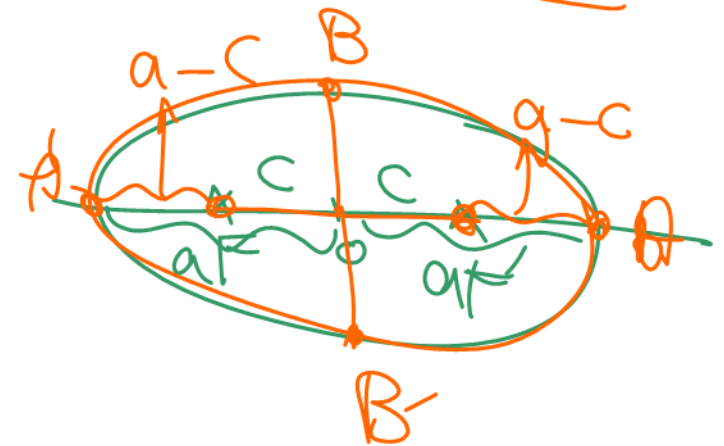
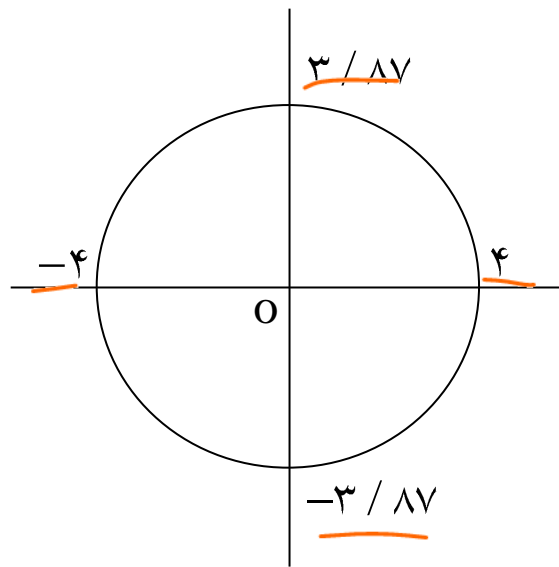
بطور تقریبی رسم می کنیم.

مثال ۱ :  $a = 4$  و  $c = 1$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 1 = 15$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{15} \approx 3.87$$

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{4}$$



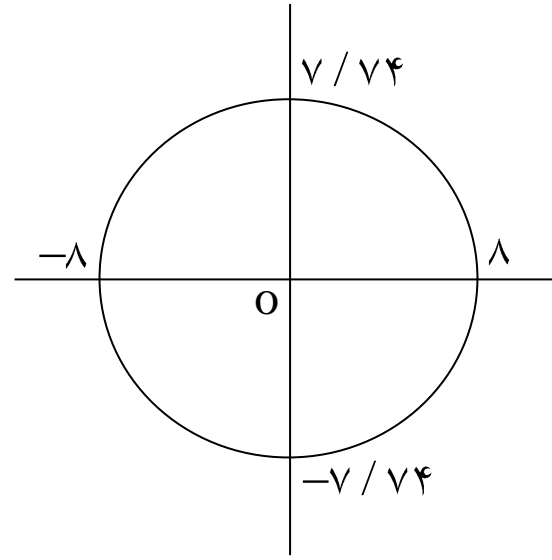
المعادن  
الرياضيات  
الفيزياء  
الكيمياء  
البيولوجيا  
العلوم  
الطبيعية

مثال ۲ :  $a = ۸$  و  $c = ۲$

$$b^2 = a^2 - c^2 = ۶۴ - ۴ = ۶۰$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{۶۰} \approx ۷/۷۴$$

$$\frac{c}{a} = \frac{۲}{۸}$$



مثال ۳ :  $a = ۲$  و  $c = ۱$

$$b^2 = a^2 - c^2 = ۴ - ۱ = ۳$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{۳} \approx ۱/۷۳$$

$$\frac{c}{a} = \frac{۱}{۲}$$



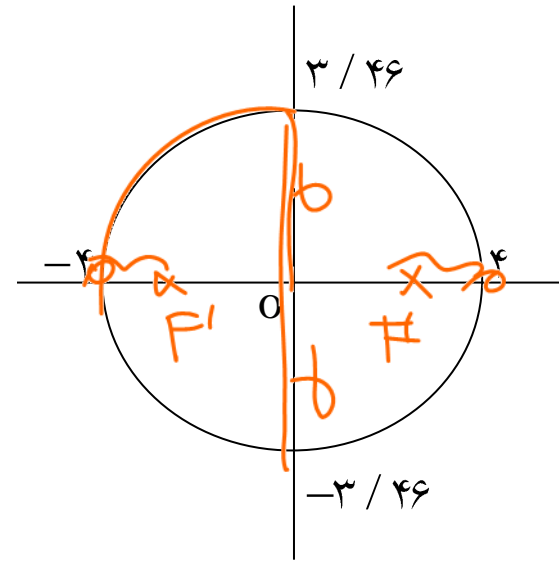
مجموعه  
سازمان  
آموزش و  
تربیت  
جمهوری  
اسلامی  
ایران

مثال ۴ :  $a = ۴$  و  $c = ۲$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 4 = 12$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{12} \approx ۳/۴۶$$

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$



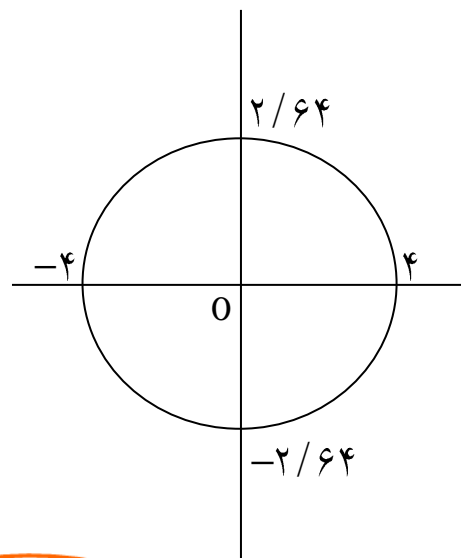
مجموعه  
سازمان  
آموزش  
و  
تربیت  
معدنی  
و  
پژوهشی  
جمهوری  
اسلامی  
ایران

مثال ۵ :  $a = 4$  و  $c = 3$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 9 = 7$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{7} \approx 2/64$$

$$\frac{c}{a} = \frac{3}{4}$$

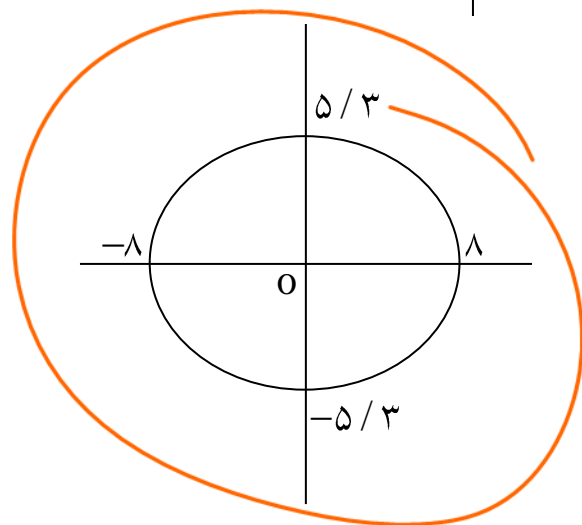


مثال ۶ :  $a = 8$  و  $c = 6$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 64 - 36 = 28$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{28} \approx 5/3$$

$$\frac{c}{a} = \frac{3}{4}$$



مجموعه  
سوال  
حل  
ماتریکس  
مهندسی  
عربی  
مهندسی  
عربی

خروج از مرکز بیضی: مقدار  $\frac{c}{a}$  را خروج از مرکز بیضی گوئیم که میزان کشیدگی بیضی را

نشان می‌دهد.  $\left( 0 \leq \frac{c}{a} \leq 1 \right)$

$\frac{c}{a} \rightarrow 1$  شکل بیضی کشیده‌تر شده و به خط نزدیک می‌شود.

$\frac{c}{a} \rightarrow 0$  کشیدگی بیضی کمتر شده، به دایره نزدیک‌تر می‌شود.

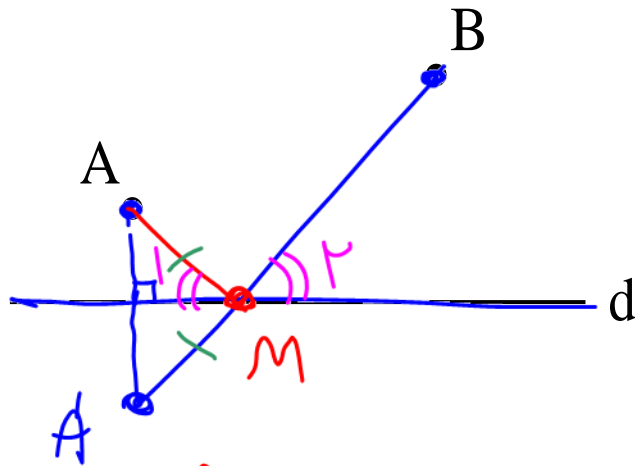
$\frac{c}{a} = 1$  پاره خط

$\frac{c}{a} = 0$  دایره



المعادن  
الکیمیاء  
الطبیعیة  
الفلسفة  
الرياضیة  
الفقه  
السیاسة  
التاريخ  
الجغرافیا  
الاجتماعیة  
الادبیة  
اللغة العربیة

یادآوری مسئله هرون (پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر) :



$$\hat{M}_1 = \hat{M}_2$$

$$AMB = AM + MB = A'B$$



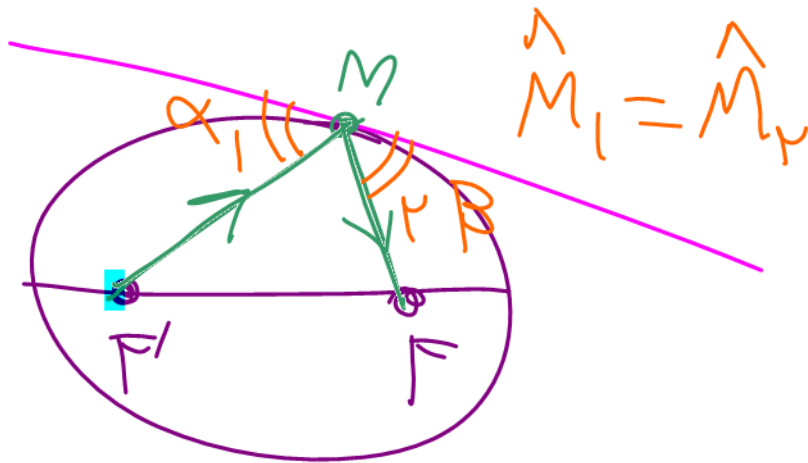
تجربها العربية

## ویژگی بازتابندگی بدنه داخل بیضی

(۱) مجموع فواصل نقطه  $M$  (نقطه تماس خط مماس با بیضی) از کانون‌های  $F$  ,  $F'$  کمترین مقدار را دارد.  
(مسئله هرون)

(۲)  $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$  (مسئله هرون)

(۳) اگر بدنه داخلی بیضی آینه‌ای باشد، شعاع نوری که از یکی از کانون‌های بیضی بر بدنه داخلی بیضی می‌تابد، انعکاسش از کانون دیگر می‌گذرد. (مسئله هرون)



العربية

۸

اگر خروج از مرکز بیضی برابر  $\frac{3}{5}$  و طول قطر کوچک بیضی ۱۶ باشد، طول قطر بزرگ بیضی و فاصله کانونی آن را به دست آورید.

۱/۵

طول قطر بزرگ بیضی و فاصله کانونی آن را به

$2c = ?$      $2a = ?$

$2b = 16$

$b = 8$

$a^2 = b^2 + c^2$

$\frac{c}{a} = \frac{3}{5}$

پ) در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد بیضی تبدیل به یک دایره می شود.

۱۱

اگر در یک بیضی طول قطر کوچک ۲۴ و فاصله کانون تا مرکز آن برابر ۵ باشد، خروج از مرکز بیضی را به دست آورید.

۱

$a^2 = b^2 + c^2$

$\frac{c}{a}$

c

2b







# نهج جديد لحل مسائل

هندسه دوازدهم

حل مسائل بیضی



## اپیزود ۱۰: حل مسایل بیضی

مساله: در یک بیضی، اندازه های قطر بزرگ و فاصله کانونی بترتیب ۸ و ۶ است. طول قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را حساب کنید.

$2a$   $2c$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\frac{c}{a}$$



مساله :

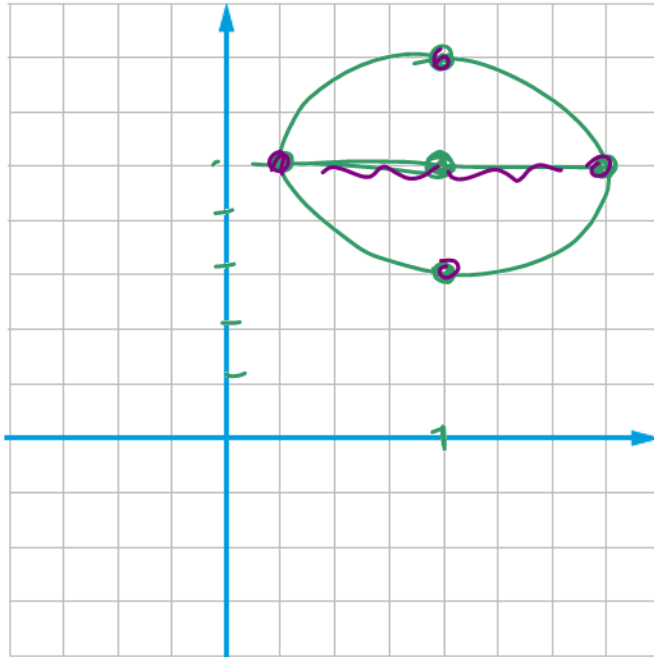
در یک بیضی افقی طول فطر بزرگ ۶ و قطر کوچک ۴ واحد است.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

اگر مرکز این بیضی نقطه‌ای با مختصات  $(4, 5)$  باشد :

الف) فاصله کانونی بیضی را پیدا کنید.

$$c = ?$$



ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ و قطر کوچک و همچنین کانون‌های بیضی را بنویسید.



عالم  
مهندسی  
ریاضی  
الف  
ب  
ج  
د  
ه  
و  
ز  
ح  
ط  
ی  
ک  
خ  
د  
ز  
ح  
ط  
ی  
ک  
خ

مساله : اگر در یک بیضی داشته باشیم؛  $a=5$  و  $b=3$  آنگاه فاصله کانونی و خروج از مرکز بیضی را حساب کنید.

$$\frac{c}{a}$$

$$2c$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$





مساله:

$$2b = 4 \rightarrow b = 2$$

$$\frac{c}{a} = \frac{4}{5}$$

$$c = \frac{4}{5}a$$

خروج از مرکز یک بیضی افقی  $\frac{4}{5}$ ، مرکز آن  $(-4, -1)$  و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است.

الف) طول قطر کانونی و فاصله کانونی را محاسبه کنید.

ب) مختصات نقاط دو سر قطر کوچک و قطر بزرگ و کانون‌های بیضی را پیدا کنید.

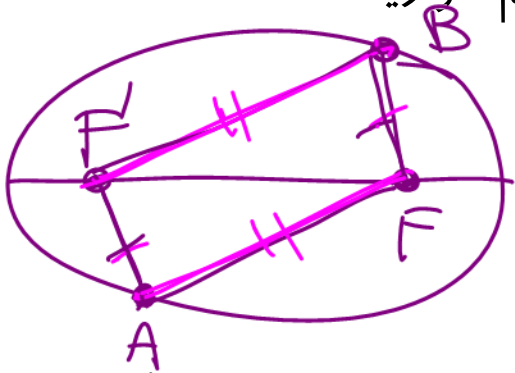
$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 9 + \frac{16}{25}a^2 \rightarrow a\sqrt{\quad} \rightarrow c\sqrt{\quad}$$



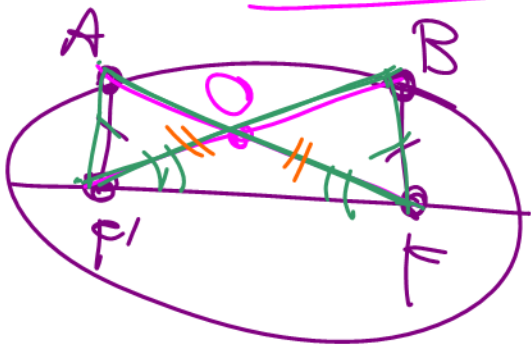
مساله: دو نقطه  $A, B$  روی یک بیضی و  $F, F'$  کانون‌های بیضی‌اند.  $A$  به کانون  $F'$  نزدیکتر و  $B$  به کانون  $F$  نزدیکتر است. اگر  $AF' = BF$  باشد، نشان دهید؛

(الف) در حالتی که دو پاره‌خط  $AF$  و  $BF'$  یکدیگر را درون بیضی قطع نکنند، با هم موازیند.



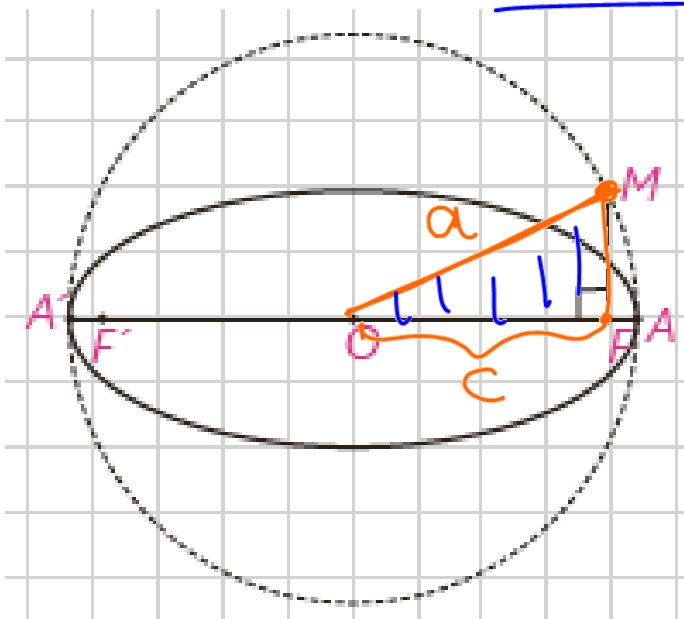
(ب) در حالتی که  $AF$  و  $BF'$  یکدیگر را درون بیضی و در نقطه‌ای مانند  $O$  قطع کنند، مثلث  $FOF'$

متساوی‌الساقین است.



المعادن  
الرياضية  
الهندسة  
الجيومتري

مساله: قطر دایره  $C$ ، مانند شکل، قطر بزرگ بیضی  $e$  است و از کانون  $F$  عمودی بر  $AA'$  رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند  $M$  قطع کند، ثابت کنید  $MF$  با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.



$$R = a$$

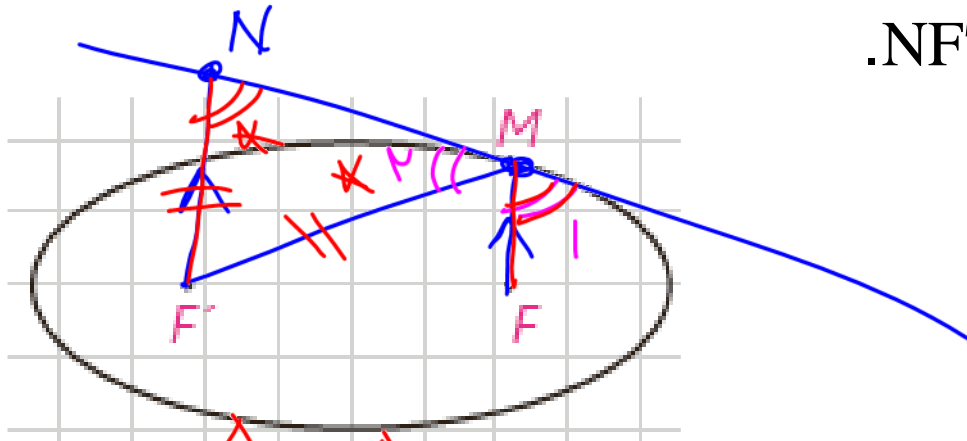
$$a = R$$

$$MF^2 = a^2 - c^2 = b^2$$

$$MF = b$$



مساله: در شکل مقابل نقطه  $M$  روی بیضی و کانون‌های  $F$  ,  $F'$  مشخص شده‌اند. خط  $d$  را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه  $M$  بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه  $F'$  خطی موازی با  $MF$  رسم کنید تا خط  $d$  را در نقطه‌ای مانند  $N$  قطع کند. ثابت کنید  $NF' = MF'$ .



$$\left. \begin{array}{l} \hat{N} = \hat{M}_1 \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \end{array} \right\} \rightarrow \hat{N} = \hat{M}_2$$



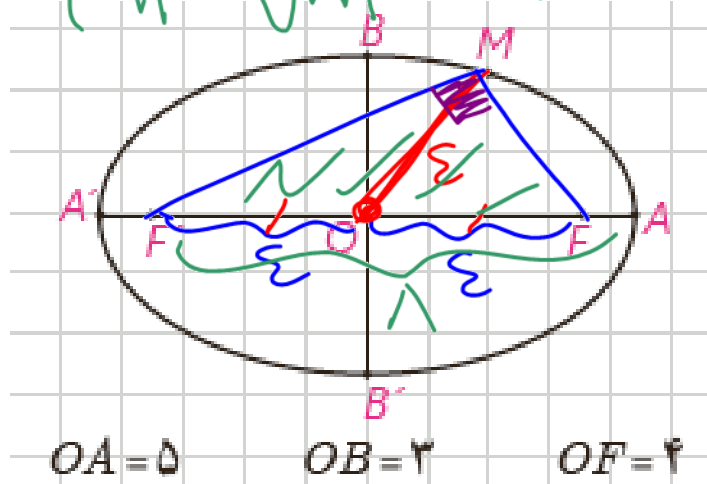
تجربا العربية

مساله: نقطه M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر

۲a ۲b

۴ واحد است؛

$$MF + MF' = 10 \rightarrow MF' = 10 - MF \quad a=5 \quad b=3$$



$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$c = 4$$

الف) نشان دهید  $OM = OF = OF'$ .

ب) نشان دهید مثلث  $MFF'$  قائم‌الزاویه است.

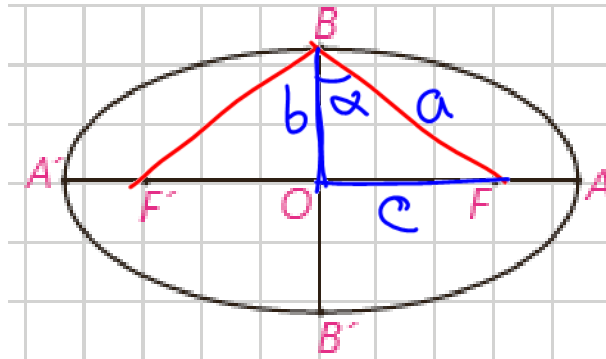
ج) طول‌های  $MF'$  و  $MF$  را به دست آورید.

$$MF^2 + MF'^2 = FF'^2 \rightarrow MF^2 + (10 - MF)^2 = 4c^2$$



تجربا العربية

مساله: در بیضی مقابل قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازه زاویه  $FBF'$  چند درجه است؟



$$\cancel{a = 2 \times b}$$

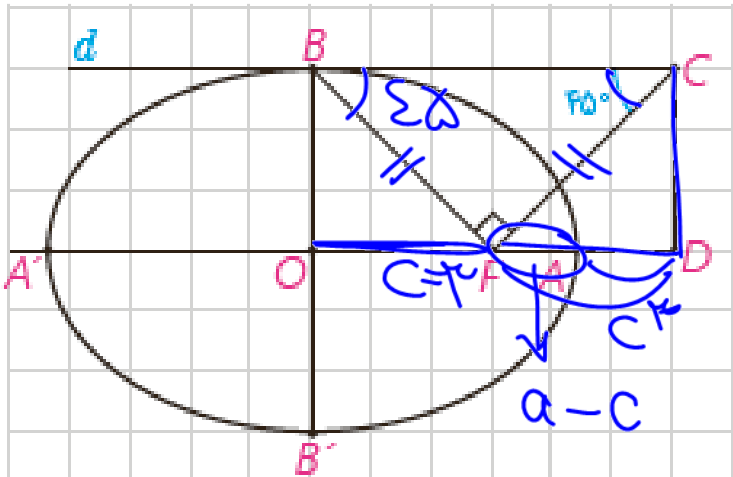
$$a = 2b$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{a} = \frac{b}{2b} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 60^\circ \rightarrow FBF' = 120^\circ$$

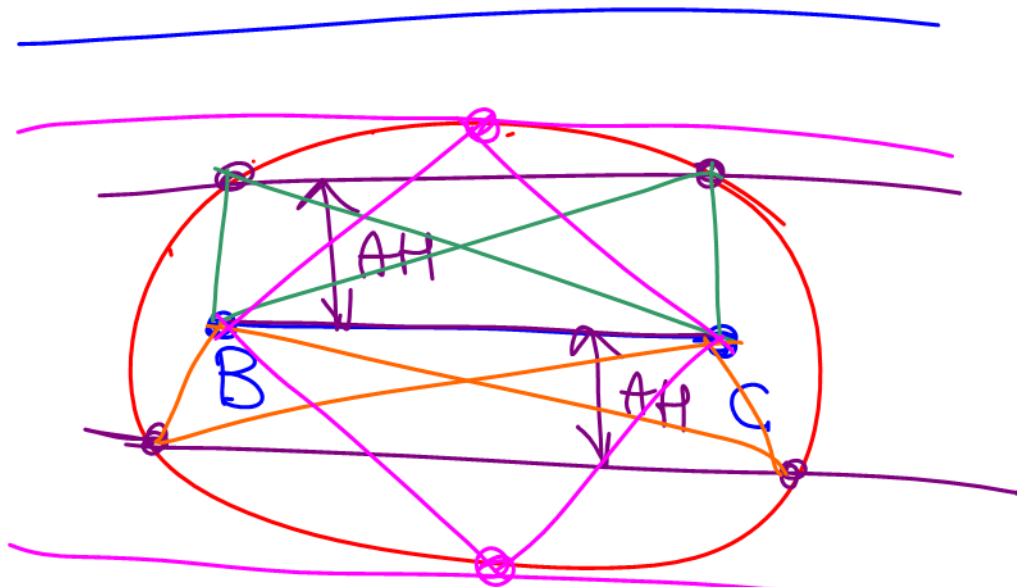


مسئله: در بیضی مقابل  $AA'$  و  $BB'$  دو قطراند. خط  $d$  در نقطه  $B$  بر بیضی مماس است. پاره خط  $BF$  را رسم می کنیم و در نقطه  $F$  عمودی بر  $BF$  رسم می کنیم تا خط  $d$  را در نقطه  $C$  قطع کند و از  $C$  عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می کنیم تا آن را در نقطه ای مانند  $D$  قطع کند. اگر  $\hat{BCF} = 45^\circ$ ، مقدار  $\frac{AD}{AF}$  را به دست آورید.



تجربا العربية

مساله: فرض کنید از مثلث  $ABC$  اندازه ضلع  $BC$  و ارتفاع  $AH$  و محیط مثلث داده شده باشد. با استفاده از خواص بیضی، روش رسم این مثلث را توضیح دهید.



~~A در هر یک از دو مکانی که با نونها B و C خواهد بود~~

$$AB + AC + BC = 2P$$

$$AB + AC = 2P - BC$$

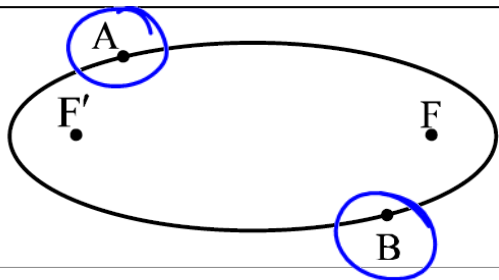
مجموعی که در آن B و C  
لذا نقطه A مسطح است  
است

محل  
تقاطع



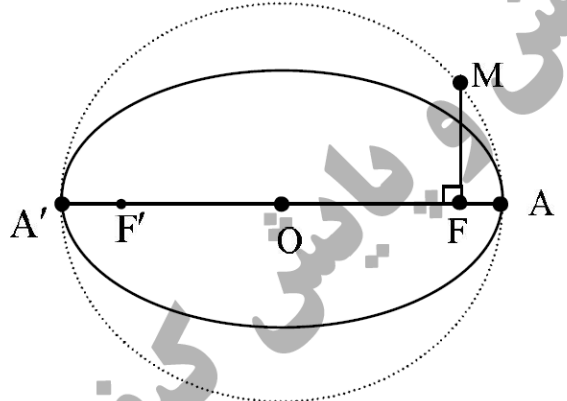
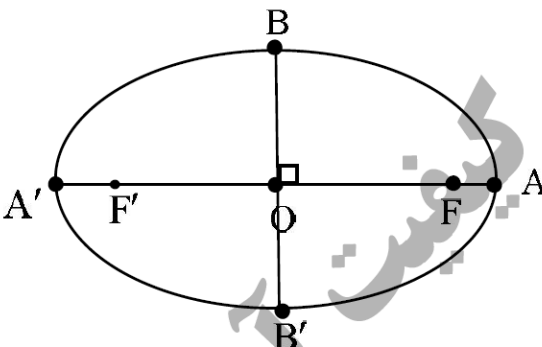
المعاريبة

۱/۲۵



دو نقطه  $A$  و  $B$  مطابق شکل روی بیضی و نقاط  $F$  و  $F'$  کانونهای بیضی اند.  
اگر  $AF' = BF$  باشد ثابت کنید دو پاره خط  $BF'$  و  $AF$  موازی اند.



<p>۱</p>	 <p>۹ قطر دایره C مانند شکل، قطر بزرگ بیضی است          واز کانون F عمودی بر AA' رسم کرده ایم تا          دایره را در نقطه ای مانند M قطع کند.  <u>ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.</u></p>	<p>۹</p>
<p>۱/۵</p>	 <p>۱۰ در بیضی مقابل طول قطر بزرگ <math>\sqrt{2}</math> برابر طول قطر کوچک  <u>است. اندازه زاویه <math>\widehat{FBF'}</math> چند درجه است؟</u></p>	<p>۱۰</p>



مکتب  
 علم  
 و  
 اخلاق  
 در  
 راه  
 سعادت  
 است





# نهج یادگیری

هندسه دوازدهم

سهمی

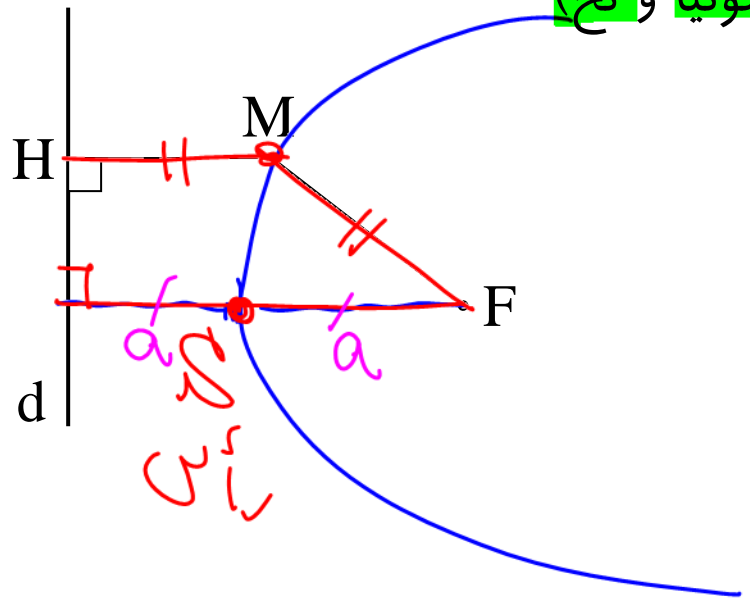


## اپیزود ۱۱ : سهمی

مسئله ترسیم : خط  $d$  و نقطه  $F$  را در نظر بگیرید. مکان هندسی نقاطی از صفحه را تعیین کنید که به

فاصله یکسانی از خط  $d$  و نقطه  $F$  قرار داشته باشند. (ترسیم با مداد و گونیا و نخ)

دواری  
کانون

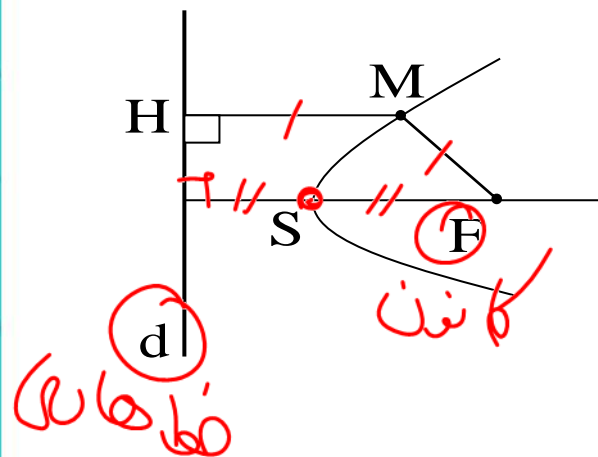


المنهج العربي

سهمی : مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه ثابت غیرواقع

بر آن خط، به یک فاصله باشند. خط ثابت را خط هادی و نقطه ثابت را کانون سهمی می‌نامیم.

اگر از F خطی بر d عمود کنیم، سهمی را در رأس سهمی قطع می‌کند.



الجمهورية العربية السورية

◀ معادله سهمی به رأس مبدأ مختصات :

$$H(-a, y)$$

$$PF = PH$$

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$\Rightarrow y^2 = 4ax$$

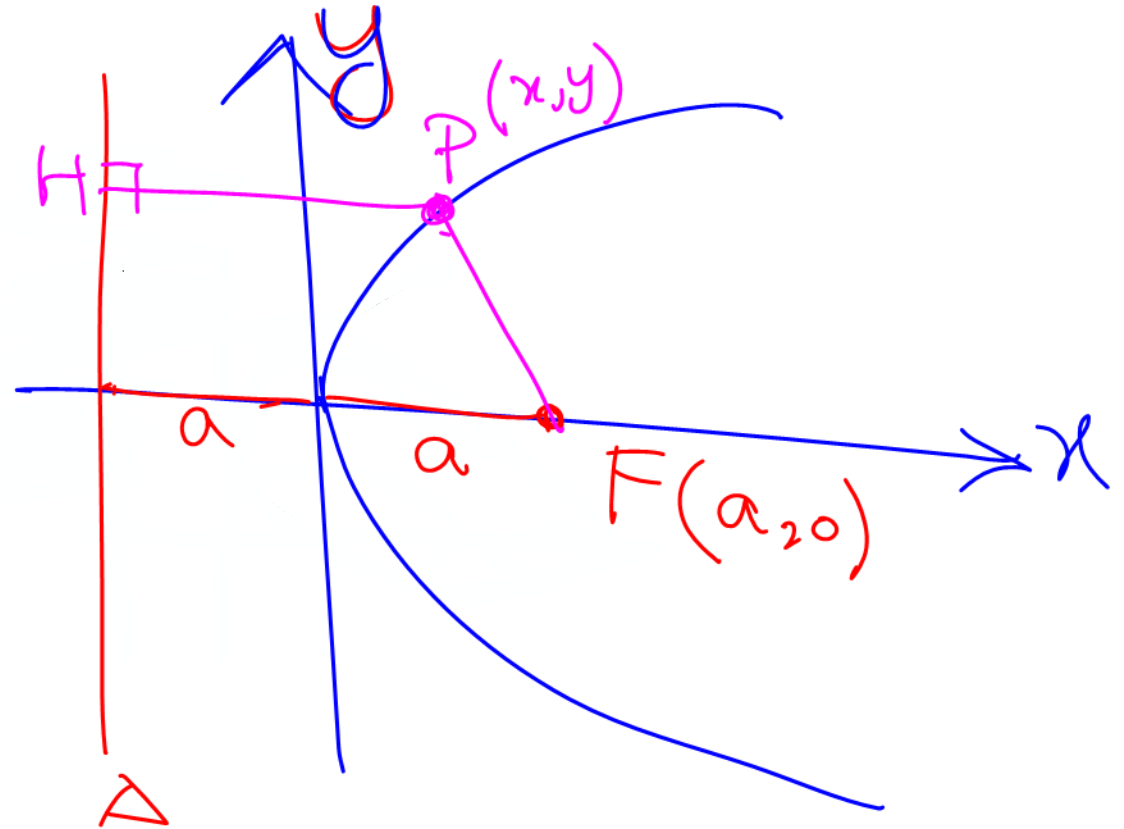
$$y^2 = -4ax$$

$$x^2 = 4ay$$

$$x^2 = -4ay$$

افق

عمود



تجرباتی

معادله سهمی	کانون	خط هادی	محور سهمی	دهانه سهمی
$(a > 0)$				
$y^2 = 4ax$	$(a, 0)$	$x = -a$	محور X	رو به راست
$y^2 = -4ax$	$(-a, 0)$	$x = a$	محور X	رو به چپ
$x^2 = 4ay$	$(0, a)$	$y = -a$	محور Y	رو به بالا
$x^2 = -4ay$	$(0, -a)$	$y = a$	محور Y	رو به پایین

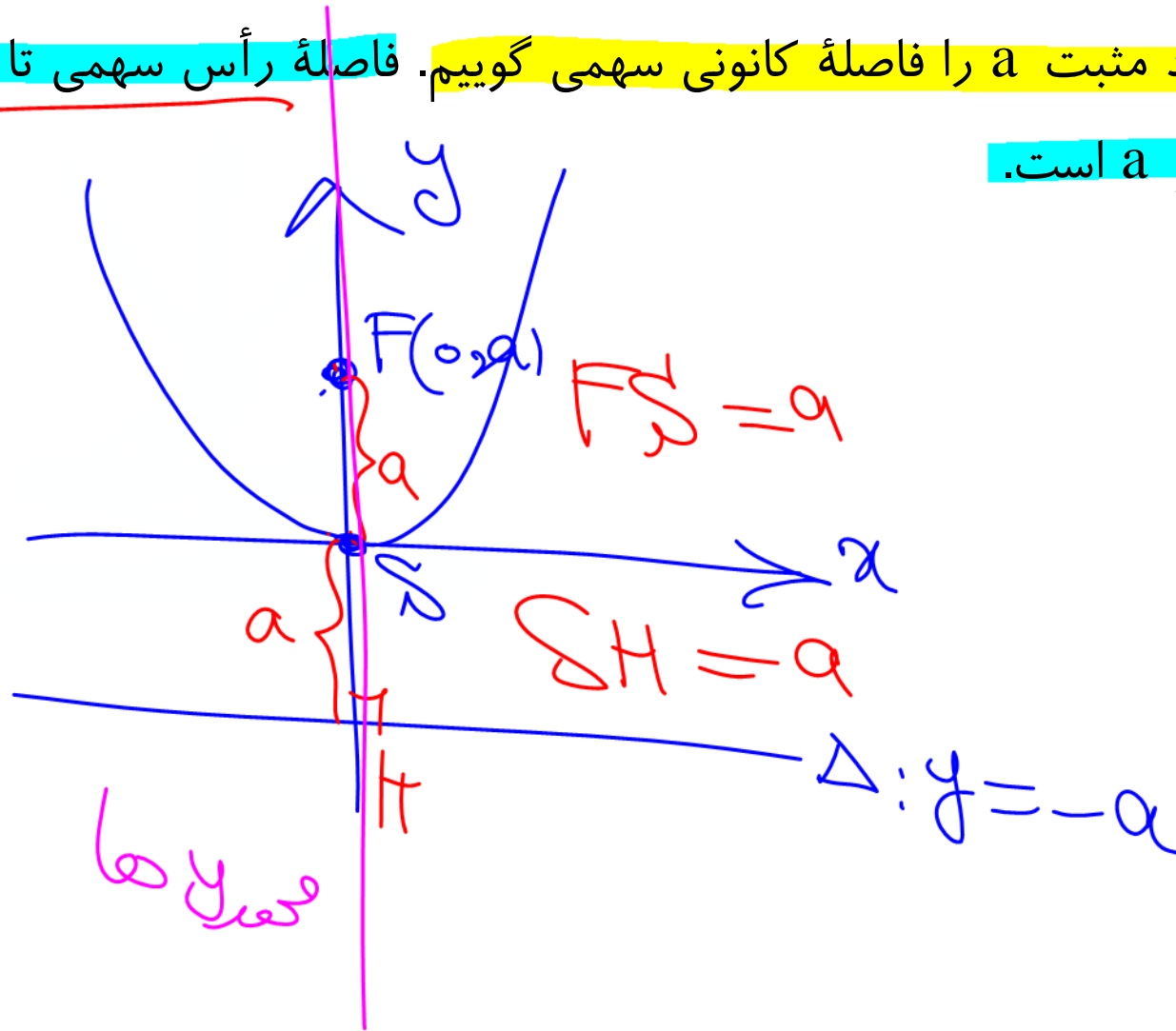


المعادن  
المركبات  
الكيمياء  
البيولوجيا  
الفيزياء  
الرياضيات

فاصله کانونی سهمی: عدد مثبت  $a$  را فاصله کانونی سهمی گوئیم. فاصله رأس سهمی تا کانون و همچنین رأس سهمی تا خط هادی برابر  $a$  است.

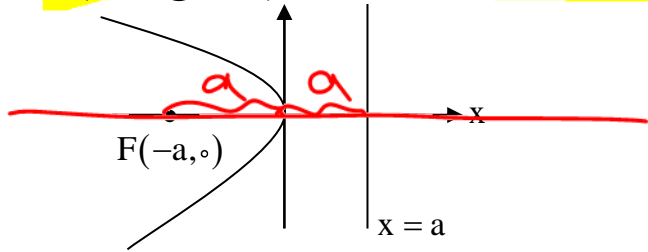
$F(\cdot, a)$

$x^2 = 4ay$



تجربا العربية

محور تقارن سهمی (محور کانونی سهمی - محور سهمی) : خطی که از کانون به خط هادی عمود می شود



را محور تقارن سهمی یا محور کانونی و یا به اختصار محور سهمی می گوئیم.

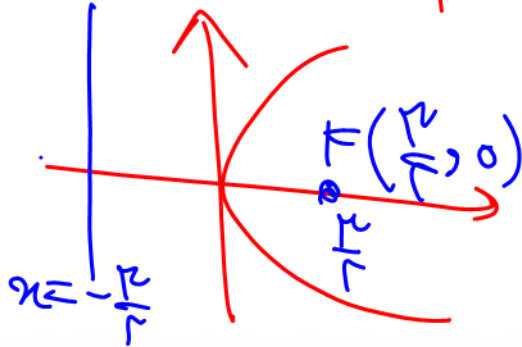
(محور X ها «سهمی افقی» یا محور Y ها «سهمی قائم»)

مساله : معادله های زیر هر کدام چه نوع سهمی هستند؟ تشریح کنید.

الف)  $y^2 = 6x$

افقی راست

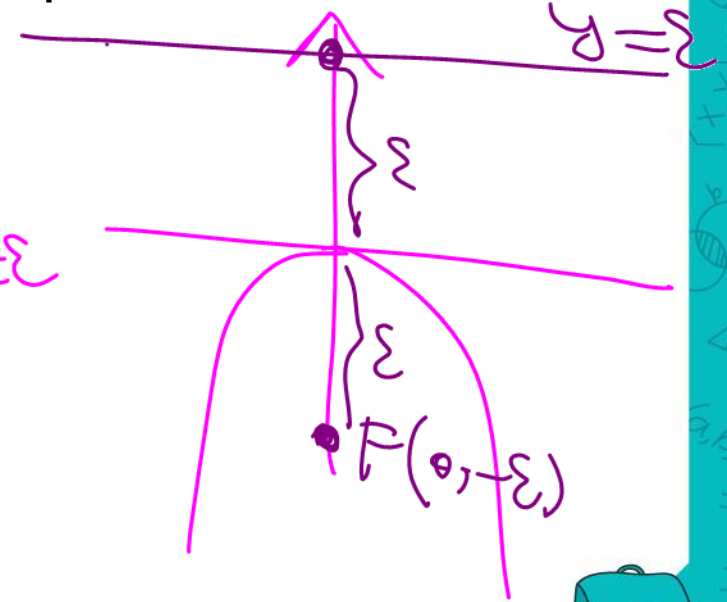
$a = \frac{6}{4} \rightarrow a = \frac{3}{2}$



ب)  $x^2 = -16y$

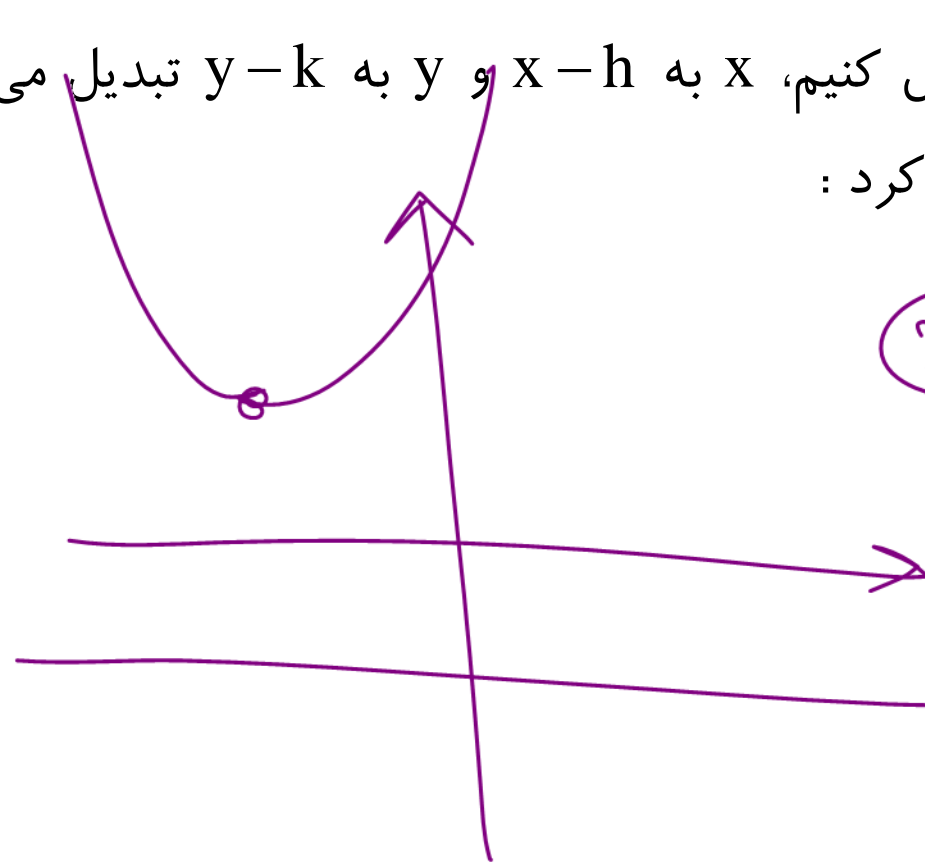
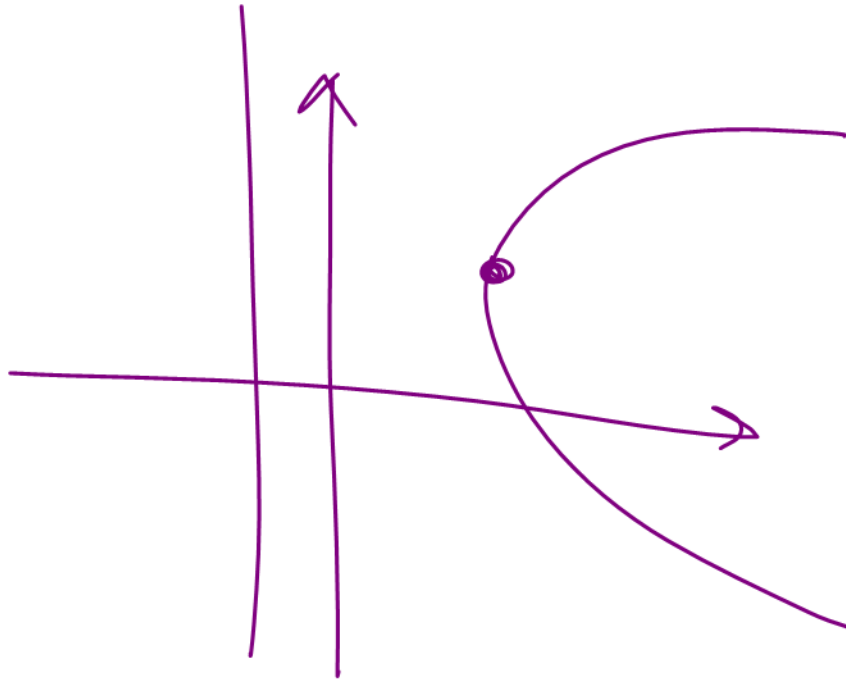
قائم رو به پایین

$a = \frac{16}{4} \rightarrow a = 4$



تجربیات کاربردی

انتقال سهمی با انتقال مبدأ مختصات با محورهای موازی : اگر رأس سهمی را از نقطه  $(0,0)$  به نقطه  $(h,k)$  منتقل کنیم،  $x$  به  $x-h$  و  $y$  به  $y-k$  تبدیل می شود که در اینصورت معادلات سهمی بصورت زیر تغییر خواهد کرد :



$$x-h$$

$$y-k$$



العربية

معادله سهمی	کانون	خط هادی	محور سهمی	دهانه سهمی
$(y - k)^2 = 4a(x - h)$ <p><i>افقی</i> <math>\rightarrow</math></p>	$(a + h, k)$	$x = -a + h$	خط $y = k$	رو به راست
$(y - k)^2 = -4a(x - h)$ <p><math>\leftarrow</math></p>	$(-a + h, k)$	$x = a + h$	خط $y = k$	رو به چپ
$(x - h)^2 = 4a(y - k)$ <p><math>\uparrow</math> <i>عمودی</i></p>	$(h, a + k)$	$y = -a + k$	خط $x = h$	رو به بالا
$(x - h)^2 = -4a(y - k)$ <p><math>\downarrow</math></p>	$(h, -a + k)$	$y = a + k$	خط $x = h$	رو به پایین



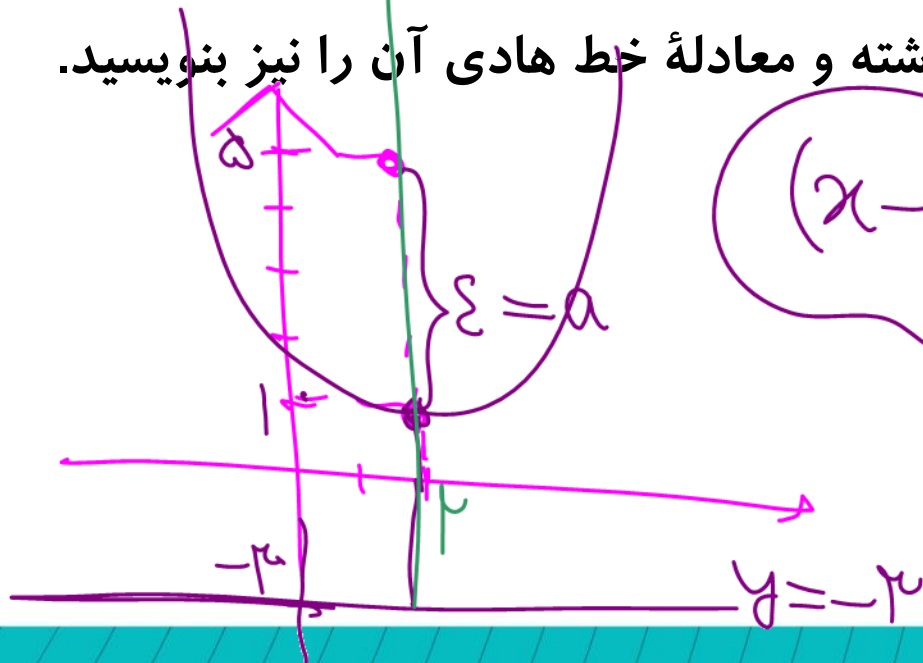
عالم ریاضیات

مثلاً معادله  $(y - k)^2 = 4a(x - h)$  معادله یک سهمی است که به اندازه  $h$  به سمت راست و به اندازه  $k$  به سمت بالا  $(k > 0, h > 0)$  انتقال یافته است.

بدیهی است در این صورت کانون سهمی نقطه  $F(a + h, k)$ ، خط هادی سهمی خط  $x = -a + h$  و محور تقارن سهمی خط  $y = k$  خواهد بود.

نورساز  $n=2$

مثال: معادله سهمی به رأس  $S(2, 1)$  و کانون  $F(2, 5)$  را نوشته و معادله خط هادی آن را نیز بنویسید.

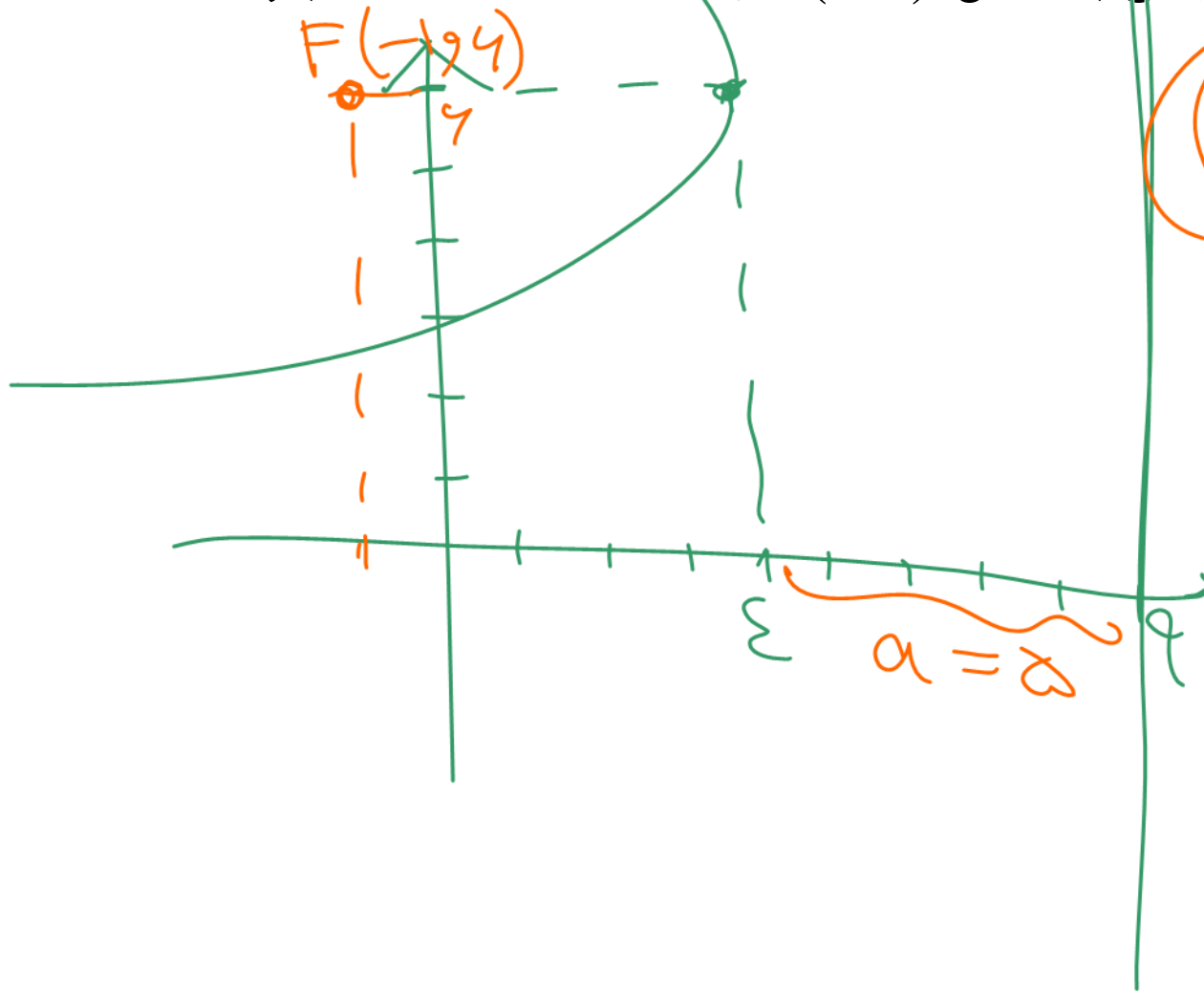


$$(x - 2)^2 = 16(y - 1)$$



الgebra العربية

مثال: مختصات کانون و همچنین معادله سهمی به رأس  $S(4, 6)$  و خط هادی  $x = 9$  را بنویسید.

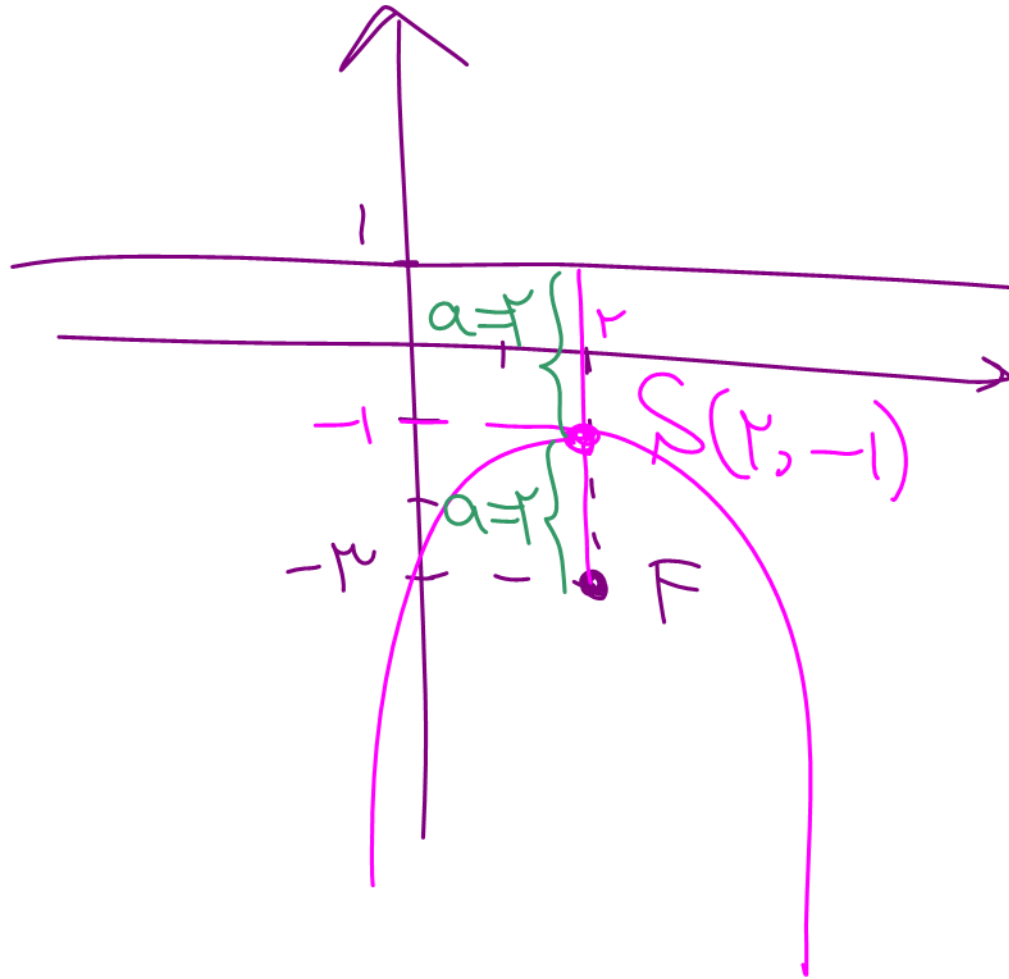


$$(y - 6)^2 = -20(x - 4)$$



تربیتی  
العربية  
المعاصرة  
الرياضيات  
العلوم  
الفيزياء  
الكيمياء  
البيولوجيا  
الاجتماعيات  
التاريخ  
اللغة العربية  
الرياضيات  
العلوم  
الفيزياء  
الكيمياء  
البيولوجيا  
الاجتماعيات  
التاريخ

مثال: معادله سهمی بنویسید که کانون آن  $F(2, -3)$  و خط هادی آن  $y = 1$  باشد.



$$(x-2)^2 = -4(y+1)$$



2  
 3  
 4  
 5  
 6  
 7  
 8  
 9  
 10  
 11  
 12  
 13  
 14  
 15  
 16  
 17  
 18  
 19  
 20  
 21  
 22  
 23  
 24  
 25  
 26  
 27  
 28  
 29  
 30  
 31  
 32  
 33  
 34  
 35  
 36  
 37  
 38  
 39  
 40  
 41  
 42  
 43  
 44  
 45  
 46  
 47  
 48  
 49  
 50  
 51  
 52  
 53  
 54  
 55  
 56  
 57  
 58  
 59  
 60  
 61  
 62  
 63  
 64  
 65  
 66  
 67  
 68  
 69  
 70  
 71  
 72  
 73  
 74  
 75  
 76  
 77  
 78  
 79  
 80  
 81  
 82  
 83  
 84  
 85  
 86  
 87  
 88  
 89  
 90  
 91  
 92  
 93  
 94  
 95  
 96  
 97  
 98  
 99  
 100



تبدیل معادلات غیراستاندارد سهمی به معادلات استاندارد: متغیری را که از درجه ۲ است مربع کامل کرده و سمت چپ معادله نگه می‌داریم و اعداد ثابت و متغیر درجه ۱ را به سمت راست می‌بریم و از ضریب متغیر درجه ۱ فاکتور می‌گیریم. معادله استاندارد شده است.

$$y = x^2 + 3x + 5$$

$$x^2 + 3x = y - 5$$

$$x^2 + 3x + \frac{9}{4} = y - 5 + \frac{9}{4}$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = y - \frac{11}{4}$$

$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2$  ← مربع کامل  
 $\frac{9}{4}$  ←  $\left(\frac{3}{2}\right)^2$

$$\left(\frac{11}{4}, -\frac{3}{2}\right)$$



تبدیل معادلات غیراستاندارد سهمی به معادلات استاندارد

مسئله : مختصات رأس، کانون و معادلات خط هادی و محور تقارن سهمی زیر را تعیین کنید.

$$y^2 - 2y + 8x + 9 = 0$$

$$y^2 - 2y = -8x - 9$$

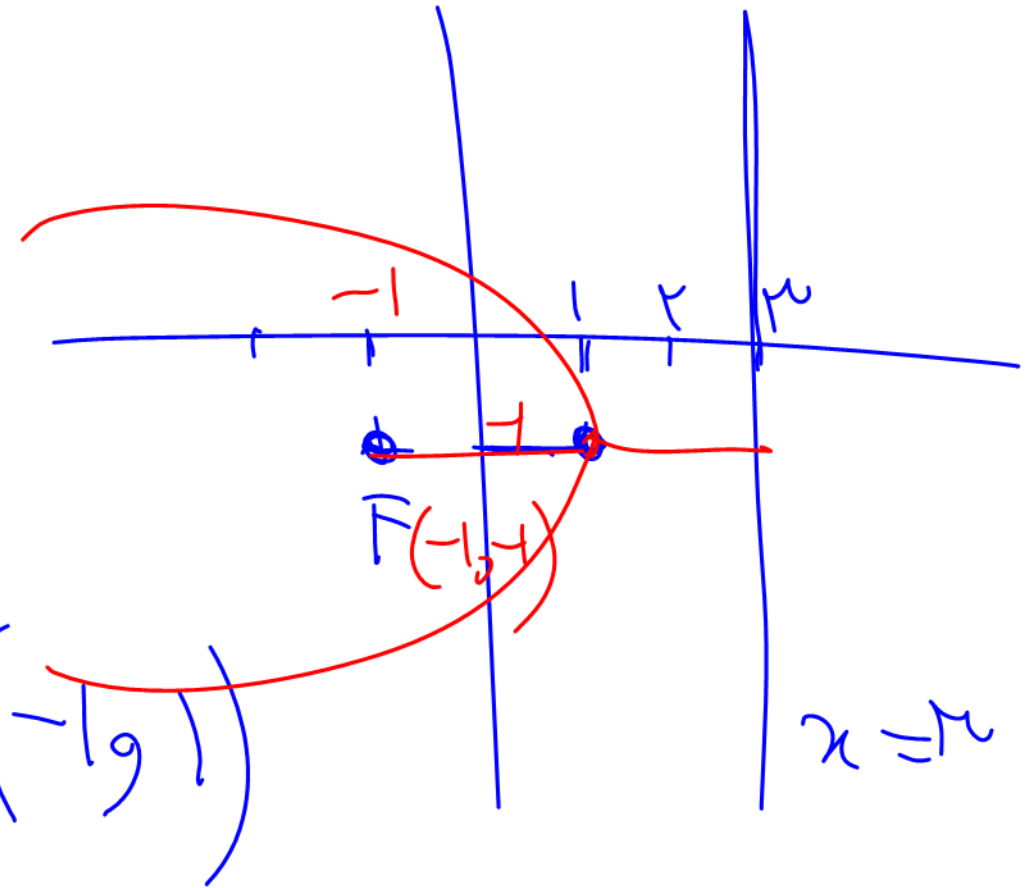
$$y^2 - 2y + 1 = -8x - 9 + 1$$

$$(y - 1)^2 = -8(x + 1)$$

انقری  $a = 1$

$$a = 2$$

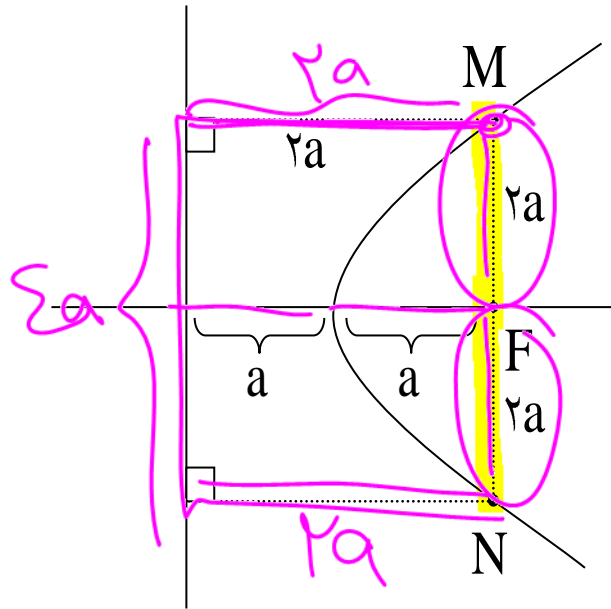
$$\Delta(-1, 1)$$



تجربا العربية

وتر کانونی سهمی : خط عمود بر محور تقارن در کانونی سهمی، سهمی را در نقاط  $N, M$  قطع می کند.

$MN$  را وتر کانونی سهمی گوئیم.



$$MN = |2a|$$



تاریخچه علم ریاضیات

رسم سهمی به کمک معادله استاندارد: ابتدا رأس و کانون سهمی را در محور مختصات مشخص می کنیم  
 سپس طبق ویژگی وتر کانونی سهمی، روی خطی عمود بر محور تقارن سهمی در  $F$  دو نقطه به فاصله  $2a$  در  
 طرفین  $F$  مشخص می کنیم و نقاط  $B', B, A$  می نامیم. نقاط  $B', B, A$  شکل تقریبی سهمی را نشان می دهند.

$$y^2 = 2x - 4y$$

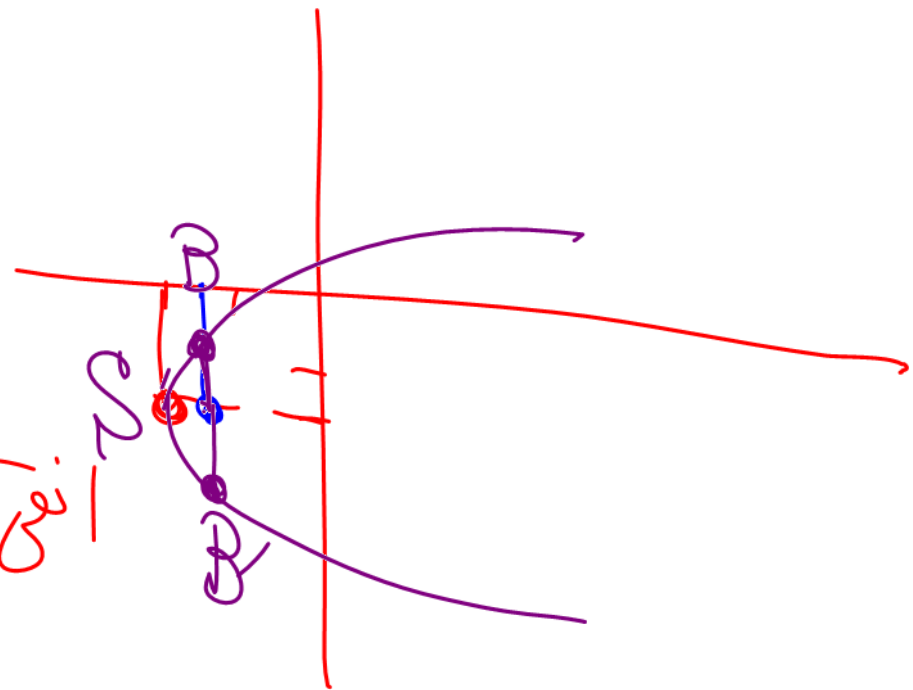
$$y^2 + 4y + 4 = 2x + 4$$

$$(y + 2)^2 = 2(x + 2)$$

$$A(-2, -2)$$

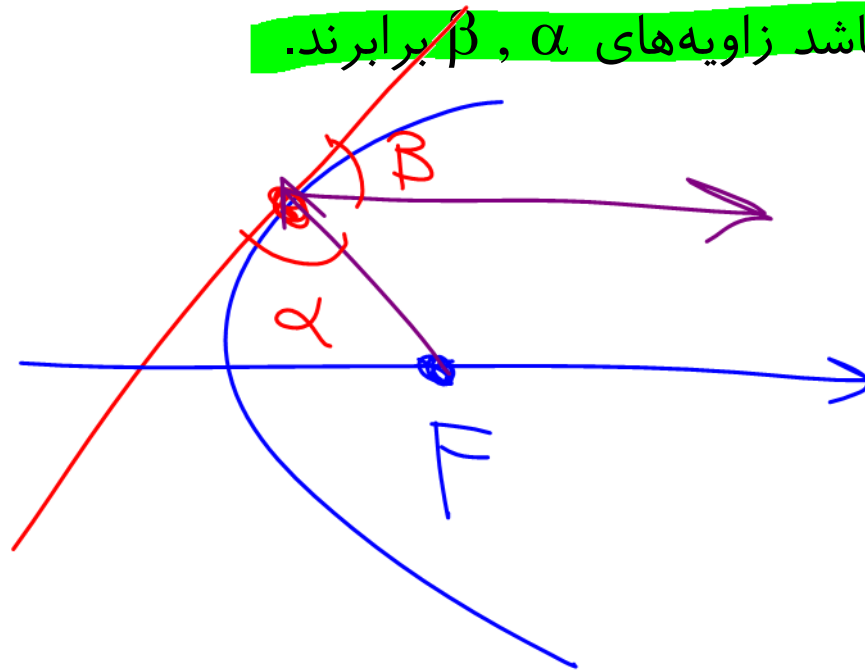
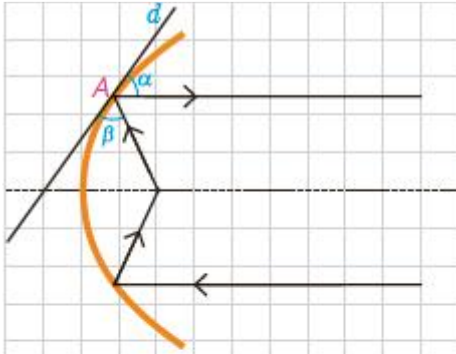
$$4a = 2 \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

نقطه رأس



المعادلة القياسية  
 المعادلات  
 الهندسة  
 الجبر  
 حساب التفاضل والتكامل  
 الاحتمال والإحصاء  
 الفيزياء  
 الكيمياء  
 البيولوجيا  
 التاريخ  
 الفلسفة  
 الفنون  
 الرياضيات  
 العلوم  
 اللغة العربية

ویژگی بازتابندگی سهمی و کاربردهای آن : یکی از ویژگی‌های مهم سهمی این است که هر شعاع نوری که از کانون سهمی بتابد بازتاب آن موازی با محور سهمی بازخواهد گشت و برعکس هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه سهمی بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت. در واقع اگر خط  $d$  بر سهمی مماس و نقطه  $A$  نقطه تماس آن باشد زاویه‌های  $\alpha$  ,  $\beta$  برابرند.



الکعبه  
المنارة  
العلماء  
العربية

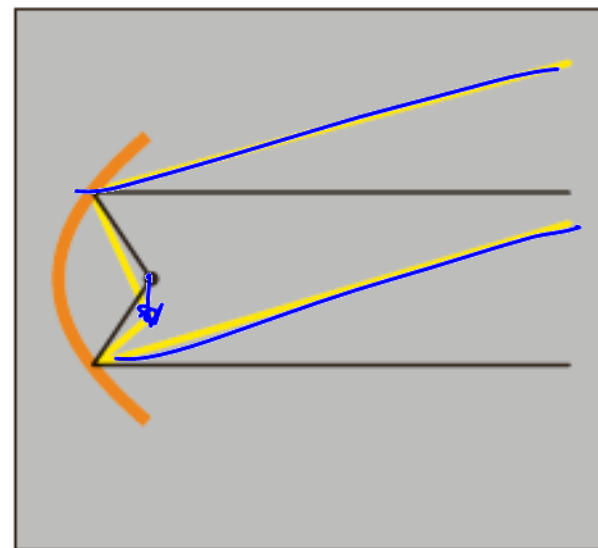
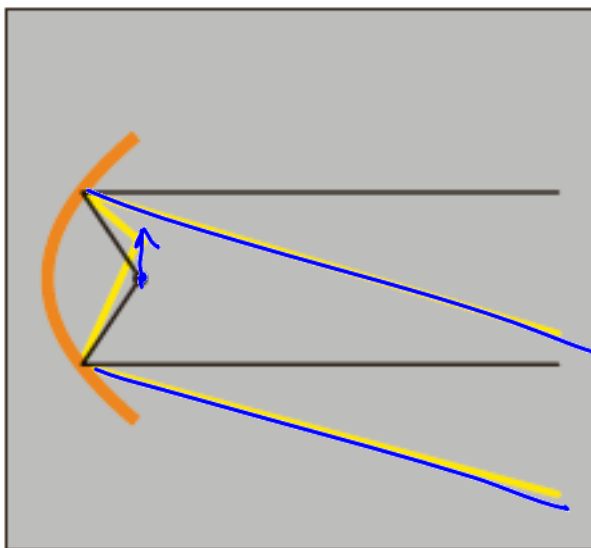
## ویژه امتحان نهایی

از این ویژگی در ساخت بسیاری از وسایل استفاده شده است. به طور مثال چراغ جلوی اتومبیل‌ها را معمولاً به گونه‌ای می‌سازند که جداره پشت لامپ به حالت سهمی باشد و جنس آینه‌ای داشته باشد و لامپ را در کانون این سهمی قرار می‌دهند. در این صورت حتی شعاع‌های نوری که به عقب تابیده می‌شوند پس از برخورد به جداره سهموی پشت لامپ به صورت شعاع‌هایی موازی با محور سهمی به جلو بازتاب می‌یابند و روشنایی بیشتری به وجود می‌آورند.



الکلیات الفیزیک

با قرار گرفتن لامپ در راستای عمودی یکسان با کانون سهمی اما کمی بالاتر یا پایین تر، شعاع‌های نور کماکان موازی با هم (نه موازی با محور) اما رو به بالا یا پایین خارج می‌شوند که اصطلاحاً نور بالا یا نور پایین ایجاد می‌کنند.

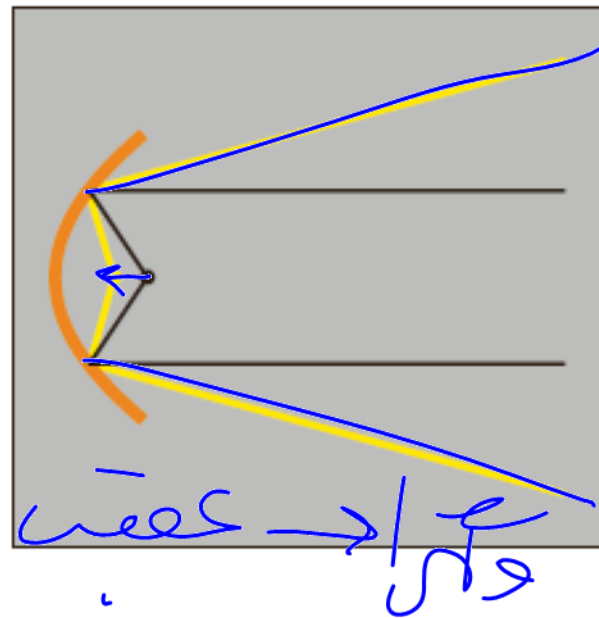
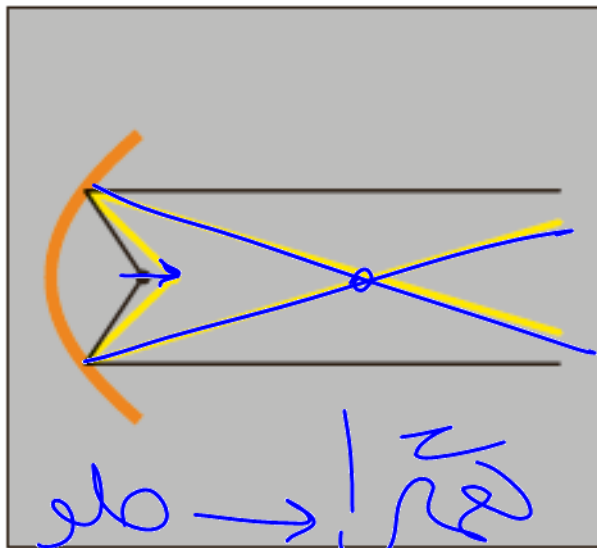


المعاري  
العلمية  
الرياضية  
الفيزياء  
الكيمياء  
البيولوجيا  
الاجتماعية  
العلوم  
الطبيعية  
الإنسانية  
الاجتماعية  
العلوم  
الطبيعية

# ویژه امتحان نهایی

اگر لامپ در راستای <sup>افقی</sup> ~~عمودی~~ کانون قرار گیرد و کمی جلوتر یا کمی عقبتر قرار گیرد شعاع‌های نور با هم

موازی خارج نمی‌شوند.



تجربه‌های علمی  
مفاهیم پایه  
شکل‌ها  
فرمول‌ها  
نقشه‌ها  
تجزیه و تحلیل

۲	<p>۱۰ سهمی <math>y^2 - 2y + 8x + 9 = 0</math> مفروض است.</p> <p>الف) مختصات رأس، کانون و خط هادی سهمی را به دست آورید.</p> <p>ب) نمودار آن را رسم کنید.</p>	۱۰
---	---	----

۲/۵	<p>۱۲ الف) مختصات رأس، کانون و معادله خط هادی سهمی <math>x^2 - 4y + 8x = 0</math> را به دست آورید.</p> <p>ب) نمودار سهمی را با استفاده از نقاط کمکی رسم کنید.</p>	۱۲
-----	---	----







# نهج جدید در جمع

هندسه دوازدهم

حل مسائل سه می



## اپیزود ۱۲: حل مسایل سهمی

مساله: مختصات رأس و کانون سهمی به معادله  $y = ax^2 + bx + c$  را بدست آورید.

$$ax^2 + bx = y - c$$

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) = y - c$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{1}{a}(y - c) + \frac{b^2}{4a^2}$$



تجربا العربية

مساله: سهمی به معادله  $y^2 = 4x - 4$  مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌های رسم می‌کنیم. مختصات نقاط برخورد سهمی و دایره را بیابید.

$$y^2 = 4(x-1)$$

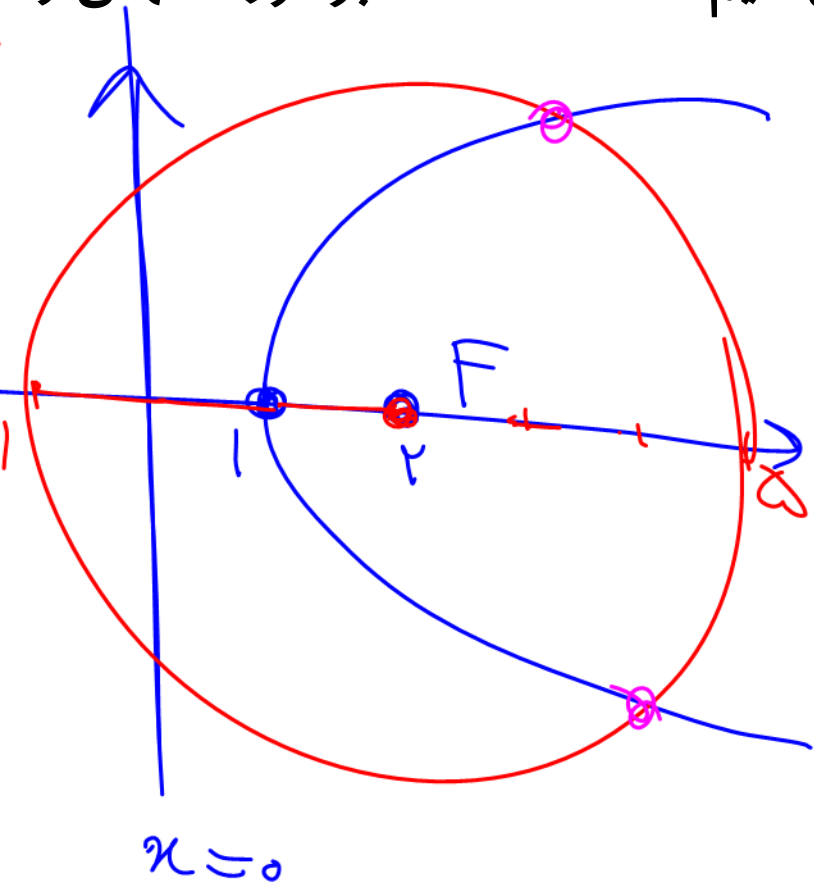
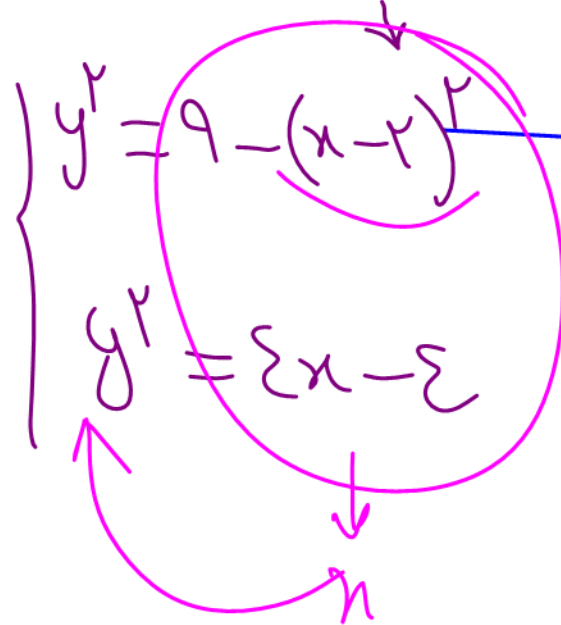
افقی (بهر راست)

$$S(0, 1)$$

$$S_0 = S \rightarrow a = 1$$

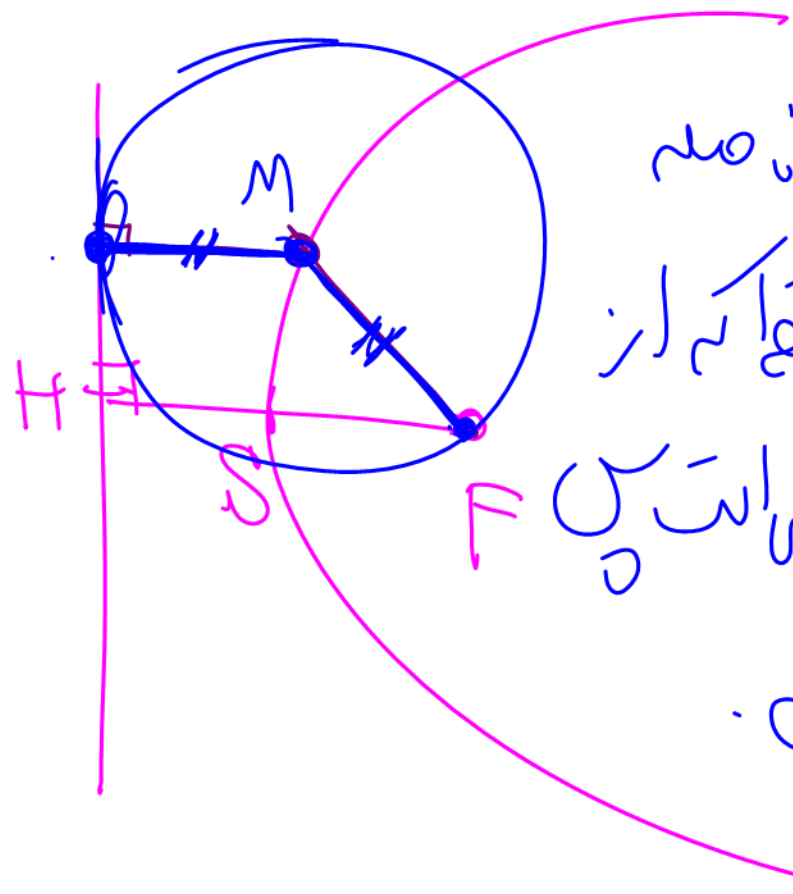
$$F(2, 0) \text{ و } R = 3$$

$$(x-2)^2 + y^2 = 9$$



تجربه العربية

مساله: سهمی با کانون  $F$  و خط هادی  $d$  مفروض است. ثابت کنید مرکز هر دایره که از  $F$  بگذرد و بر  $d$  مماس باشد، روی سهمی قرار دارد.



بسیار دایره‌ها می‌گذرد از  $F$  می‌گذرد و بر  $d$  مماس باشد به  $d$  مماس  
 است این مرکز هر دایره که از  $F$  بگذرد و بر  $d$  مماس باشد  
 از  $F$  به  $d$  فاصله یکسان باشد در هر دو جهت است  
 پس از این دایره ردی هم است.



تجربه العریبة

مساله: مقدار  $k$  را طوری تعیین کنید که فاصله کانون تا رأس سهمی  $(y-1)^2 = kx + 2$  برابر ۱ باشد.

$$a = 1$$

$$(y-1)^2 = \frac{k}{4} \left(x + \frac{2}{k}\right)$$

$$2a' = \frac{k}{4}$$

$$2 = \frac{k}{4}$$

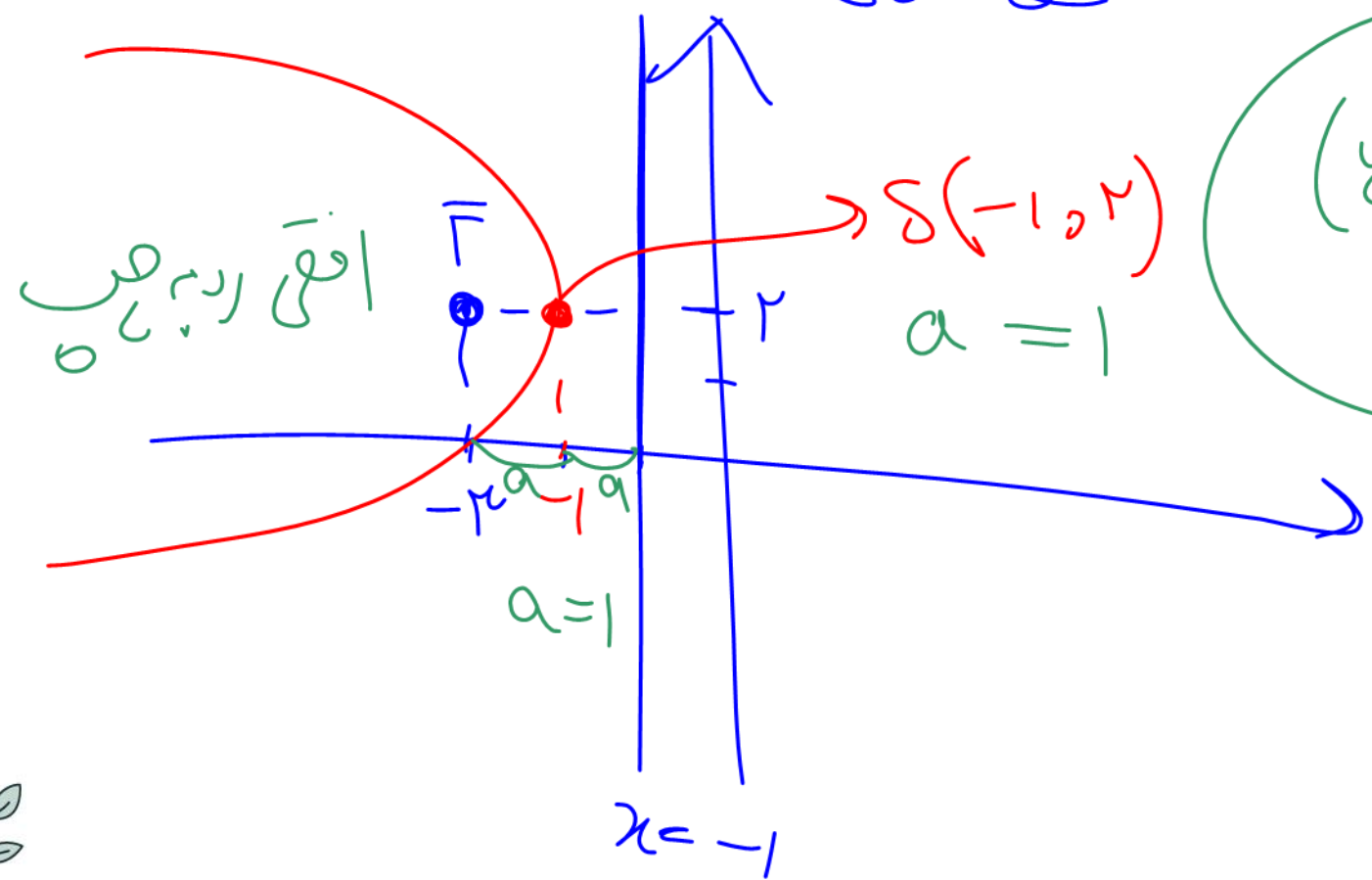
$$k = 8$$



تجربها العربية

مساله: معادله مکان هندسی نقاطی را بنویسید که از خط  $x = -1$  و نقطه  $A(-3, 2)$  به یک فاصله باشند.

ظرف‌های  
کارتون



$$(y - 2)^2 = -2(x + 1)$$



المعادلة  
المعروفة  
بـ  
المعادلة  
المعروفة  
بـ  
المعادلة  
المعروفة  
بـ

مساله: اگر  $S(0,0)$  رأس و  $F(-2,0)$  کانون یک سهمی باشد، معادلهٔ سهمی را بنویسید.



مساله: مختصات کانون و معادله خط هادی سهمی  $x^2 - 2x + 4y + 5 = 0$  را تعیین کنید.

$$x^2 - 2x + 1 = -4y - 8 + 1$$

$$(x - 1)^2 = -4(y + 1)$$

تعمیر  
مکمل

$$4a = 4$$

$$a = 1$$

$$D(-1, 1)$$



مختصات کانون و معادله خط هادی سهمی

افقی راست  $x=0$

مساله: اگر مرکز دایره  $x^2 + y^2 = 2x + 2$  کانون سهمی  $(y - \beta)^2 = 2(x - \alpha)$  باشد، معادله خط هادی

سهمی را تعیین کنید.

$S(\alpha, \beta)$

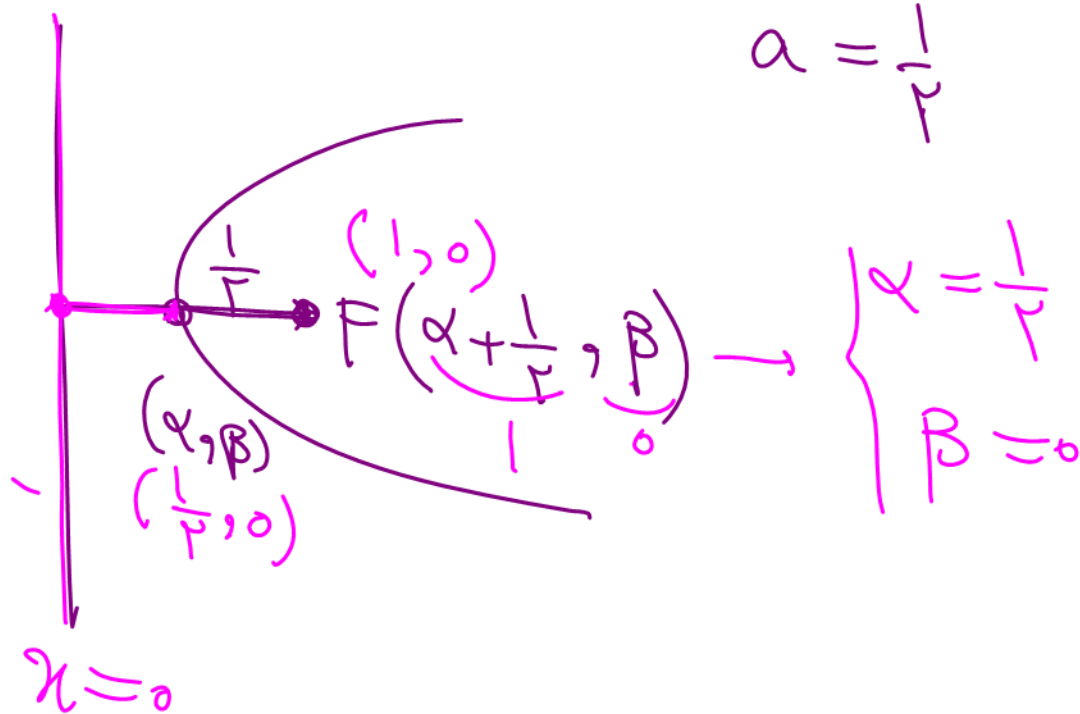
$$2a = 2$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 2 = 0$$

$$O(1, 0)$$

$$y^2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$$



تیمارهای مختلف  
مجموعه سوالات  
تاریخچه  
تاریخچه  
تاریخچه

مساله: سهمی  $P$  با کانون  $F$  و خط هادی  $d$  مفروض است. ثابت کنید مرکز هر دایره که از  $F$  بگذرد و بر خط  $d$  مماس باشد روی سهمی است و برعکس هر نقطه روی سهمی، مرکز یک دایره است که از  $F$  گذشته و بر  $d$  مماس است. در پایان با توجه به این موضوع، تعریف دیگری از سهمی ارائه کنید.

سهمی مکان هندسی مراکز دایره‌هاست که از یک نقطه ثابت گذشته و بر یک خط ثابت مماسند



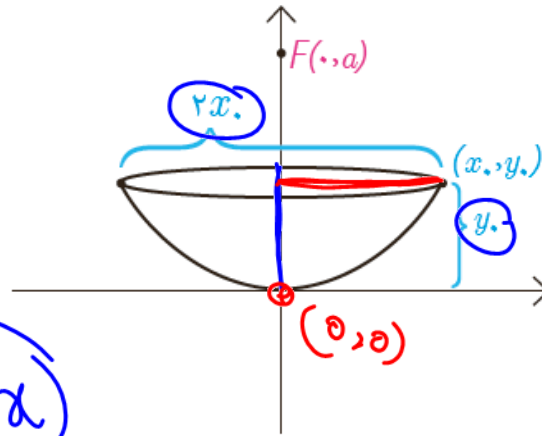
المعادن  
الکیمیاء  
الطبیعیة  
الرياضیة  
الفلسفہ



فاصله کانونی دیش =  $\frac{(\text{شعاع دهانه})^2}{4x}$



یک دانش آموز با دیدن دو دیش مخابراتی با ابعاد متفاوت و مشاهده فاصله کانونی متفاوت آنها به این فکر افتاد که چگونه می توان با داشتن یک دیش فاصله کانونی آن را به دست آورد. او از معلمش خواست که فرمولی برای محاسبه فاصله کانونی یک دیش به او بگوید. معلم به او گفت: باید قطر دهانه دیش را در خودش ضرب کرد و حاصل ضرب را بر اندازه گودی (عمق) دیش تقسیم کرد و عدد حاصل را بر ۱۶ تقسیم کرد. حاصل فاصله کانونی دیش است.



دلیل درستی این دستور را با توجه به سهمی رسم شده در شکل مقابل و فرمول سهمی توضیح دهید.

$$a = \frac{y}{16} \rightarrow a = \frac{\sum x^2}{16y} \rightarrow a = \frac{x^2}{8y}$$

$\sum x^2 = 8ay$



۰/۷۵

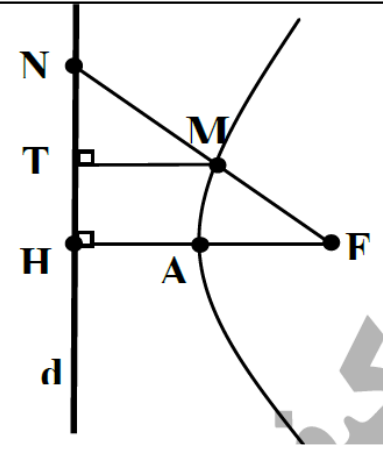
در یک دیش مخابراتی به شکل سهموی با دهانه دایره ای به قطر  $۶۰$  واحد و گودی (عمق)  $۹$  واحد مفروض است فاصله کانونی این دیش را به دست آورید.

۱۱

شعاع =  $۳۰ = r$      $y = ۹$

$$a = \frac{r^2}{4y} = \frac{۹۰۰}{۴ \times ۹} = ۲۵$$

۱/۲۵



در شکل روبرو سهمی با رأس  $A$  و کانون  $F$  و خط هادی  $d$  رسم شده است، از کانون  $F$  به نقطه دلخواه  $M$  روی سهمی وصل کرده و امتداد داده ایم تا خط  $d$  را در  $N$  قطع کند و از نقطه  $M$  ،  $MT$  را بر  $d$  عمود کرده ایم.

۱۰

ثابت کنید:  $\frac{FN}{FA} = \frac{2NT}{TH}$



فصل ۱۰ - هندسه تحلیلی





# نهج یادگیری

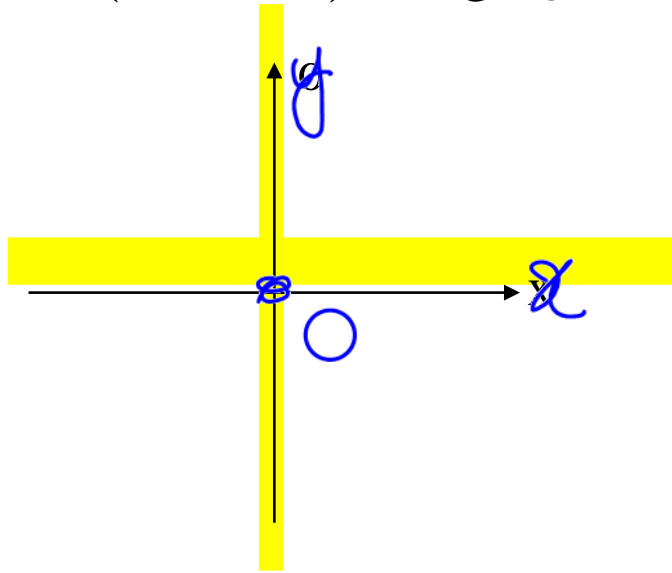
هندسه دوازدهم

فضای سه بعدی  $R^3$



## اپیزود ۱۳: فضای سه بعدی $\mathbb{R}^3$

صفحه  $\mathbb{R}^2$ : صفحه و دستگاه مختصات دوبعدی را گویند که در آن هر نقطه دقیقاً توسط یک زوج مرتب مانند  $(x, y)$  مشخص می‌شود و هر زوج مرتب دقیقاً یک نقطه از صفحه را مشخص می‌کند.  $(x, y \in \mathbb{R})$



المعاصرة  
العلمية  
الرياضية  
الفيزياء  
الكيمياء  
البيولوجيا  
الطب  
الهندسة  
العلوم  
التكنولوجيا  
البيئة  
الاجتماعية  
السياسة  
الاقتصاد  
العلوم  
الإنسانية

صفحه  $\mathbb{R}^2$  در حقیقت مجموعه‌ای شامل همه نقاطی از صفحه است که مؤلفه‌های  $x, y$  آنها عددی حقیقی است.

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

◀ **معادله خط در صفحه**: هر معادله به صورت  $ax + by = c$  که در آن مقادیر  $a, b, c \in \mathbb{R}$  هستند، معادله خط در صفحه را نشان می‌دهد.



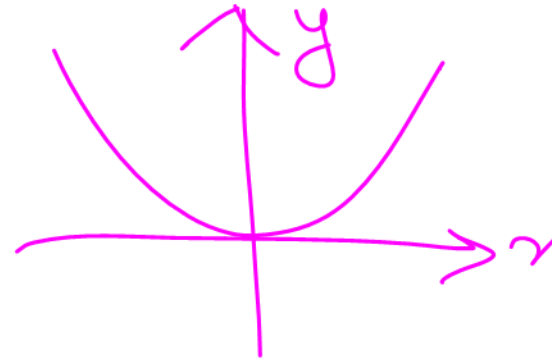
الکاف  
2  
2020/1/1  
العربية

◀ معادله یا رابطه بر حسب  $y, x$  در صفحه : رابطه یا معادله‌ای نمودار  $G$  را در صفحه مشخص می‌کند اگر و فقط اگر هر نقطه از نمودار  $G$  در آن رابطه یا معادله صدق کند.

مثال :

$$y = x^2$$

نمودار سهمی



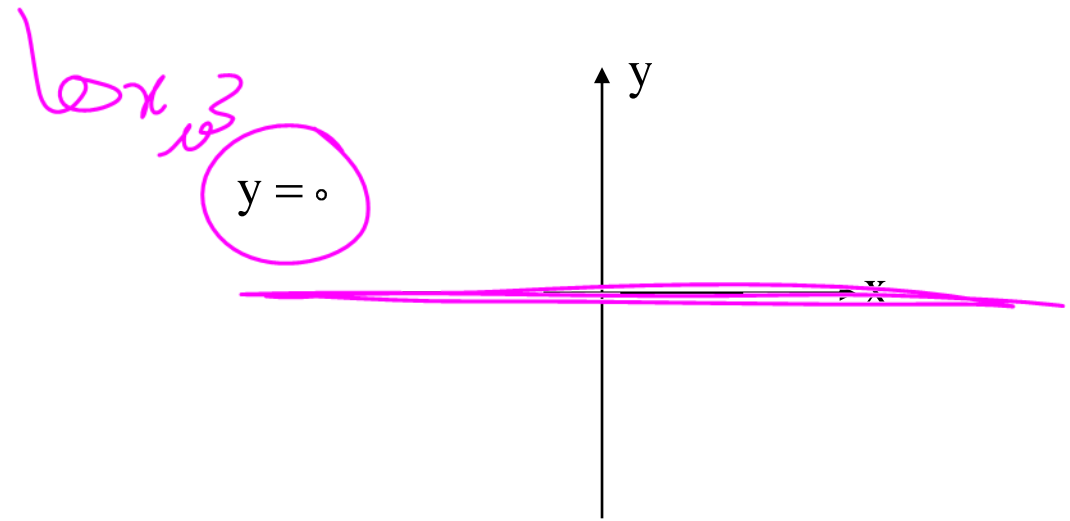
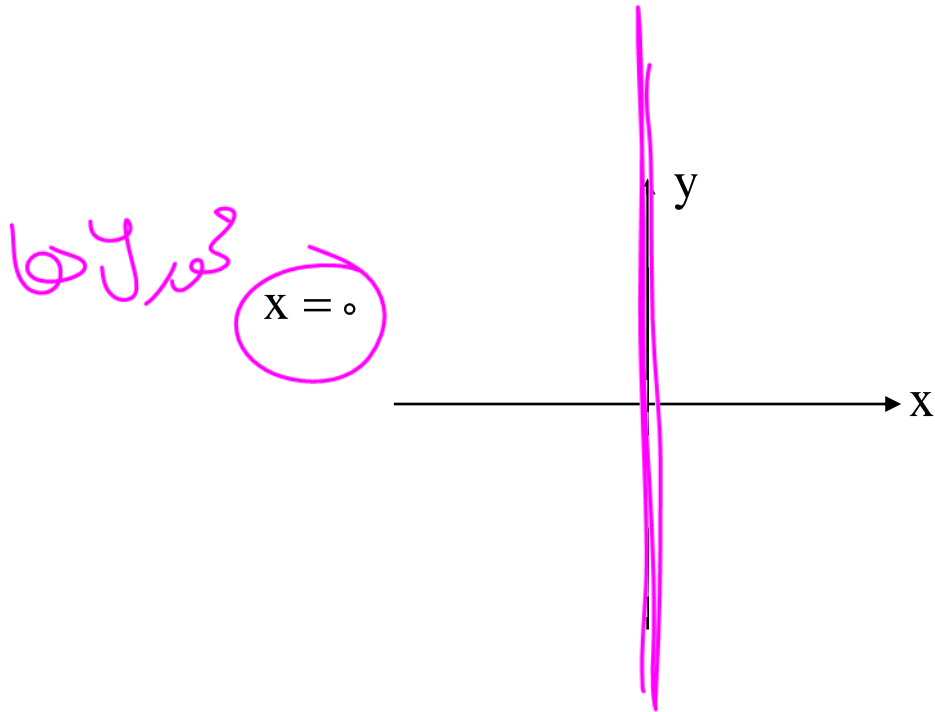
این معادله به ازای  $x = 2$  مقدار  $y = 4$  می‌دهد یعنی نقطه  $(2, 4)$  روی این معادله است و برعکس هر نقطه روی این سهمی، در معادله فوق صدق می‌کند.



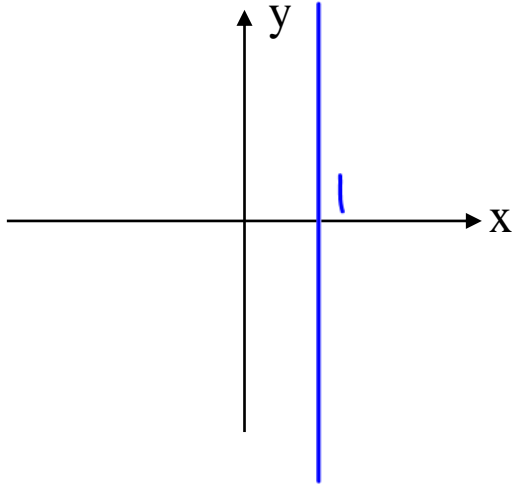
الgebra  
العربية  
المعاصرة  
الرياضية  
الهندسية  
الفيزيائية  
الكيميائية  
البيولوجية  
الاجتماعية  
السياسية  
الاقتصادية  
البيئية  
التقنية  
العلمية  
الإنسانية  
الطبيعية  
الاجتماعية  
السياسية  
الاقتصادية  
البيئية  
التقنية  
العلمية  
الإنسانية  
الطبيعية

رسم نمودار رابطه‌ها و معادلات در صفحه  $\mathbb{R}^2$  :

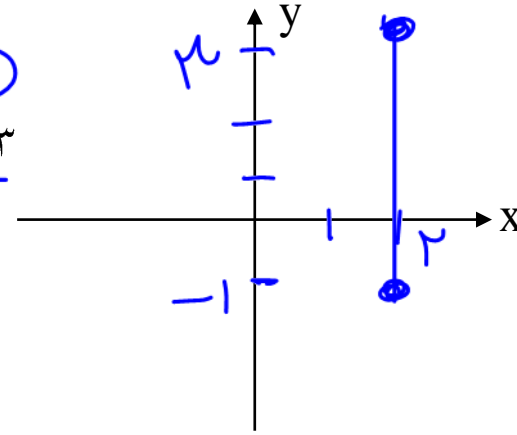
الف) اگر رابطه یا معادله، یک تساوی بود که به راحتی قابل رسم است و با نمایش چند نقطه از آن در صفحه، شکل کیفی (تقریبی) معادله یا رابطه به دست می‌آید.



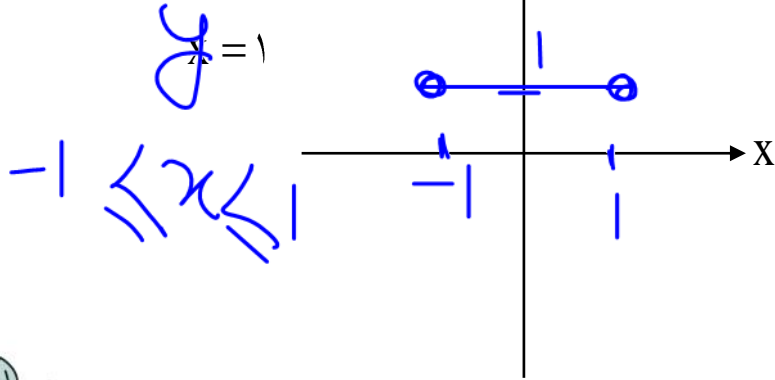
$$x = 1$$



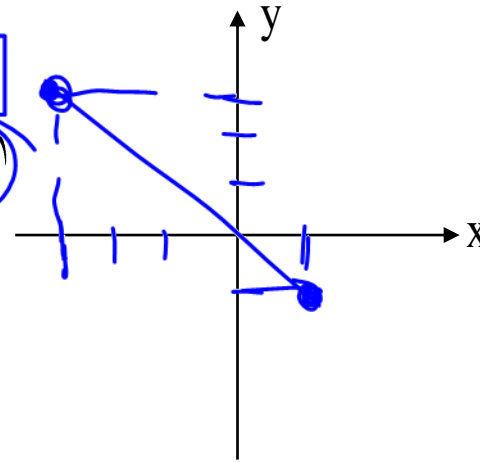
$$\begin{aligned} x &= 2 \\ -1 &\leq y \leq 3 \end{aligned}$$



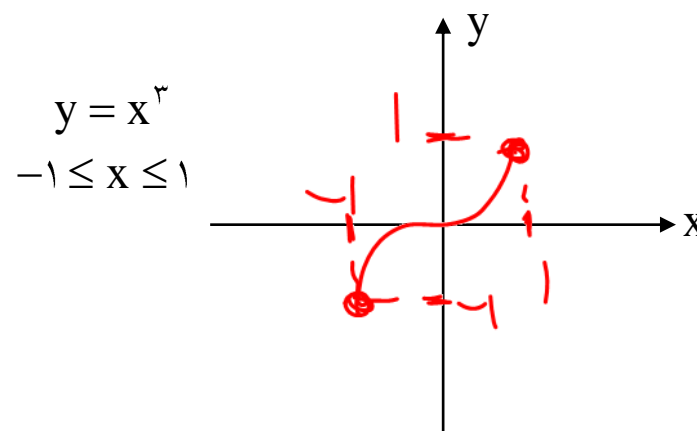
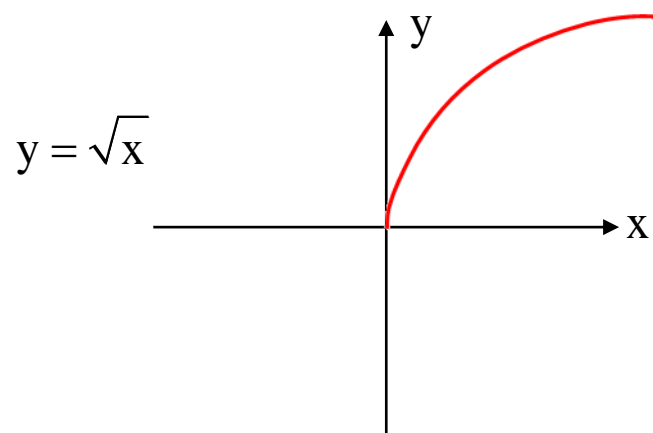
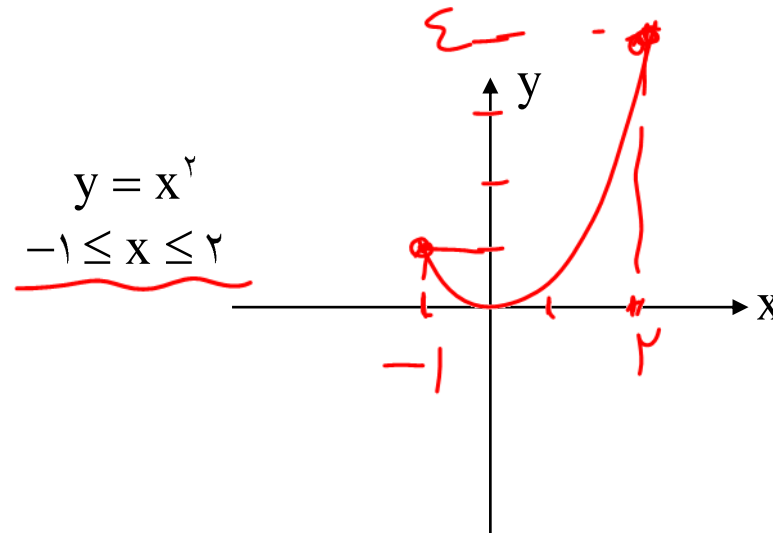
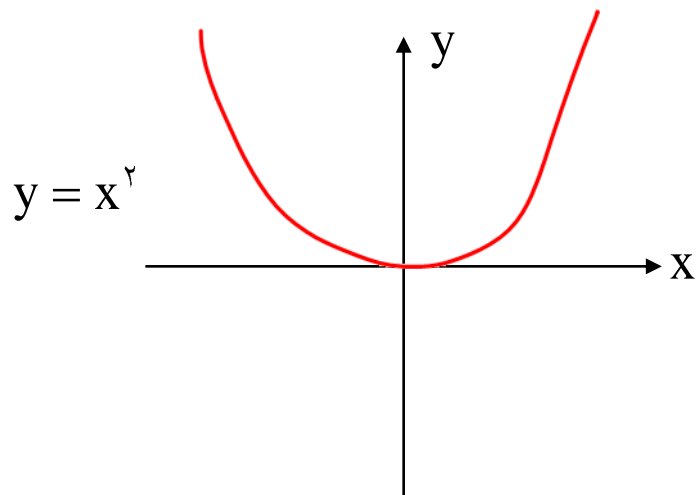
$$x = 1$$



$$\begin{aligned} y &= -x \\ -3 &\leq x \leq 1 \end{aligned}$$



الماتریه  
 هندسه  
 فیزیک  
 شیمی  
 ریاضیات  
 علوم



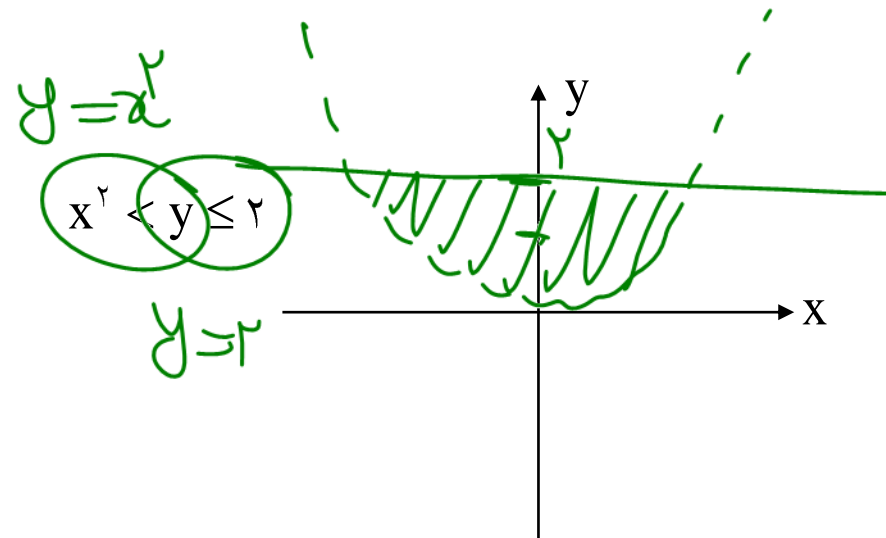
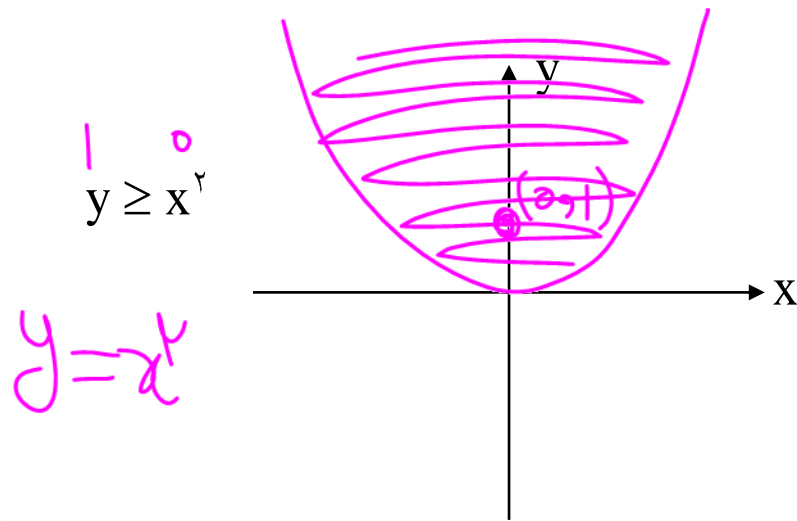
تجربہ  
میں  
مکمل  
ہو  
سکتا  
ہے  
میں  
مکمل  
ہو  
سکتا  
ہے  
میں  
مکمل  
ہو  
سکتا  
ہے



ب) اگر رابطه بصورت نامعادله و نامساوی باشد، ابتدا آن را به تساوی تبدیل کرده و رسم می کنیم، سپس با نقطه یابی در طرفین معادله، سمت قابل قبول را هاشور می زنیم.

توجه: رابطه های کوچکتر یا مساوی یا بزرگتر یا خط و رابطه های بزرگتر یا کوچکتر با خط چین

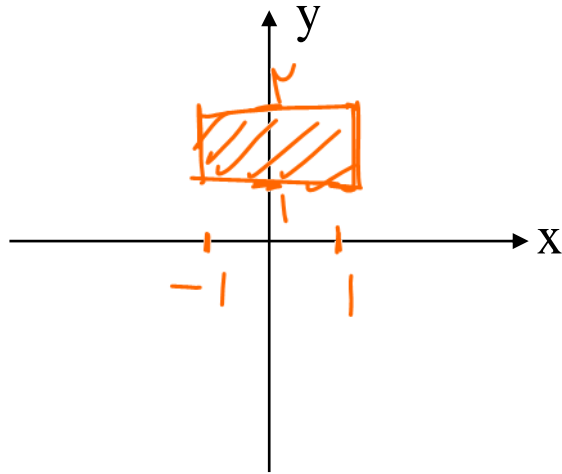
مشخص می شوند.



المعادلات  
و المتباينات  
في المتغيرين  
المعبرين  
المعبرين

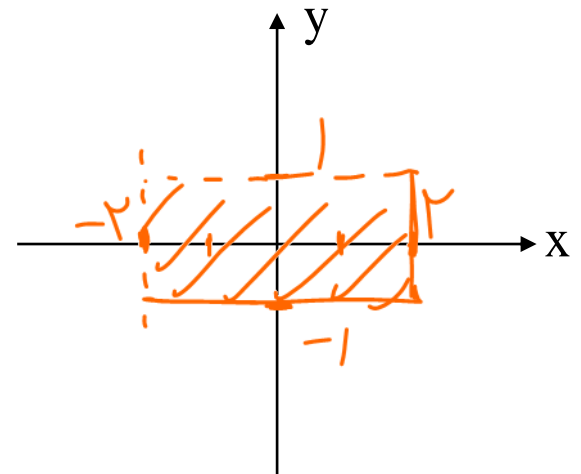
$$-1 \leq x \leq 1$$

$$1 \leq y \leq 2$$



$$-2 < x \leq 2$$

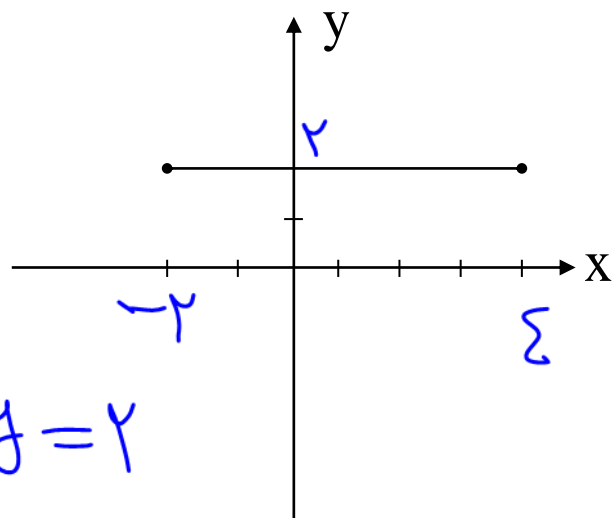
$$-1 \leq y < 1$$



مجموعه  
سوال  
و  
پاسخ  
آزمون  
نهایی  
ریاضی  
فصل  
اول  
و  
دوم

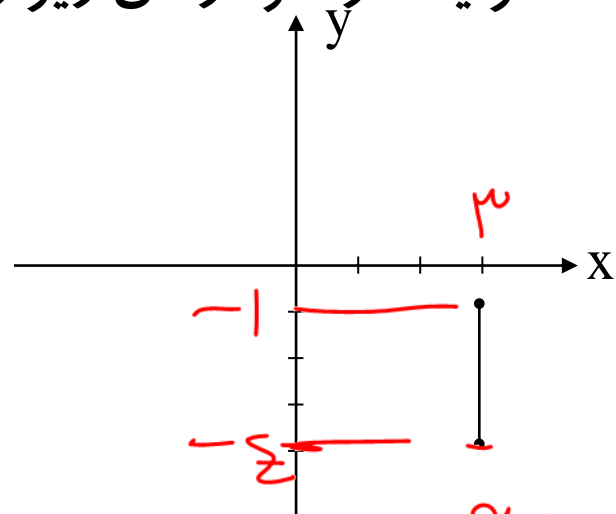


مثال : معادله یا رابطه‌ی هر یک از نمودارهای زیر را بنویسید.



$$y = 2$$

$$3 > x > 1$$



$$x = 2$$

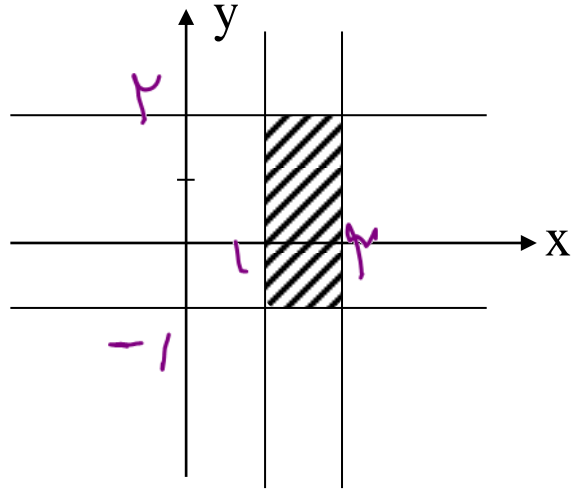
$$-3 < y < -1$$



تجربیات  
مفید  
در  
مطالعه  
و  
آموزش

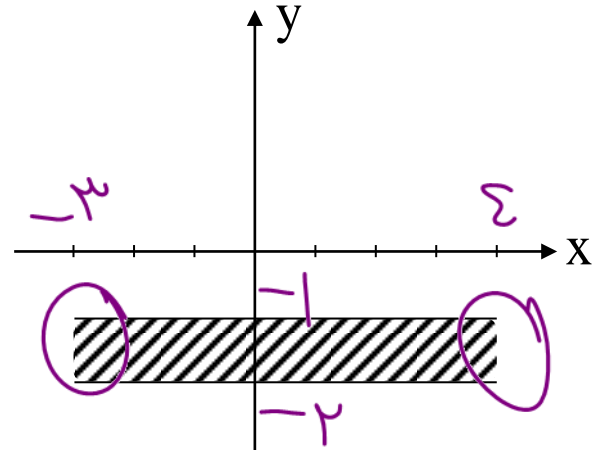
$$1 < x < 2$$

$$-1 < y < 1$$



$$1 < y < 2$$

$$-3 < x < 3$$



تجربا العریة

مثال : نمودار رابطه‌های زیر را رسم کنید.

✓ الف)  $-1 \leq x < 1$  و  $-2 \leq y \leq 3$

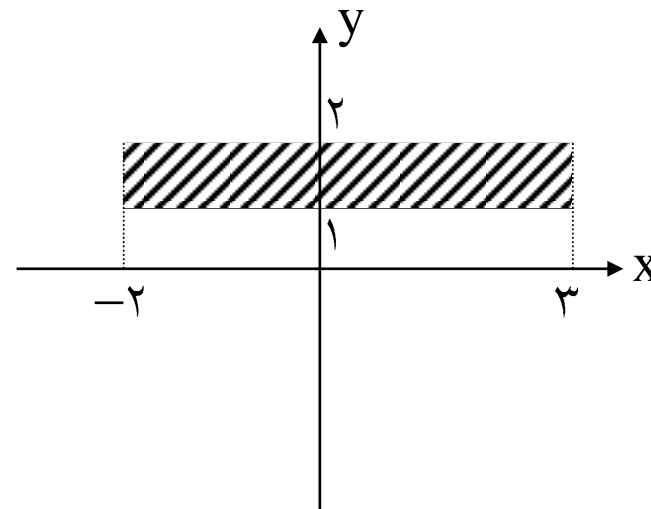
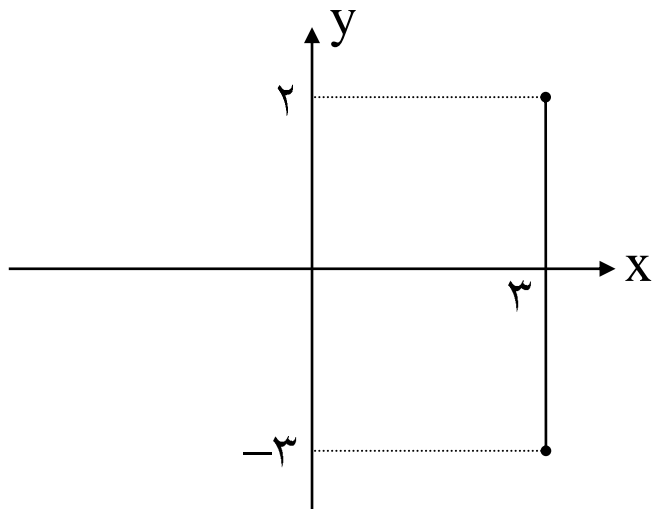
✓ ب)  $0 \leq y \leq x^2$

✓ پ)  $-2 \leq x < 2$  و  $y = 2$



المنهج العربي

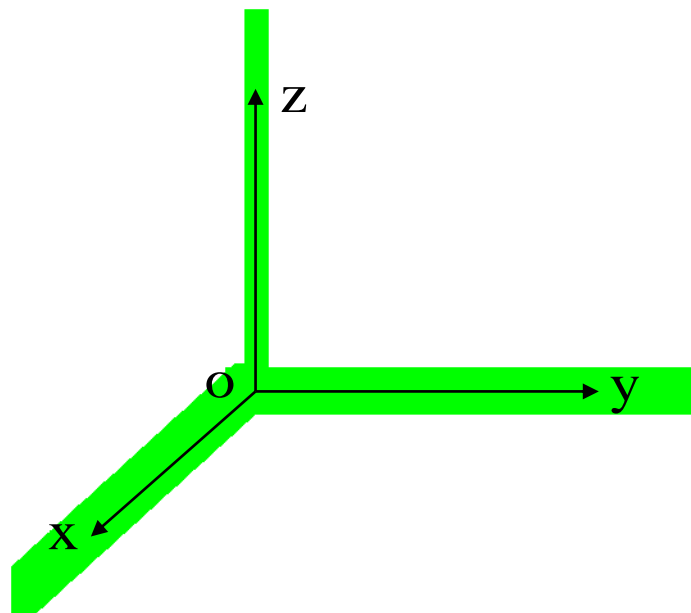
مثال : معادلات روابط زیر را بنویسید.



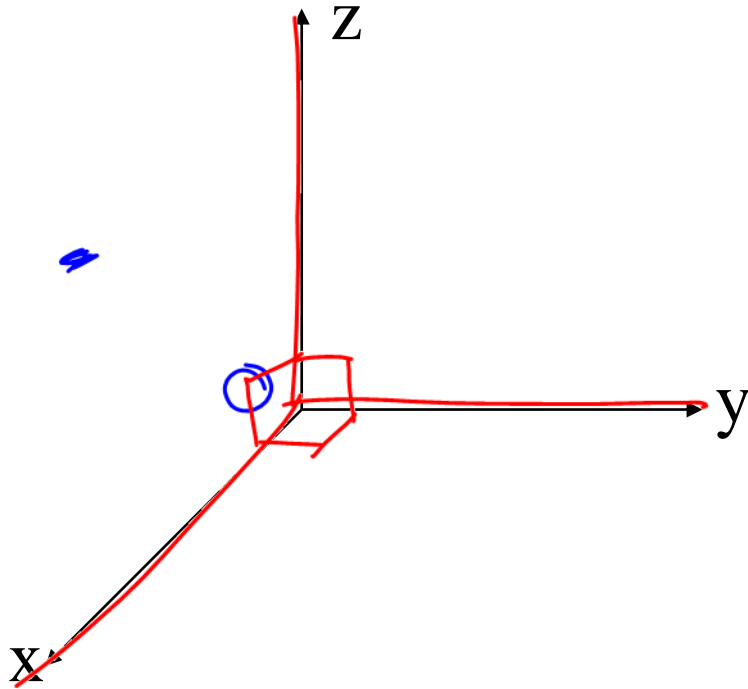
تجربها العربية

فضای  $\mathbb{R}^3$ : مجموعه تمام سه‌تایی‌های مرتب به صورت  $(x, y, z)$  که در آنها  $x, y, z$  اعداد حقیقی هستند، تشکیل فضای  $\mathbb{R}^3$  می‌دهند.

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$



◀ محوره‌های مختصات در فضای  $\mathbb{R}^3$  : دستگاه مختصات فضای  $\mathbb{R}^3$  از سه محور دوجه‌دو عمود بر هم تشکیل شده است که در مبدأ مختصات (0) هم‌رسند.



محور x ها (OX)

محور y ها (OY)

محور z ها (OZ)



فصل ۱  
مجموعه  
۲  
۳  
۴  
۵  
۶  
۷  
۸  
۹  
۱۰  
۱۱  
۱۲  
۱۳  
۱۴  
۱۵  
۱۶  
۱۷  
۱۸  
۱۹  
۲۰  
۲۱  
۲۲  
۲۳  
۲۴  
۲۵  
۲۶  
۲۷  
۲۸  
۲۹  
۳۰  
۳۱  
۳۲  
۳۳  
۳۴  
۳۵  
۳۶  
۳۷  
۳۸  
۳۹  
۴۰  
۴۱  
۴۲  
۴۳  
۴۴  
۴۵  
۴۶  
۴۷  
۴۸  
۴۹  
۵۰  
۵۱  
۵۲  
۵۳  
۵۴  
۵۵  
۵۶  
۵۷  
۵۸  
۵۹  
۶۰  
۶۱  
۶۲  
۶۳  
۶۴  
۶۵  
۶۶  
۶۷  
۶۸  
۶۹  
۷۰  
۷۱  
۷۲  
۷۳  
۷۴  
۷۵  
۷۶  
۷۷  
۷۸  
۷۹  
۸۰  
۸۱  
۸۲  
۸۳  
۸۴  
۸۵  
۸۶  
۸۷  
۸۸  
۸۹  
۹۰  
۹۱  
۹۲  
۹۳  
۹۴  
۹۵  
۹۶  
۹۷  
۹۸  
۹۹  
۱۰۰

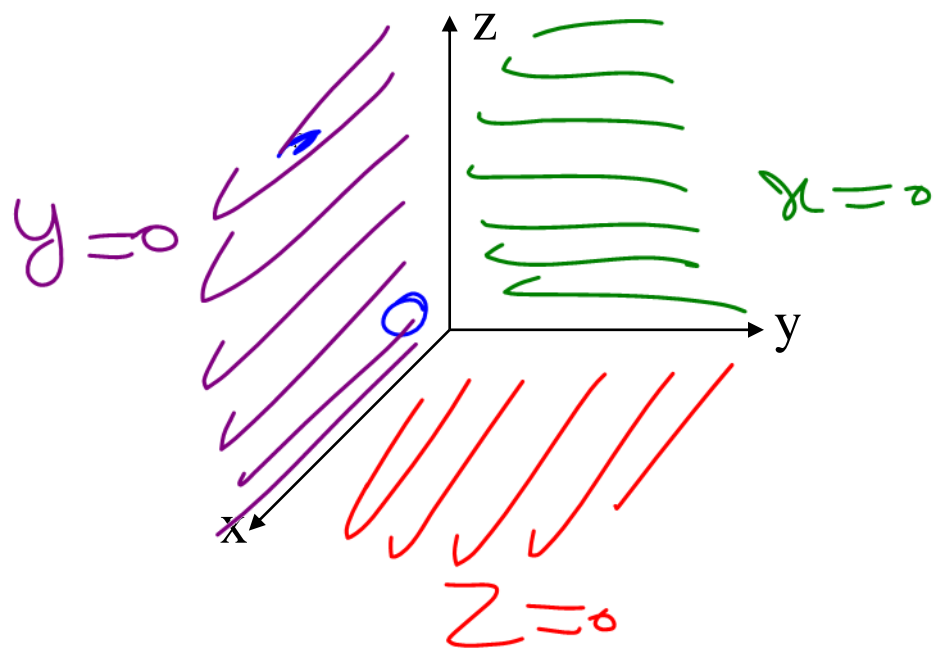
صفحات مختصات در فضای  $\mathbb{R}^3$  : در دستگاه مختصات فضای  $\mathbb{R}^3$ ، هر دو محور، تشکیل یک صفحه

می‌دهند که دوبه‌دو بر هم عمودند.

صفحه  $xy$  (شامل محور  $OX$  و  $OY$ ) ( $z=0$ )

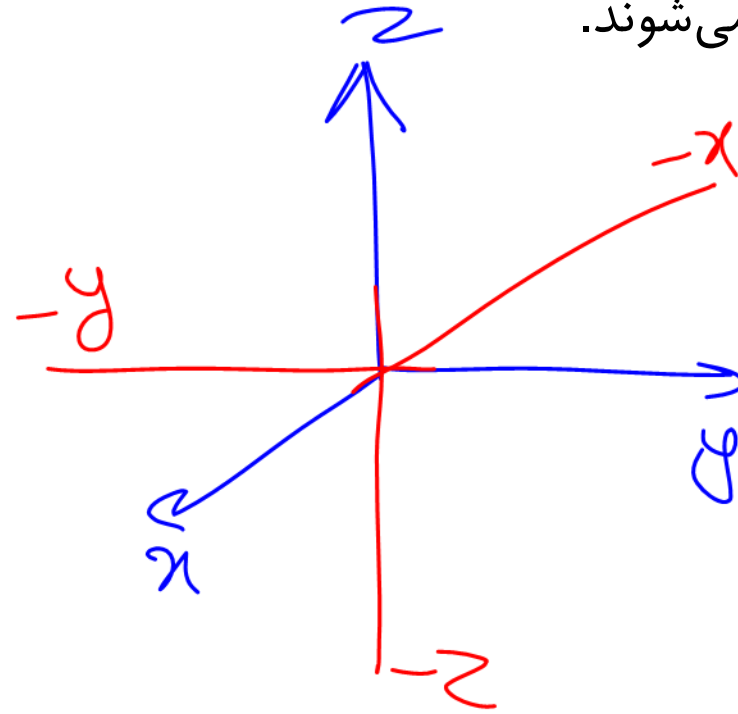
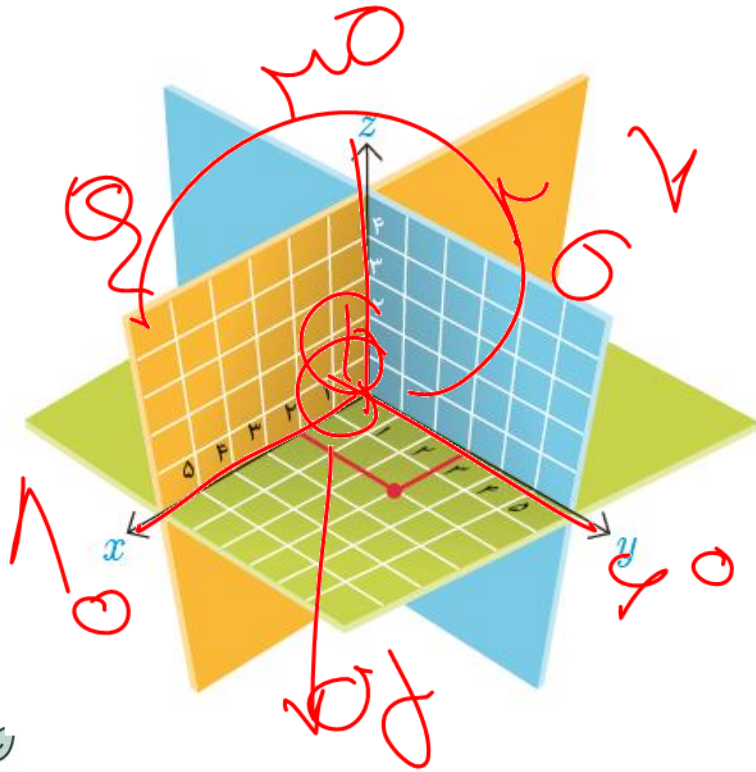
صفحه  $xz$  (شامل محور  $OZ$  و  $OX$ ) ( $y=0$ )

صفحه  $yz$  (شامل محور  $OZ$  و  $OY$ ) ( $x=0$ )



تجربا العربية

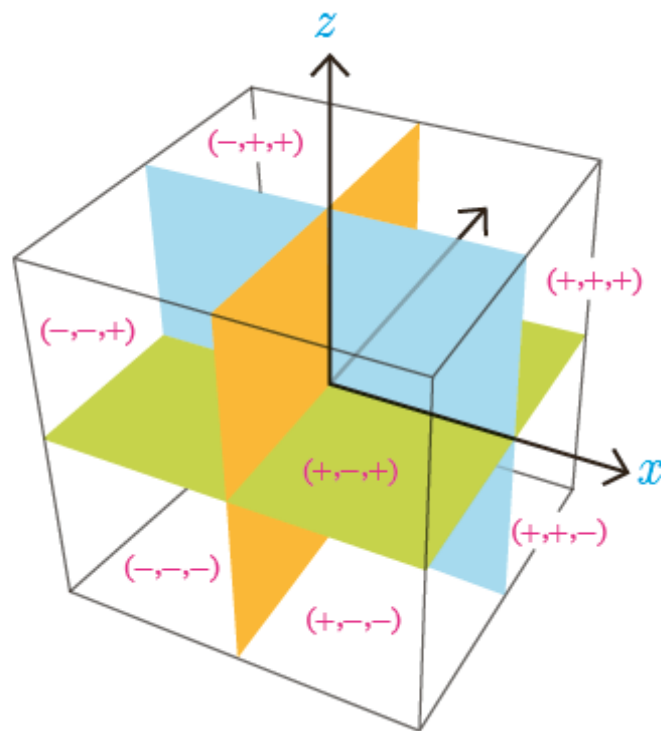
◀ اگر محورها را از مبدأ مختصات (0) در خلاف جهت ادامه دهیم (در سوی منفی) تا مقادیر منفی محورها ظاهر شوند، آنگاه دستگاه مختصات فضای  $\mathbb{R}^3$  به ۸ ناحیه تقسیم می‌شود که ۴ ناحیه آن بالای صفحه  $XY$  و ۴ ناحیه دیگر زیر صفحه  $XY$  واقع می‌شوند.



تجربا العربية

علامت  $z, y, x$  در این ۸ ناحیه به صورت زیر است :

شماره ناحیه	علامت محورها		
	$x$	$y$	$z$
۱	<u>+</u>	<u>+</u>	<u>+</u>
۲	<u>-</u>	+	+
۳	-	-	+
۴	+	-	+
۵	+	+	-
۶	-	+	-
۷	-	-	-
۸	+	-	-

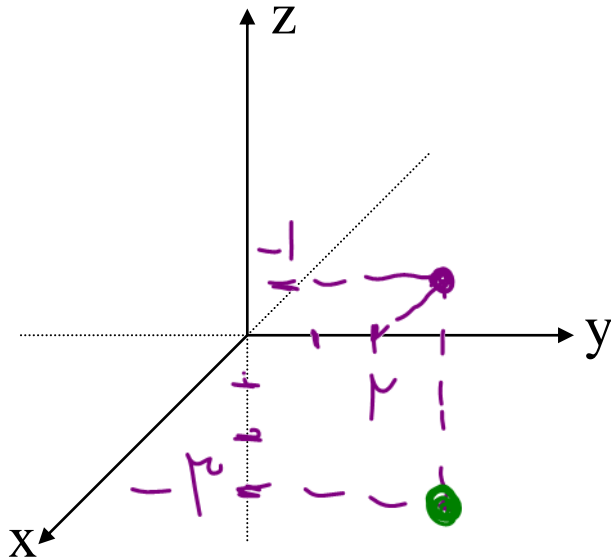


تجربا العربیة

## ویژه امتحان نهایی

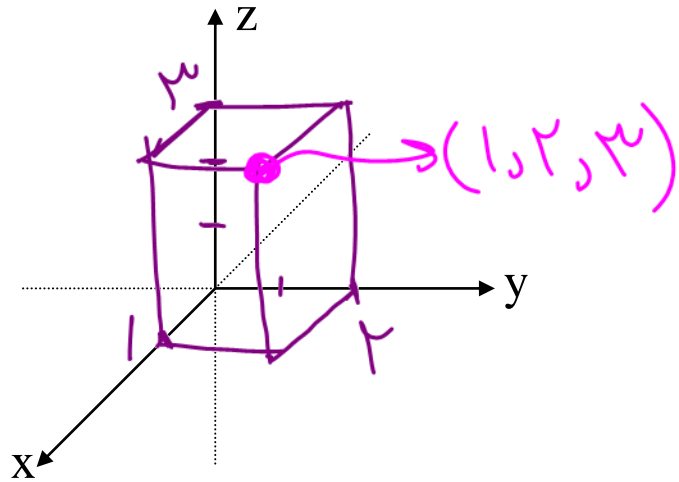
◀ نمایش نقطه  $(x, y, z)$  در فضای  $\mathbb{R}^3$ : ابتدا نقطه  $(x, y)$  را در صفحه  $xy$  مشخص می‌کنیم. سپس به ارتفاع  $z$  از این نقطه عمودی خارج می‌کنیم. انتهای عمود خارج شده نقطه  $(x, y, z)$  را نمایش می‌دهد.

(روش اول)  $(-1, 2, -3)$



روش دوم : سه نقطه به طول‌های  $X, Y, Z$  روی محورهای  $OZ, OY, OX$  مشخص کرده و با آنها یک مکعب مستطیل تشکیل می‌دهیم. نقطهٔ مقابل مبدأ مختصات، نقطهٔ  $(X, Y, Z)$  است.

$(1, 2, 3)$



مجموعه  
فصل  
۲  
۱  
۲  
۳  
۴  
۵  
۶  
۷  
۸  
۹  
۱۰  
۱۱  
۱۲  
۱۳  
۱۴  
۱۵  
۱۶  
۱۷  
۱۸  
۱۹  
۲۰  
۲۱  
۲۲  
۲۳  
۲۴  
۲۵  
۲۶  
۲۷  
۲۸  
۲۹  
۳۰  
۳۱  
۳۲  
۳۳  
۳۴  
۳۵  
۳۶  
۳۷  
۳۸  
۳۹  
۴۰  
۴۱  
۴۲  
۴۳  
۴۴  
۴۵  
۴۶  
۴۷  
۴۸  
۴۹  
۵۰  
۵۱  
۵۲  
۵۳  
۵۴  
۵۵  
۵۶  
۵۷  
۵۸  
۵۹  
۶۰  
۶۱  
۶۲  
۶۳  
۶۴  
۶۵  
۶۶  
۶۷  
۶۸  
۶۹  
۷۰  
۷۱  
۷۲  
۷۳  
۷۴  
۷۵  
۷۶  
۷۷  
۷۸  
۷۹  
۸۰  
۸۱  
۸۲  
۸۳  
۸۴  
۸۵  
۸۶  
۸۷  
۸۸  
۸۹  
۹۰  
۹۱  
۹۲  
۹۳  
۹۴  
۹۵  
۹۶  
۹۷  
۹۸  
۹۹  
۱۰۰

مثال : نقطه  $M(-2, 1, 3)$  را روی  $\mathbb{R}^3$  نمایش دهید.

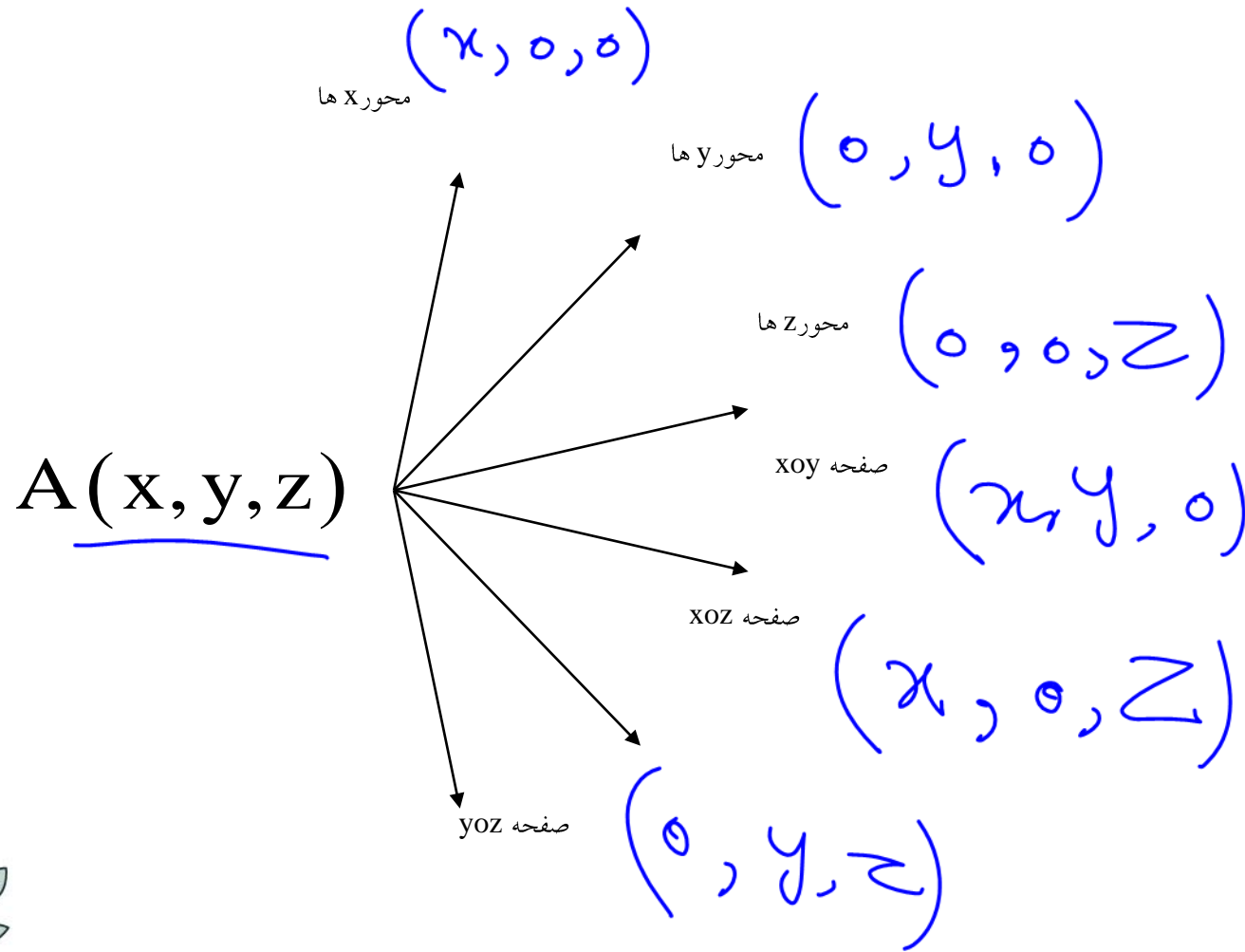


الکیمیاء  
الفيزياء  
الرياضيات  
العلوم  
البيولوجيا  
الطب  
الهندسة  
العلوم  
البيئية



قرینه، تصویر و فاصله نقطه دلخواه  $A(x, y, z)$  نسبت به محورها و صفحات مختصات :

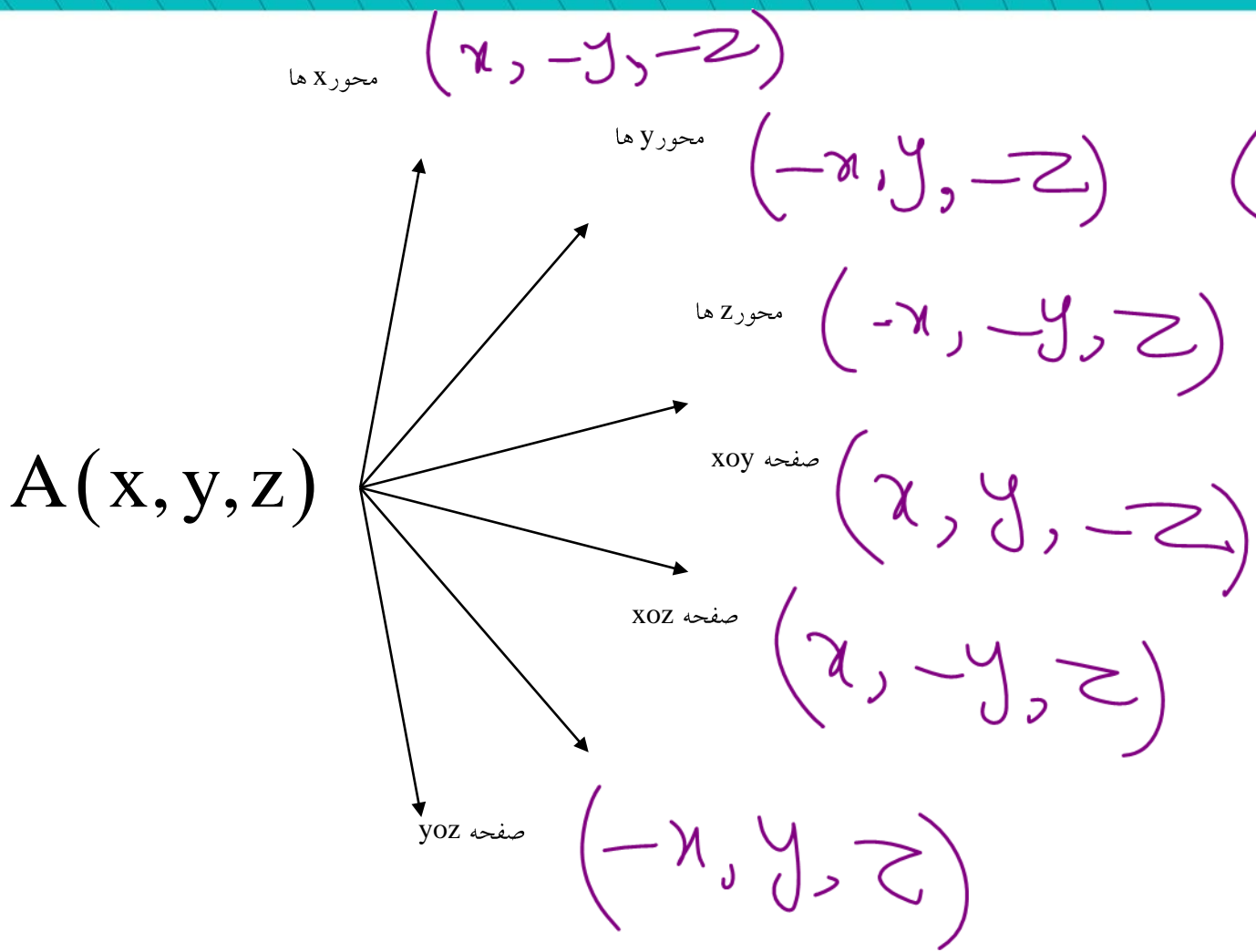
الف) تصویر :  $0 =$  حجم



تاریخچه  
الکتریسیته  
مکانیک  
فیزیک  
ریاضیات  
شیمی  
زیست‌شناسی  
علوم

(ب) قرینه:

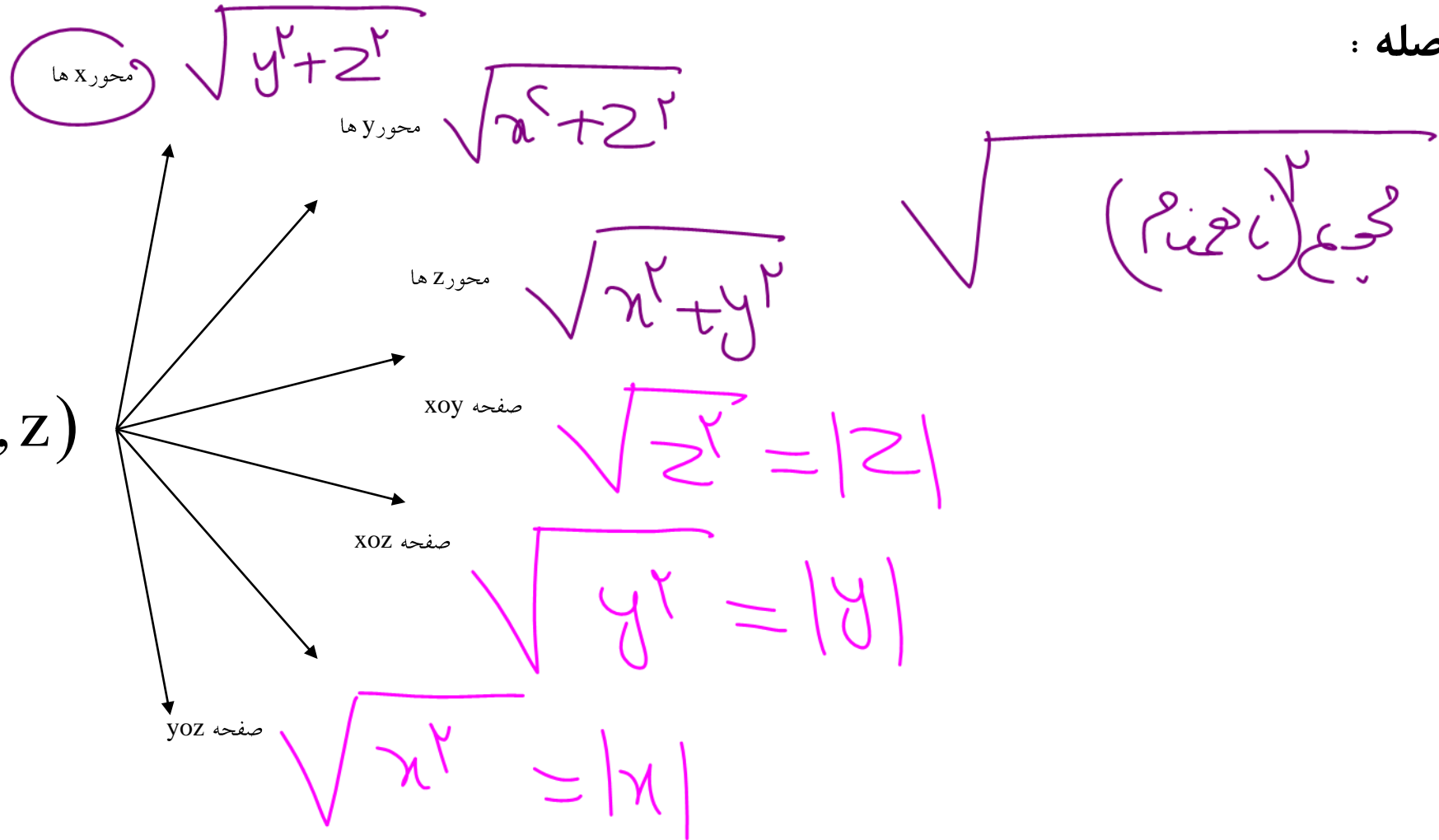
$(x, y, z) = (x, y, -z)$



الکیمیاء  
الفيزياء  
الرياضيات  
العلوم  
الطبیعیات

پ) فاصله :

$A(x, y, z)$



تجربیات  
معماری  
هندسه  
فیزیک  
ریاضیات  
علوم

مثال : مقادیر  $m$  ،  $n$  و  $p$  را طوری تعیین کنید که؛

(الف) نقطه  $(5, n-1, m+2)$  روی محور  $OZ$  باشد.

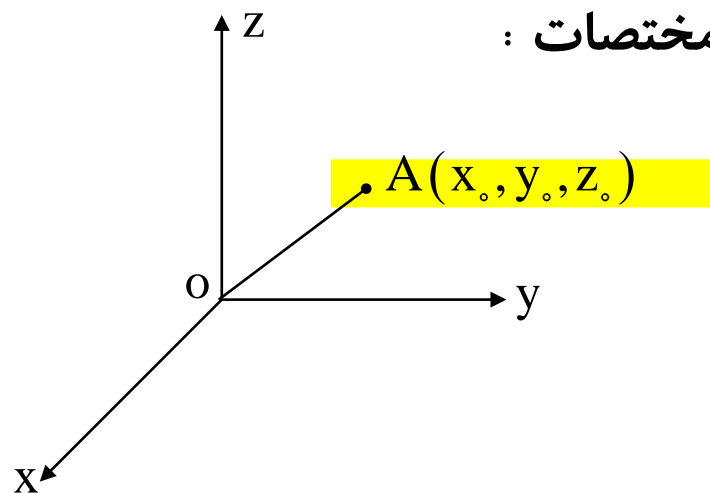
(ب) نقطه  $(3, p^2 - p, 4)$  روی صفحه  $XZ$  باشد.



العربية  
ماتریس  
هندسه  
فیزیک  
شیمی  
بیولوژی  
تاریخ  
جغرافیا  
ریاضیات  
علوم

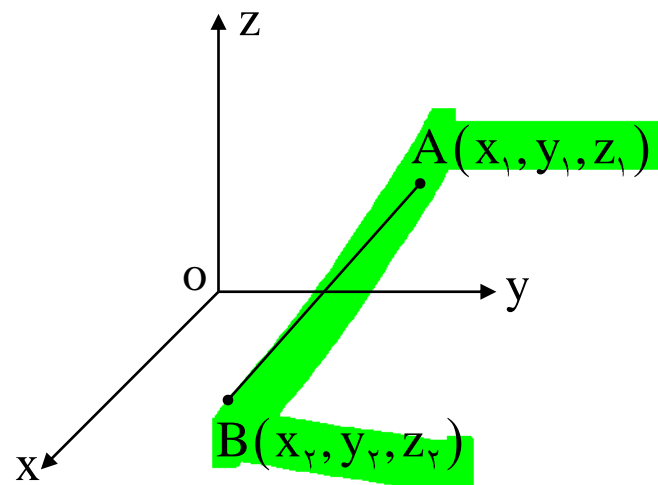
فاصله نقطه  $(x_0, y_0, z_0)$  از مبدأ مختصات :

$$OA = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$$



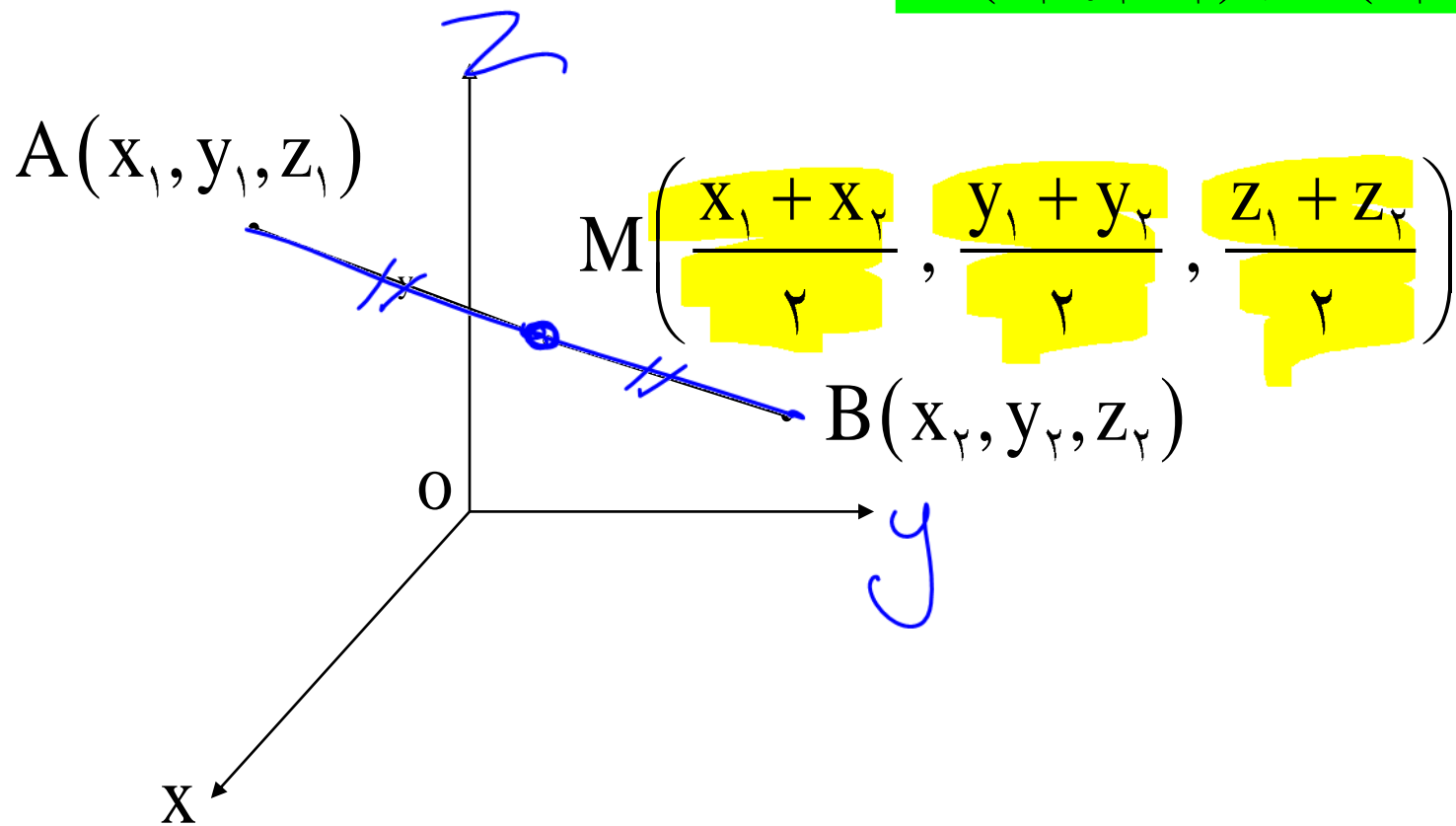
فاصله دو نقطه  $A(x_1, y_1, z_1)$  و  $B(x_2, y_2, z_2)$  (طول پاره خط AB) :

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



عبارت ریاضی  
 ۲  
 ۳  
 ۴  
 ۵  
 ۶  
 ۷  
 ۸  
 ۹  
 ۱۰  
 ۱۱  
 ۱۲  
 ۱۳  
 ۱۴  
 ۱۵  
 ۱۶  
 ۱۷  
 ۱۸  
 ۱۹  
 ۲۰  
 ۲۱  
 ۲۲  
 ۲۳  
 ۲۴  
 ۲۵  
 ۲۶  
 ۲۷  
 ۲۸  
 ۲۹  
 ۳۰  
 ۳۱  
 ۳۲  
 ۳۳  
 ۳۴  
 ۳۵  
 ۳۶  
 ۳۷  
 ۳۸  
 ۳۹  
 ۴۰  
 ۴۱  
 ۴۲  
 ۴۳  
 ۴۴  
 ۴۵  
 ۴۶  
 ۴۷  
 ۴۸  
 ۴۹  
 ۵۰  
 ۵۱  
 ۵۲  
 ۵۳  
 ۵۴  
 ۵۵  
 ۵۶  
 ۵۷  
 ۵۸  
 ۵۹  
 ۶۰  
 ۶۱  
 ۶۲  
 ۶۳  
 ۶۴  
 ۶۵  
 ۶۶  
 ۶۷  
 ۶۸  
 ۶۹  
 ۷۰  
 ۷۱  
 ۷۲  
 ۷۳  
 ۷۴  
 ۷۵  
 ۷۶  
 ۷۷  
 ۷۸  
 ۷۹  
 ۸۰  
 ۸۱  
 ۸۲  
 ۸۳  
 ۸۴  
 ۸۵  
 ۸۶  
 ۸۷  
 ۸۸  
 ۸۹  
 ۹۰  
 ۹۱  
 ۹۲  
 ۹۳  
 ۹۴  
 ۹۵  
 ۹۶  
 ۹۷  
 ۹۸  
 ۹۹  
 ۱۰۰

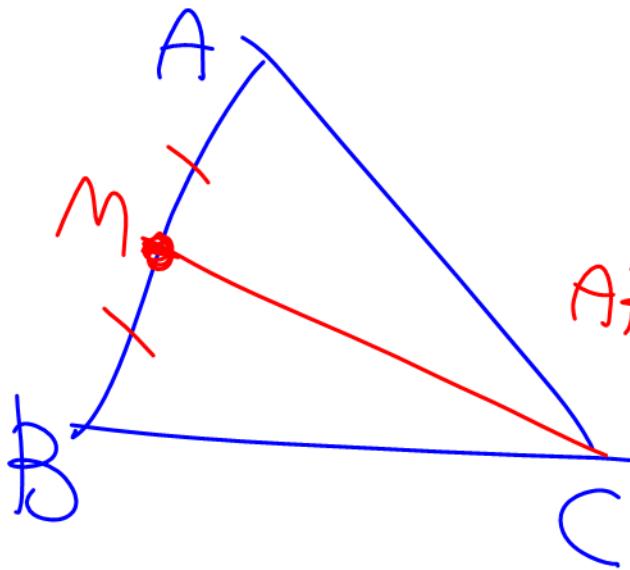
z

مختصات وسط پاره خط  $A(x_1, y_1, z_1)$  و  $B(x_2, y_2, z_2)$ 

مختصات وسط پاره خط

مثال : نقاط  $A(-1, 2, 1)$  و  $B(0, 3, 2)$  و  $C(2, -1, 4)$  سه رأس مثلث  $ABC$  هستند؛  
الف) طول ضلع  $BC$  را تعیین کنید.

$$BC = \sqrt{\quad}$$



ب) طول میانه وارد بر ضلع  $AB$  را تعیین کنید.

$$M \left( \frac{-1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2} \right) \text{ و } C(2, -1, 4)$$

$$CM = \sqrt{\quad}$$



مثال : مقدار ~~را~~ را طوری بیابید که فاصله نقطه  $A(12, m, m-1)$  از مبدأ مختصات برابر ۱۳ باشد.

$$\sqrt{12^2 + m^2 + (m-1)^2} = 13$$

$$12^2 + m^2 + m^2 - 2m + 1 = 169$$

$$\longrightarrow \dots m = ?$$



مثال : نقاط  $A(1,0,2)$  و  $B(2,0,0)$  و  $C(0,-1,-2)$  و  $D(0,-1,0)$  و  $E(1,2,3)$  و  $F(-3,4,-5)$  را در

نظر بگیرید؛

الف) هر یک از نقاط  $A, B, C, D$  چه ویژگی دارند؟

ب) فاصله نقطه  $E$  را از مبدأ مختصات حساب کنید.

پ) طول پاره خط  $EF$  و مختصات وسط آن را به دست آورید.

$$\sqrt{1+4+9}$$



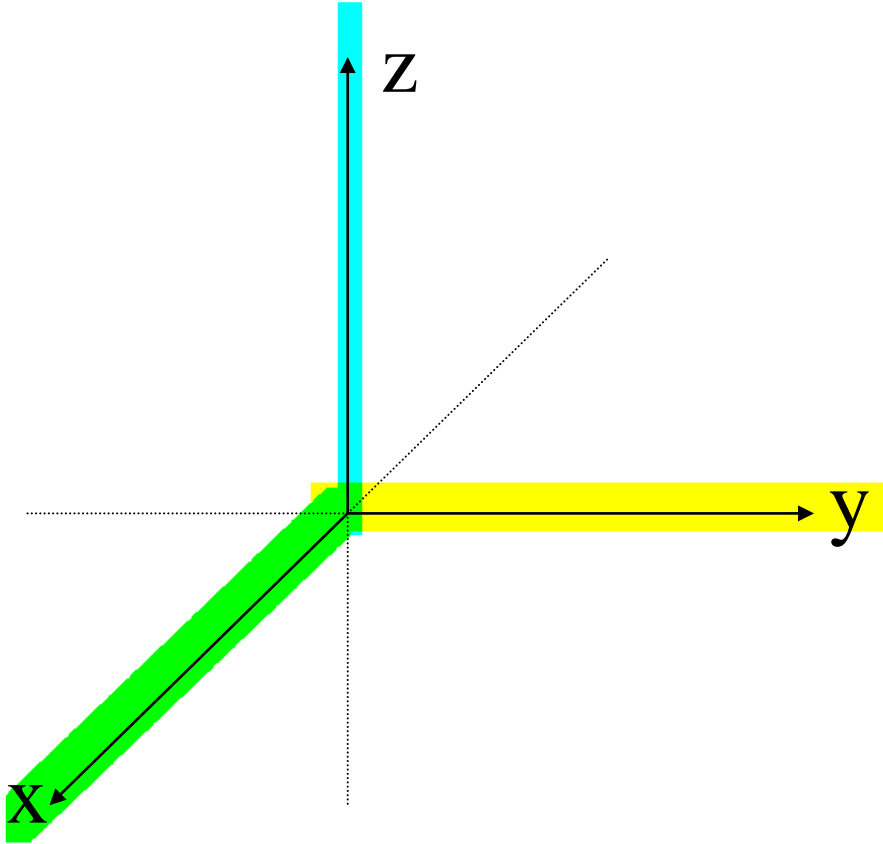
المعادن  
الرياضيات  
الفيزياء  
الكيمياء  
البيولوجيا  
الاجتماعيات  
العلوم  
الرياضيات  
الفيزياء  
الكيمياء  
البيولوجيا  
الاجتماعيات  
العلوم

معادلات محورهای مختصات :

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ محور } OX$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ محور } Oy$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ محور } OZ$$



مجموعه  
فصلنامه  
ریاضیات  
و  
فیزیک  
شماره  
۱۳۹۷  
۱۳۹۸  
پایه  
دوازدهم  
فصل  
اول

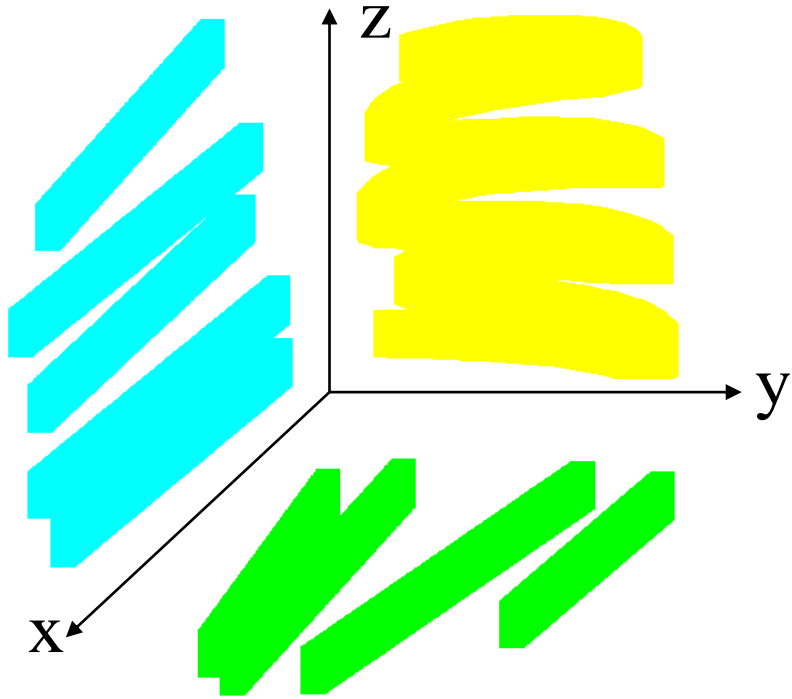
## ویژه امتحان نهایی

◀ معادلات صفحات مختصات :

صفحة  $xy$  :  $z = 0$

صفحة  $xz$  :  $y = 0$

صفحة  $yz$  :  $x = 0$



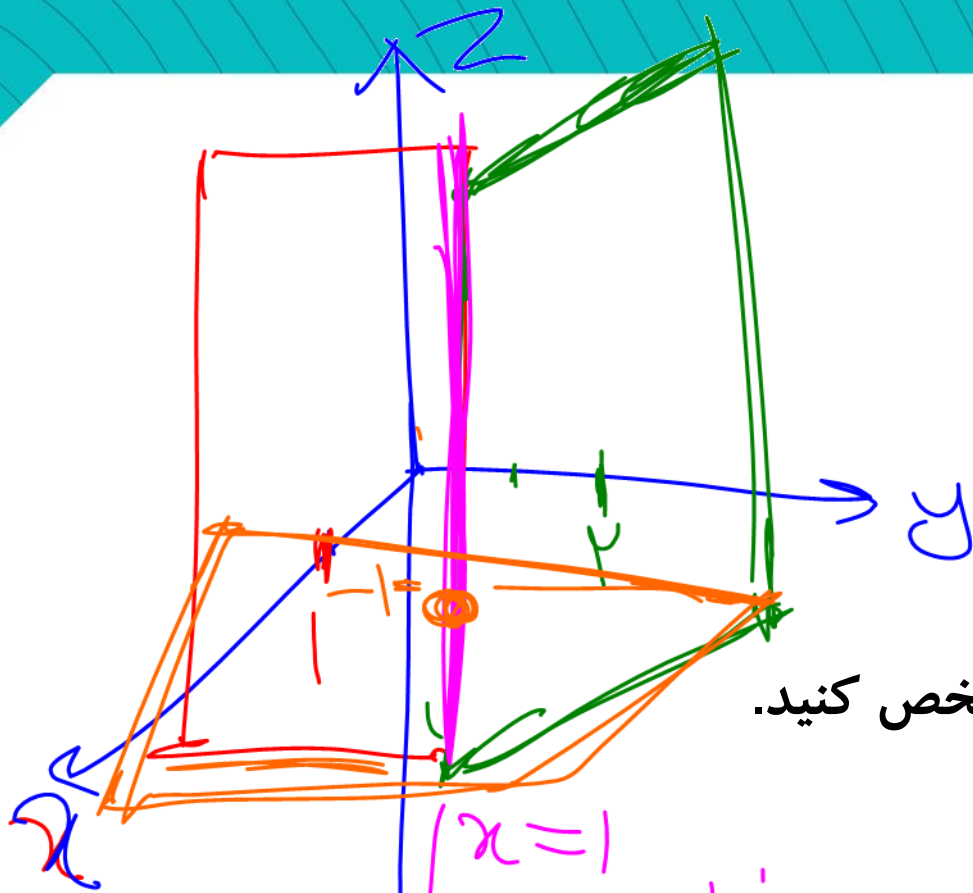
الرياضيات  
الفصل الأول  
المعادلات  
المختصات  
الصفحات  
المختصات

مثال : الف) صفحه  $x = 1$  را نمایش دهید.

مائلر لایه و 62

مائلر ح 62

ب) بر روی صفحه  $x = 1$  نقاطی را که در آنها  $y = 2$  است مشخص کنید.



صفحه  $x=1$   
 $y=2$



المعادن  
الرياضيات  
الفيزياء  
الكيمياء  
البيولوجيا  
الهندسة  
العلوم  
اللغة العربية

پ) بر روی صفحه  $x = 1$  نقاطی را که در آنها  $z = -1$  است مشخص کنید. نقطه

$$\begin{cases} x = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

ت) از تلاقی سه صفحه  $x = 1$  و  $y = 2$  و  $z = -1$  چه شکلی پدید می آید؟ نقطه

$$(1, 2, -1)$$



نتیجه :

(۱) از تلاقی هر دو صفحه که موازی دو محور هستند، خطی موازی محور سوم پدید می‌آید.

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases} \text{ خطی موازی محور } OZ$$

$$\begin{cases} y = b \\ z = c \end{cases} \text{ خطی موازی محور } OX$$

$$\begin{cases} x = a \\ z = c \end{cases} \text{ خطی موازی محور } OY$$



العربية  
الرياضية  
الفيزياء  
الكيمياء  
البيولوجيا  
العلوم  
الاجتماعية  
الإنجليزية  
التاريخ  
الفن  
الرياضيات

۲) از تلاقی هر سه صفحه که هر کدام موازی دو محور هستند، یک نقطه در فضا پدید می‌آید.

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = c \end{cases}$$

نقطه  $(a, b, c)$  در فضا



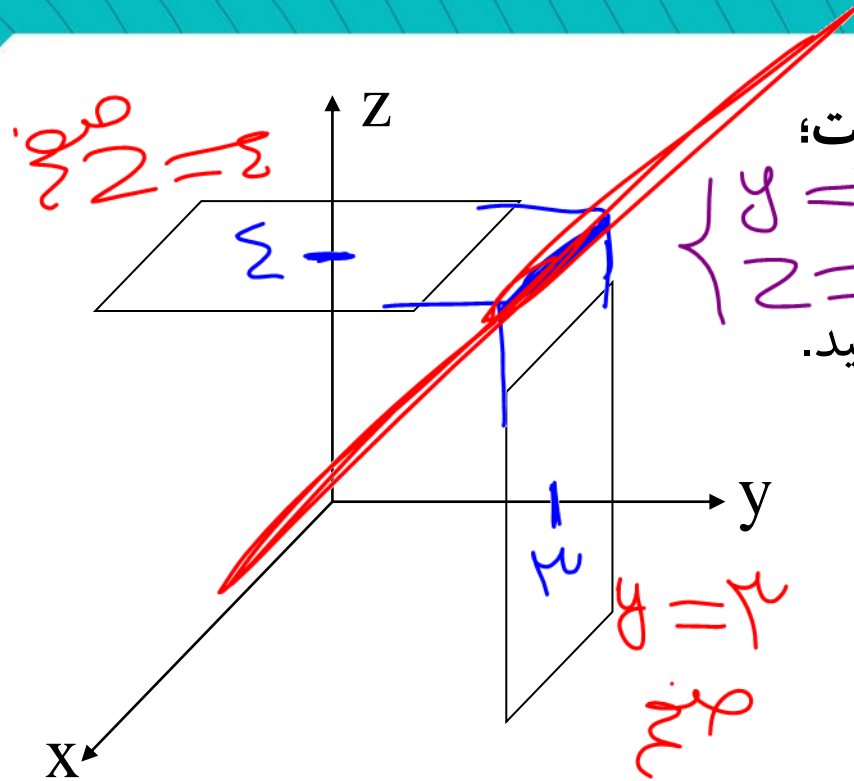
الکلیات  
الفصل  
۱  
۲  
۳  
۴  
۵  
۶  
۷  
۸  
۹  
۱۰  
۱۱  
۱۲  
۱۳  
۱۴  
۱۵  
۱۶  
۱۷  
۱۸  
۱۹  
۲۰  
۲۱  
۲۲  
۲۳  
۲۴  
۲۵  
۲۶  
۲۷  
۲۸  
۲۹  
۳۰  
۳۱  
۳۲  
۳۳  
۳۴  
۳۵  
۳۶  
۳۷  
۳۸  
۳۹  
۴۰  
۴۱  
۴۲  
۴۳  
۴۴  
۴۵  
۴۶  
۴۷  
۴۸  
۴۹  
۵۰  
۵۱  
۵۲  
۵۳  
۵۴  
۵۵  
۵۶  
۵۷  
۵۸  
۵۹  
۶۰  
۶۱  
۶۲  
۶۳  
۶۴  
۶۵  
۶۶  
۶۷  
۶۸  
۶۹  
۷۰  
۷۱  
۷۲  
۷۳  
۷۴  
۷۵  
۷۶  
۷۷  
۷۸  
۷۹  
۸۰  
۸۱  
۸۲  
۸۳  
۸۴  
۸۵  
۸۶  
۸۷  
۸۸  
۸۹  
۹۰  
۹۱  
۹۲  
۹۳  
۹۴  
۹۵  
۹۶  
۹۷  
۹۸  
۹۹  
۱۰۰



مثال : در شکل زیر نمودار دو صفحه در فضا نمایش داده شده است؛

(الف) معادله دو صفحه را بنویسید.

(ب) معادله خطی که از تلاقی این دو صفحه به دست می آید را بنویسید.



مجموعه سوالات  
 ریاضیات  
 پایه دهم  
 فصل ۱  
 صفحه ۱۰  
 ۱۰۰٪

به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) معادله صفحاتی را بنویسید که از نقطه  $A = (2, 3, 4)$  بگذرد و با صفحه  $XOY$  موازی باشد.

ب) معادلات  $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$  مربوط به کدام محور است؟  $y$

پ) در فضای  $\mathbb{R}^3$ ، نقطه  $A$  به طول ۲ روی محور طولها و نقطه  $B = (-4, 6, -3)$  مفروض اند مختصات وسط  $AB$  را بیابید.

$(2, 0, 0)$



تجربا العربية

به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) اگر  $y = b$  معادله صفحه‌ای در فضای  $R^3$  باشد که از نقطه  $A = (2, -3, 4)$  بگذرد، مقدار عددی  $b$  چقدر است؟

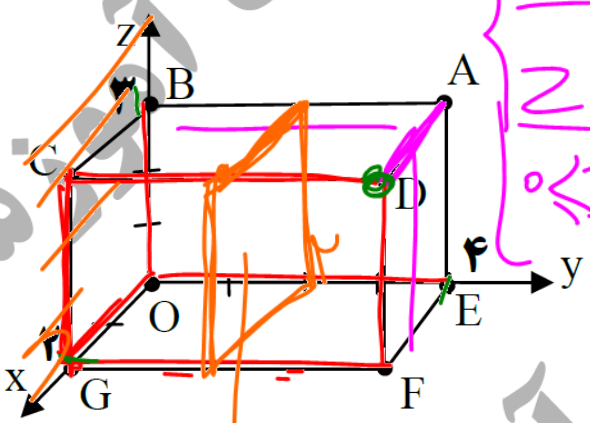
ب) معادلات  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$  مربوط به کدام محور در دستگاه مختصات  $R^3$  است؟ محور zها

پ) در فضای  $R^3$ ، نقطه  $A$  به عرض ۲ و ارتفاع ۳ روی صفحه  $YOZ$  و نقطه  $B = (-4, 6, -3)$  مفروض اند مختصات وسط  $AB$  را بیابید.

$$(0, 2, 3)$$



۰/۵	<p>شکل کلی (نمودار) مربوط به رابطه <math>x^2 \leq y \leq 2</math> را رسم کنید.</p>	۱۱
۱/۵	<p>با توجه به شکل، به سوالات زیر پاسخ دهید:</p> <p>الف) نام وجه از شکل که معادله آن به صورت زیر مشخص شده را بنویسید.</p> <p><math>x = 2, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 3</math></p> <p>ب) معادلات مربوط به پاره خط (یال) <math>AD</math> را بنویسید</p> <p>پ) مختصات نقطه <math>D</math> را بنویسید.</p> <p>ت) معادله صفحه ای را بنویسید که موازی با صفحه <math>xOz</math> باشد و مکعب مستطیل را نصف کند.</p>	۱۲



$y = 2$   
 $z = 3$   
 $0 \leq x \leq 2$

$(2, 2, 3)$

$y = 2$



الgebra العربية





# نهانی در جمع

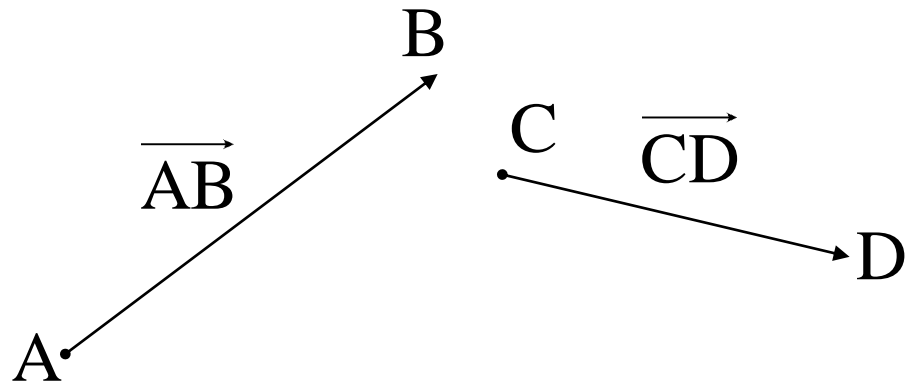
هندسه دوازدهم

بردارها در صفحه و فضای  $R^3$



اپیزود ۱۴: بردارها در صفحه و فضای  $\mathbb{R}^3$ 

بردار: هر پاره‌خط جهت‌دار مانند  $AB$  که ابتدای آن نقطه  $A$  و انتهای آن نقطه  $B$  باشد و آن را بصورت  $\overrightarrow{AB}$  (یا برای سهولت با حرف کوچک مثلاً  $\vec{a}$ ) نمایش می‌دهیم و اندازه آن را با نماد  $|\overrightarrow{AB}|$  یا  $|\vec{a}|$  نشان می‌دهیم.



العربية

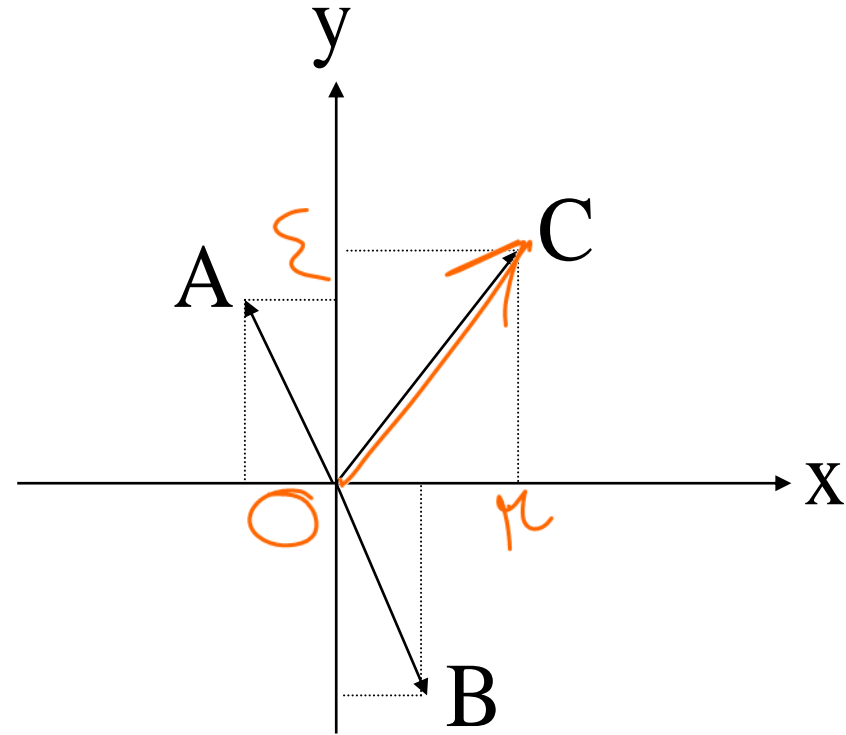


هر نقطه از صفحه متناظر با یک بردار است و برعکس؛

$$A(-1, 3): \overrightarrow{OA} = \vec{a} = (-1, 3)$$

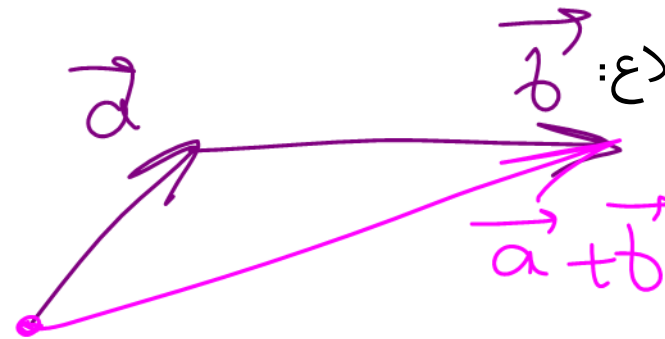
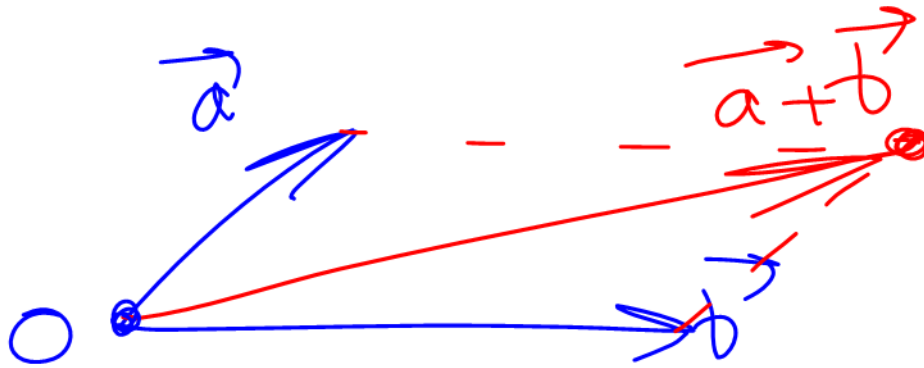
$$B(2, -5): \overrightarrow{OB} = \vec{b} = (2, -5)$$

$$C(3, 4): \overrightarrow{OC} = \vec{c} = (3, 4)$$



جمع دو بردار :

روش هندسی ←



(۱) روش متوازی الاضلاع:

(۲) روش مثلث:

روش جبری ← مجموع مؤلفه‌های متناظر  $\vec{a} = (a_1, a_2)$  ,  $\vec{b} = (b_1, b_2)$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

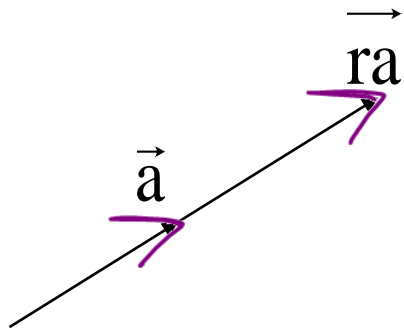


الgebra  
العربية  
المعاصرة  
الرياضيات  
الفيزياء  
الكيمياء  
البيولوجيا  
الطب  
الهندسة  
العلوم  
التكنولوجيا  
البيئة  
الاجتماعيات  
العلوم الإنسانية  
العلوم الطبيعية  
العلوم الدقيقة  
العلوم التطبيقية  
العلوم المتعددة

ضرب عدد حقیقی در بردار :

$$\vec{a} = (a_1, a_2), r \in \mathbb{R}$$

$$\underline{r\vec{a}} = r(a_1, a_2) = (\underline{ra_1}, \underline{ra_2})$$

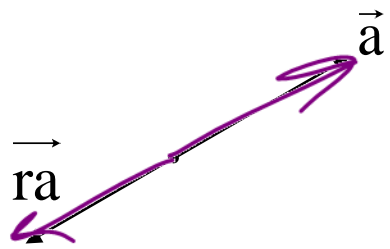


(۱) اگر  $r > 0$  باشد،  $\vec{a}$  و  $\underline{r\vec{a}}$  هم راستا و هم جهت هستند.

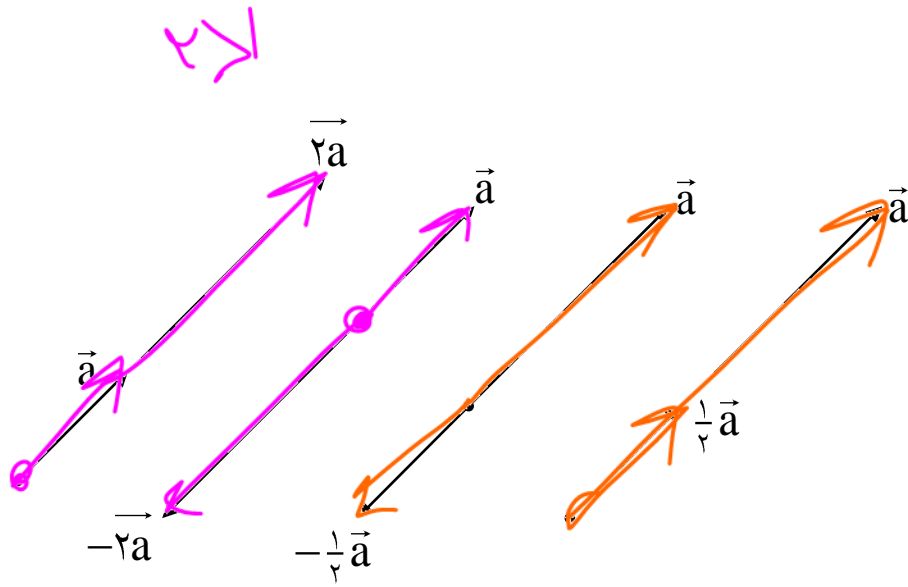


## ویژه امتحان نهایی

(۲) اگر  $r < 0$  باشد،  $\vec{ra}$  و  $\vec{a}$  هم راستا و مختلف الجهد هستند.



$r > 1$  یا  $r < -1$   
(۳) اگر  $|r| > 1$  باشد،  $|\vec{ra}|$  از  $|\vec{a}|$  بزرگتر است.



(۴) اگر  $|r| < 1$  باشد،  $|\vec{ra}|$  کوچکتر است.  
 $-1 < r < 1$

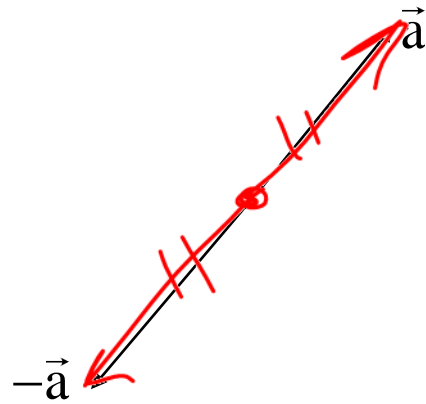


العربية  
الرياضيات  
الفيزياء  
الكيمياء  
البيولوجيا  
العلوم  
الاجتماعية  
التاريخ  
اللغة  
الفن  
الرياضة  
العلوم  
الاجتماعية  
التاريخ  
اللغة  
الفن  
الرياضة

قرینه بردار  $\vec{a}$  :

اگر  $r = -1$  باشد،  $r\vec{a}$  را قرینه بردار  $\vec{a}$  گوئیم.

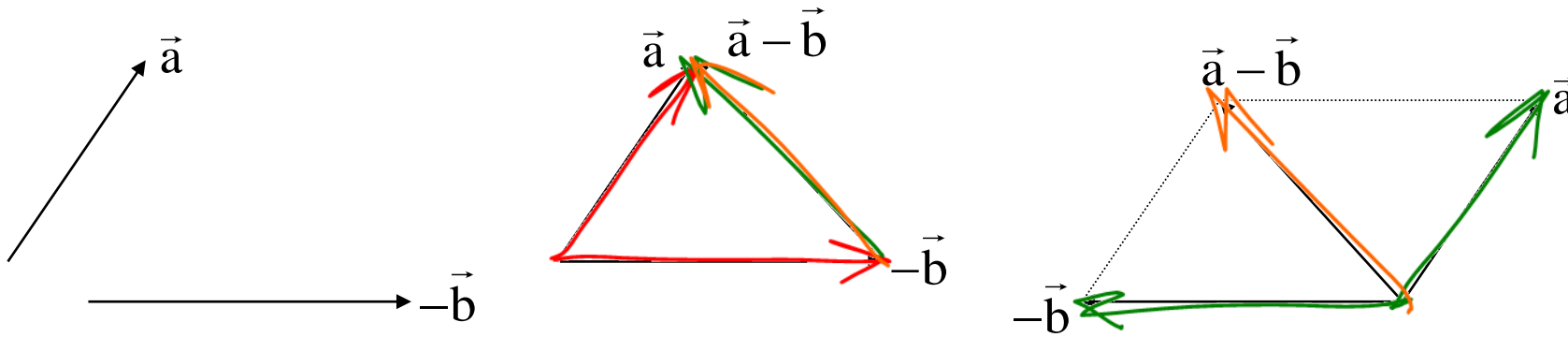
$$\vec{a} = (a_1, a_2)$$
$$r\vec{a} = -\vec{a} = (-a_1, -a_2)$$



العربية  
المعاصرة  
الرياضيات  
الفيزياء  
الكيمياء  
البيولوجيا  
العلوم  
الاجتماعية  
الإنسانيات

تفاضل دو بردار به روش هندسی:

اگر هر دو بردار از یک نقطه رسم شده باشند، تفاضل  $\vec{a} - \vec{b}$  برداری است که از انتهای  $\vec{b}$  به انتهای  $\vec{a}$  وصل شده باشد.



$$\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$$



الgebra  
العربية  
المعاصرة  
الرياضيات  
الفيزياء  
الكيمياء  
البيولوجيا  
الطب  
الهندسة  
العلوم  
التكنولوجيا  
البيئة  
الاجتماع  
السياسة  
الاقتصاد  
الاعمال  
الاجتماعية  
العلوم  
الاجتماعية  
العلوم  
الاجتماعية



هر بردار را می‌توان به صورت حاصل جمع مضاربی از بردارهای یکه  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  نوشت:

$$\vec{a} = (a_1, a_2) = a_1(1, 0) + a_2(0, 1) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$$

$$\vec{a} = (-2, 5) = -2\vec{i} + 5\vec{j}$$

$$\vec{b} = (3, 0) = 3\vec{i} + 0\vec{j}$$

$$\vec{c} = (0, -4) = 0\vec{i} - 4\vec{j}$$

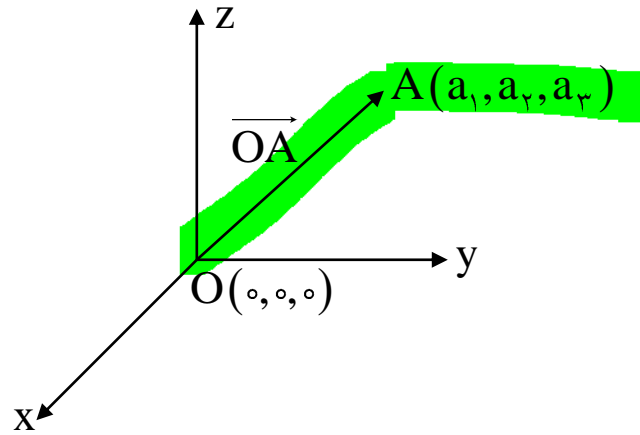
$$(-2, 2) = -2\vec{i} + 2\vec{j}$$



المعادن  
الطاقة  
الحرارة  
البرق  
الماء  
الهواء  
الارض  
الفضاء  
الزمن  
الفضاء  
الزمن  
الفضاء  
الزمن

بردار در فضای  $\mathbb{R}^3$ : مشابه بردارهای  $\mathbb{R}^2$  به هر نقطه از فضای  $\mathbb{R}^3$  می‌توان برداری نظیر کرد که از مبدأ

مختصات شروع می‌شود.



$$\vec{OA} = \vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

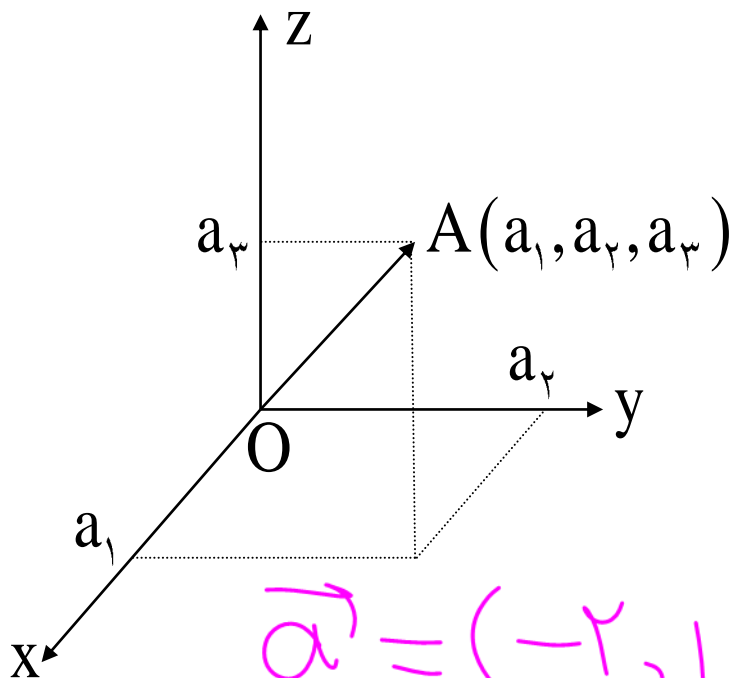
در بردار  $\vec{a}$  مقادیر  $a_3, a_2, a_1$  را مؤلفه‌های بردار  $\vec{a}$  گوئیم، همچنین مبدأ مختصات  $O(0,0,0)$  نمایشگر بردار

صفر  $\vec{O}(0,0,0)$  است.

بردار صفر  $\vec{0}$  یا  $\vec{0}$



الgebra  
عربی  
ماتریس  
هندسه  
فیزیک  
شیمی  
ریاضیات  
تاریخ  
ادبیات  
علوم  
فلسفه  
هنر  
موسیقی  
ورزش

اندازه بردار در فضای  $\mathbb{R}^3$ :

$$|\vec{OA}| = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\vec{a} = (-2, 1, 2) \quad |\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$



الماتریکس  
 هندسه  
 حسابان  
 فیزیک  
 شیمی  
 زیست  
 تاریخ  
 ادبیات  
 فلسفه  
 ریاضیات

جمع و تفریق دو بردار: مشابه جمع و تفریق بردارها در صفحه  $\mathbb{R}^2$  است.

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3)$$

جمع هندسی دو بردار ← به روش متوازی الاضلاع و مثلث

تفاضل هندسی دو بردار ← اتصال از انتهای بردار دوم به انتهای بردار اول



المعادن  
الکیمیاء  
الطبیعیة

ضرب عدد حقیقی در بردار : مشابه ضرب عدد حقیقی در بردار در صفحه  $\mathbb{R}^2$  است.

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$r\vec{a} = r(a_1, a_2, a_3) = (ra_1, ra_2, ra_3)$$

در حالت خاص اگر  $r = -1$  باشد، قرینه بردار  $\vec{a}$  به دست می آید؛

$$r\vec{a} = -(a_1, a_2, a_3) = (-a_1, -a_2, -a_3) = -\vec{a}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{r} > 0 \text{ هم جهت } \vec{a}, r\vec{a} \\ \vec{r} < 0 \text{ مختلف جهت } \vec{a}, r\vec{a} \end{array} \right\} \begin{cases} 0 < r < 1 & |\vec{r}\vec{a}| < |\vec{a}| \\ r > 1 & |\vec{r}\vec{a}| > |\vec{a}| \\ -1 < r < 0 & |\vec{r}\vec{a}| < |\vec{a}| \\ r < -1 & |\vec{r}\vec{a}| > |\vec{a}| \end{cases}$$



العربية

$\vec{i}(1,0,0)$  در جهت  $x +$  ها

$\vec{j}(0,1,0)$  در جهت  $y +$  ها

$\vec{k}(0,0,1)$  در جهت  $z +$  ها

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1)$$

$$\Rightarrow \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

$$\vec{a}(2, -3, 5) : \vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\vec{b}(0, 3, -4) : \vec{b} = 3\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$\vec{c}(-4, 7, 0) : \vec{c} = -4\vec{i} + 7\vec{j}$$



تجربیات کاربردی

روابط و اعمال بین بردارها :

$$۱) \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad \text{خاصیت جابجایی جمع}$$

$$۲) \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \quad \text{خاصیت شرکت پذیری جمع}$$

$$۳) \vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0} \quad \text{خاصیت عضو قرینه در جمع}$$

$$۴) \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a} \quad \text{خاصیت عضو خنثی در جمع «بردار صفر»}$$

$$۵) r(\vec{a} \pm \vec{b}) = r\vec{a} \pm r\vec{b} \quad r \in \mathbb{R}$$

$$۶) (r \pm s)\vec{a} = r\vec{a} \pm s\vec{a} \quad r, s \in \mathbb{R}$$

$$۷) (rs)\vec{a} = r(sa) = s(ra) \quad r, s \in \mathbb{R}$$

$$۸) \vec{b} = r\vec{a} \Rightarrow |\vec{b}| = |r||\vec{a}|$$

$$(rs)\vec{a}$$



الفبا  
 حساب  
 هندسه  
 الفبای عربی

مثال: اگر  $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$  و  $\vec{b} = (3, 1, -1)$  و  $r = -2$  آنگاه بردار  $r\vec{a} + \vec{b}$  و اندازه آن را به دست آورید.

$$-2(3, 2, -1) + (3, 1, -1)$$

$$(-4, -2, 2) + (3, 1, -1)$$

$$(-1, -1, 1) \rightarrow \sqrt{9+9+1} = \sqrt{19}$$



مثال: اگر  $\vec{a} = (4, 0, 3)$  و  $\vec{b} = 4\vec{j} + 3\vec{k}$  آنگاه اندازه بردار  $|\vec{b}|\vec{a} - |\vec{a}|\vec{b}$  را حساب کنید.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{16 + 0 + 9} = 5$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{16 + 9} = 5$$

$$5\vec{a} - 5\vec{b} = 5(\vec{a} - \vec{b}) = 5(4\vec{i} - 3\vec{j}) = (20, -15, 0)$$

$$\sqrt{20^2 + (-15)^2 + 0} = \sqrt{625}$$



تیم تخصصی زبان عربی

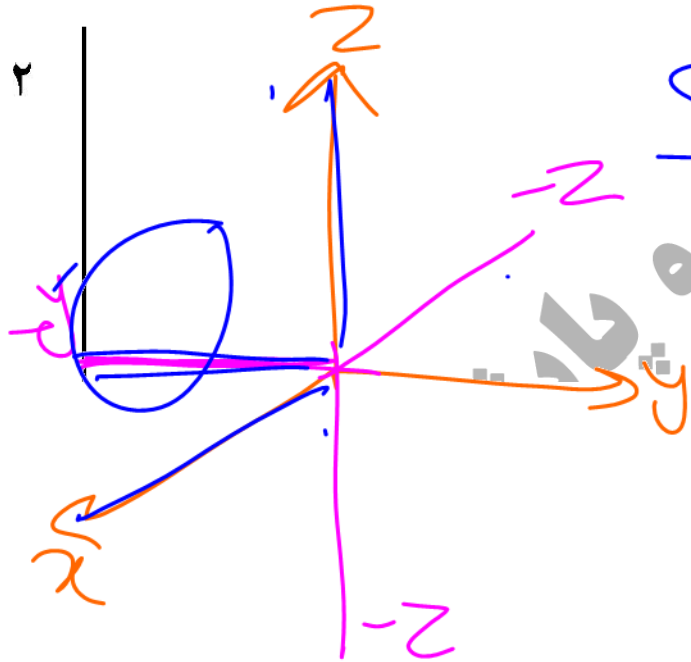
$$\frac{|\vec{a} - 2\vec{b}|}{|\vec{a} + 2\vec{b}|}$$

مثال: اگر  $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$  و  $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$  مطلوب است حاصل عبارت



۱	<p>اگر <math>\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{k}</math> و <math>\vec{b} = (1, 2, 1)</math> باشد، طول بردار <math>\vec{a} - 2\vec{b}</math> را به دست آورید.</p>	۱۲
---	--	----

۲	<p>دو بردار <math>\vec{a} = (3, -2, 1)</math> و <math>\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}</math> را در نظر بگیرید.          الف) بردار <math>\vec{a}</math> در کدام ناحیه از فضای <math>\mathbb{R}^3</math> واقع است؟ (شماره ناحیه ذکر شود).          ب) طول بردار <math>\vec{a} + 2\vec{b}</math> را حساب کنید.</p>	۱۵
---	--	----



المعادن  
 الهندسة  
 الفيزياء  
 الكيمياء  
 الاحياء  
 التاريخ  
 الجغرافيا  
 الرياضيات  
 العلوم  
 اللغة العربية





# نهج یادگیری جامع

هندسه دوازدهم

ضرب داخلی دو بردار



## اپیزود ۱۵ : ضرب داخلی دو بردار

ضرب داخلی دو بردار : ضرب داخلی یا نقطه‌ای دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  را با  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  نمایش داده و بصورت زیر

تعریف می‌شود؛

$$\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2; \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3; \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

خبر



تجربیات  
المنهجية  
الرياضية  
المعاصرة  
الرياضيات  
المتقدمة  
الرياضيات  
الأساسية  
الرياضيات  
التطبيقية  
الرياضيات  
البيانية  
الرياضيات  
الهندسية  
الرياضيات  
الاحصائية  
الرياضيات  
الاحصائية  
الرياضيات  
الاحصائية

مثال : برای هر جفت از بردارهای زیر حاصلضرب داخلی دو بردار را حساب کنید.

الف)  $\vec{a} = (2, -3)$  ,  $\vec{b} = (3, 7)$   $\rightarrow a \cdot b = 6 - 21 = -15$

ب)  $\vec{a} = (-1, 4, 5)$  ,  $\vec{b} = (2, 8, -6)$

$$a \cdot b = -2 + 32 - 30 = 0$$



المعادن  
الرياضيات  
الفيزياء  
الكيمياء  
البيولوجيا  
العلوم  
الهندسة  
الطب  
العمارة  
التاريخ  
الفن  
الرياضة  
السياحة  
البيئة  
الزراعة  
الصيدا

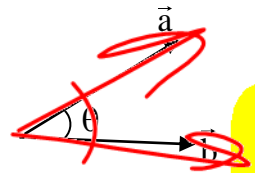
حاصلضرب داخلی دو بردار همواره عددی حقیقی است.

یعنی از ضرب داخلی دو بردار در هم دیگر برداری وجود نخواهد داشت و تنها یک عدد حقیقی باقی می ماند.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \underbrace{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}_{\text{عدد}}$$

در حالت کلی

محاسبه ضرب داخلی دو بردار با داشتن اندازه دو بردار و زاویه بین آنها :



اگر  $|\vec{a}|$  و  $|\vec{b}|$  اندازه‌های دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  و  $\theta$  زاویه بین دو بردار باشد، آنگاه:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

اندازه



المعادن  
الکیمیاء  
الرياضة  
الهندسة  
الفيزياء  
البيولوجيا  
الطب  
العلوم  
الاجتماعية  
السياسة  
الاقتصاد  
التاريخ  
الفلسفة  
الادب  
الفنون  
الرياضيات  
العلوم الطبيعية  
العلوم الإنسانية



$$a \cdot b = |a||b|\cos\theta \rightarrow \cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$$

محاسبه زاویه بین دو بردار

زاویه بین دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  بصورت زیر محاسبه می شود؛

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$



تجربا العربية

مثال : زاویه بین دو بردار  $\vec{a} = (2, -1, 2)$  و  $\vec{b} = (1, -1, 0)$  را به دست آورید.

$$\cos \theta = \frac{2 + 1 + 0}{\sqrt{2+1+2} \times \sqrt{1+1+0}} = \frac{3}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \theta = 45^\circ$$



المعجم العربي

مثال : اگر اندازه دو بردار زیر برابر باشد، کسینوس زاویه بین دو بردار را حساب کنید.

$$\vec{a} = (2, a+1, 4) = (2, 3, 4)$$

$$\vec{b} = (a, 4, 3) = (2, 4, 3)$$

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{2 + 12 + 12}{\sqrt{2+9+16} \times \sqrt{2+16+9}}$$

$$\sqrt{2+(a+1)^2+16} = \sqrt{a^2+16+9}$$

$$\cancel{2} + \cancel{a^2} + \cancel{2a+1} = \cancel{a^2} + \cancel{16} + 9$$

$$2a = 8$$

$$a = 2$$

$$= \frac{24}{29}$$



المعجم العربي

مثال: اگر  $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$  و  $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$  آنگاه کسینوس زاویه بین دو بردار  $\vec{a} + \vec{b}$  و  $\vec{a} - \vec{b}$  را بدست آورید.

$$\vec{a} + \vec{b} = (3, 2, 2)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (1, 4, 0)$$

$$\cos \theta = \frac{3 + 8 + 0}{\sqrt{9 + 9 + 4} \times \sqrt{1 + 16 + 0}} = \frac{11}{14}$$



المعادن  
الرياضيات  
الفيزياء  
الكيمياء  
البيولوجيا  
العلوم  
الطبيعية

◀ خواص ضرب داخلی دو بردار :

$$۱) \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad \text{خاصیت جابجایی}$$

اثبات :

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$= b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3$$

$$= \vec{b} \cdot \vec{a}$$

العربية  
الرياضيات  
الفيزياء  
الكيمياء  
البيولوجيا  
العلوم  
الطبيعية

$$۲) \vec{a} \cdot (\vec{b} \pm \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \pm \vec{a} \cdot \vec{c}$$

اثبات :

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3) \\ &= a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2 + a_3b_3 + a_3c_3 \\ &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \end{aligned}$$



الکیمیاء  
الفیزیک  
الریاضیات  
الطبیعة  
الکیمیا  
الفیزیک  
الریاضیات  
الطبیعة

$$۳) \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

اثبات :

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

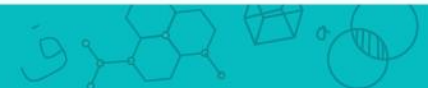
$$= (\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2})^2 = |\vec{a}|^2$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}|^2 = 1$$

$$\vec{j} \cdot \vec{j} = |\vec{j}|^2 = 1$$

$$\vec{k} \cdot \vec{k} = |\vec{k}|^2 = 1$$

پس در بردارهای یکه داریم :



العربية

$$۴) \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$\vec{a} \neq \vec{0}$   
 $\vec{b} \neq \vec{0}$

اثبات :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 0$$

$$|\vec{a}| \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$|\vec{b}| \neq 0$

نتیجه: ضرب داخلی هر دو بردار عمود بر هم برابر صفر است.



تجربا العربية

مثال : مقدار  $m$  را طوری تعیین کنید که دو بردار  $\vec{a} = (m+1, 5, -1)$  و  $\vec{b} = (2, -m, 3)$  بر هم عمود باشند.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow 2m + 2 - 5m - 3 = 0$$

$$-3m = 1$$

$$m = -\frac{1}{3}$$



تجربا العربية

$$۵) \vec{a} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{a} = 0$$

عضو خنثای ضرب داخلی

بگذاریم صفر  
0



تجربا  
العربية  
مفاهيم  
الرياضيات  
الهندسة  
الفيزياء  
الكيمياء  
البيولوجيا  
العلوم  
الاجتماعية  
الإنسانيات



مثال : اگر برای دو بردار عمود بر هم  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  داشته باشیم  $|b| = 3|a| = 9$ ، آنگاه حاصل عبارت زیر را حساب کنید :

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$$

$$a \cdot a - \cancel{a \cdot b} - \cancel{b \cdot a} + b \cdot b$$

$$|a|^2 - |b|^2 = 9 - 81 = \dots$$



مثال : اگر زاویه بین دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  برابر  $120^\circ$  و داشته باشیم  $|\vec{a}| = 5$  و  $|\vec{b}| = 2$  آنگاه حاصل  $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b})$  را به دست آورید.

$$\begin{aligned}
 (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) &= 2|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2|\vec{b}|^2 \\
 &= 2(25) + \vec{a} \cdot \vec{b} - 2(4) \\
 &= 50 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ - 8 \\
 &= 50 + 2(5)(2)\left(-\frac{1}{2}\right) - 8 = 50 - 10 - 8 = 32
 \end{aligned}$$



تجربا العربية

مثال : اگر زاویه بین دو بردار  $a$  و  $b$  با اندازه‌های  $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$  برابر  $60^\circ$  باشد، زاویه بین بردارهای  $\vec{a} - \vec{b}$  و  $\vec{a}$  را حساب کنید.

۶) نامساوی کوشی شوارتز  $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$

اثبات :

$$\cos \theta \leq 1 \Rightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

$$\Rightarrow |\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$



المعادن  
الرياضية  
المعروف

۱۶

برای دو بردار غیر صفر  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  ثابت کنید دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  برهم عمودند اگر فقط اگر  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

$$a \cdot b = 0 \xleftrightarrow[\substack{|a| \neq 0 \\ |b| \neq 0}]{a \perp b}$$

۱/۲۵

زاویه بین دو بردار  $\vec{a} = (2, -1, 2)$  و  $\vec{b} = (1, -1, 0)$  را به دست آورید.

۱۷



تجربیات کاربردی





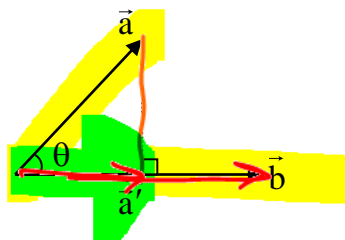
# نهال رشد جمع

هندسه دوازدهم

کاربردهای ضرب داخلی



## اپیزود ۱۶: کاربردهای ضرب داخلی



$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

کارر

محاسبه تصویر بردار  $\vec{a}$  بر امتداد بردار  $\vec{b}$  :

مطابق شکل،  $\vec{a}'$  تصویر بردار  $\vec{a}$  روی بردار  $\vec{b}$  است. همانگونه که مشاهده می کنید :

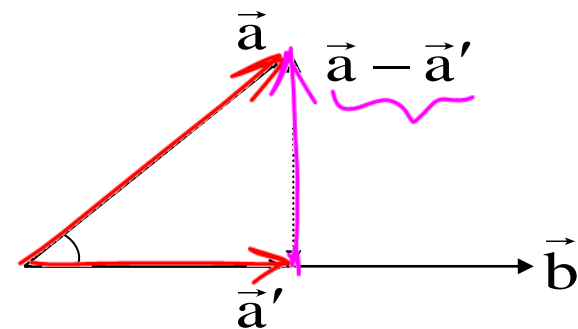
اولاً: بردار  $\vec{a}'$  موازی و هم جهت بردار  $\vec{b}$  است پس  $\vec{a}' = r\vec{b}$



ثانیاً : مطابق شکل بردار  $\vec{a} - \vec{a}'$  بر  $\vec{b}$  عمود است پس :

$$(\vec{a} - \vec{a}') \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow (\vec{a} - r\vec{b}) \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} - r|\vec{b}|^2 = 0 \Rightarrow r = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

$$a \cdot b = r|\vec{b}|^2$$



و در نتیجه خواهیم داشت :

$$\vec{a}' = r\vec{b} \Rightarrow a' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} b$$

اندازه تصویر :  $|a'| = \frac{a \cdot b}{|b|}$



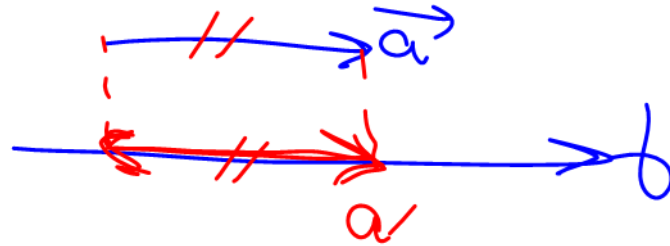
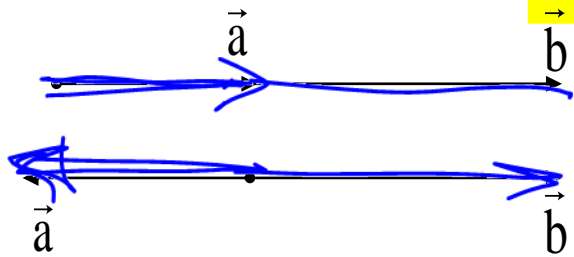
الgebra العربية



اگر  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  بر هم عمود باشند، تصویر هر کدام بر دیگری بردار صفر خواهد شد:



اگر  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  هم‌راستا باشند، تصویر هر کدام بر دیگری برابر بردار اول خواهد بود.



مفاهیم پایه ریاضیات



مثال : تصویر بردار  $\vec{i} = (1, 0, 0)$  را بر امتداد بردار  $\vec{j} = (0, 1, 0)$  بیابید.

$$\vec{i} \perp \vec{j} : \vec{i}' = \frac{\vec{i} \cdot \vec{j}}{|\vec{j}|^2} \vec{j} = \vec{0}$$



مثال : تصویر بردار  $\vec{a} = (1, 2, 2)$  را نسبت به بردار  $\vec{b} = (2, 1, 2)$  به دست آورید.



الکیمیاء  
الطبیعیات  
الرياضيات  
الفيزياء  
العلوم  
الاجتماعية  
اللغات  
التاريخ  
الفنون  
الرياضيات  
العلوم  
الاجتماعية  
اللغات  
التاريخ  
الفنون

مثال : طول تصویر قائم بردار  $\vec{a} = (-5, 3, -7)$  را بر راستای محور  $y$  ها بیابید.

↓ تصویر در آن ها

$$(0, 3, 0)$$

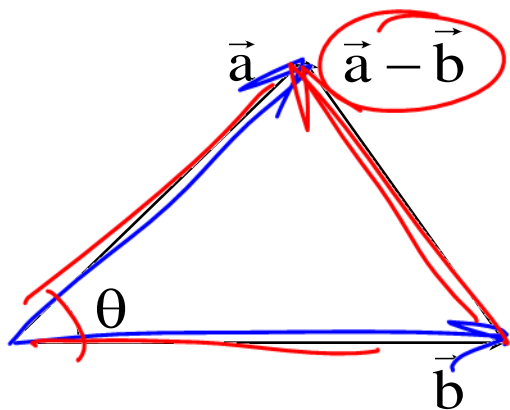
$$= 3 \text{ اندازه}$$





مطابق شکل و به کمک قضیه کسینوس‌ها در مثلث، اندازه تفاضل دو بردار به صورت زیر قابل محاسبه

است:



$$|a - b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$|a - b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\theta$$

همچنین اندازه مجموع دو بردار نیز بصورت زیر قابل محاسبه است:

$$|a + b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|\cos\theta$$

که به کمک روشهای متوازی الاضلاع و مثلث در مجموع دو بردار قابل محاسبه است.



مثال: اگر  $|\vec{a}| = 2$  و  $|\vec{b}| = 5$  و  $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{39}$  باشد، زاویه بین دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  را به دست آورید.

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$39 = 4 + 25 - 2 \times 2 \times 5 \times \cos\theta \rightarrow \dots$$



مثال: اگر  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$  و  $|\vec{a} - \vec{b}| = 2\sqrt{3}$  آنگاه حاصل  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})$  را محاسبه کنید.

2

$$\vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b} - 2|\vec{b}|^2$$

$$\Sigma - a \cdot b - 4$$

$$\Sigma - (-2) - 4 = -2$$

1

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$12 = \Sigma + \Sigma - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\Sigma = -2\vec{a} \cdot \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = -2$$



المعربية

مثال : برای دو بردار غیر صفر  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  اگر داشته باشیم :  $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$  آنگاه بردارهای  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  نسبت

به هم چگونه اند؟

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

و  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  بر هم عمودند .

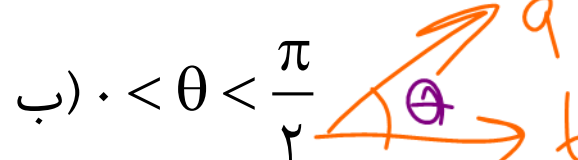


مسئله: برای هر یک از حالات زیر، شکل دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  و رابطه ضرب داخلی دو بردار را بنویسید:



$|a||b| \max$

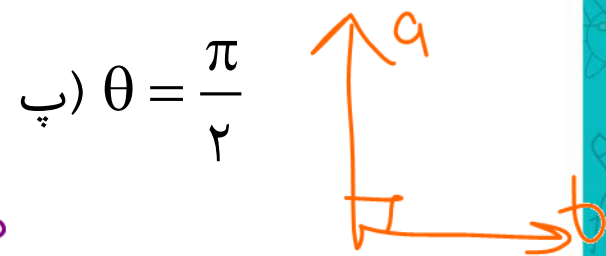
ت)  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$



$|a||b|\cos\theta > 0$



$-|a||b| \min$



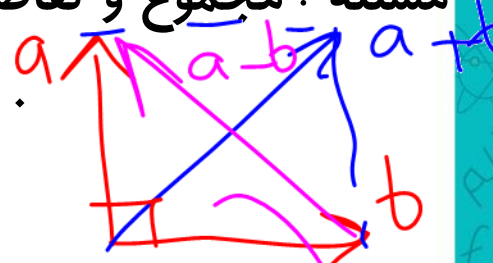
$|a||b| \times 0 = 0$



تجربا العربية

# ویژه امتحان نهایی

مسئله: مجموع و تفاضل دو بردار را در حالت‌های زیر رسم کرده و ویژگی هر یک را توصیف کنید.



الف)  $|a+b| = |a| + |b|$

$|a-b| = |a| - |b|$

ب)  $|a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|\cos\theta$

ت)  $|a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\theta$

ث)  $|a+b| = |a| - |b|$

$|a-b| = |a| + |b|$

$|a+b| = |a-b|$



تربیتی

مسئله: اگر  $|\vec{a}| = 1$  و  $|\vec{b}| = 2$  و  $|\vec{c}| = 3$  باشند و داشته باشیم  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$  آنگاه حاصل عبارت  $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$  را به دست آورید.

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c})$$

A

$$0 = 1 + 4 + 9 + 2A$$

$$-14 = 2A \rightarrow A = -7$$



تجربا العربية

۱/۷۵

۱۳ بردارهای  $\vec{a} = (1, -3, 2)$  و  $\vec{b} = (-2, 1, -5)$  را در نظر بگیرید.

الف) تصویر قائم بردار  $\vec{a}$  را بر امتداد بردار  $\vec{b}$  به دست آورید.

ب) برداری عمود بر دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  بنویسید.

۲

۱۶ بردارهای  $\vec{a} = (-2, 0, 2)$  و  $\vec{b} = 2\vec{j} + 2\vec{k}$  را در نظر بگیرید.

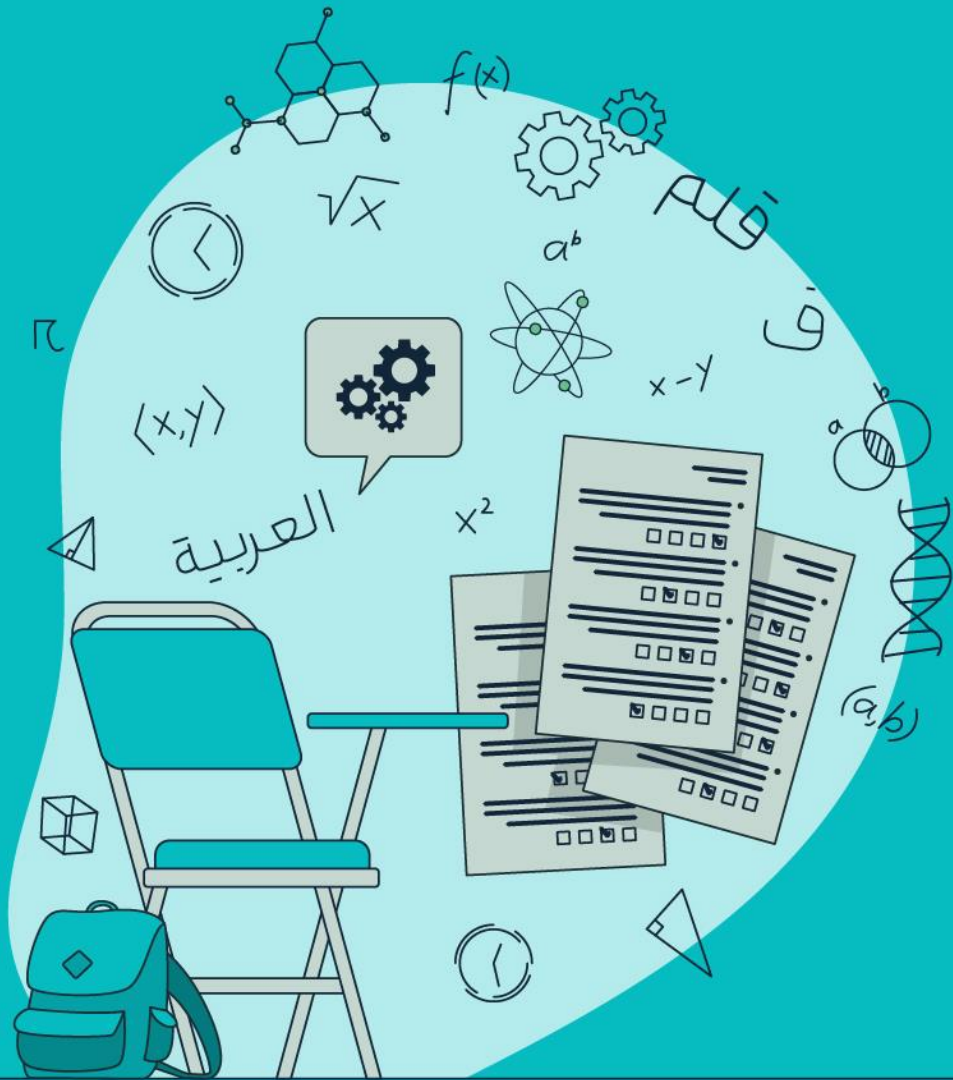
الف) زاویه بین دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  را به دست آورید.

ب) تصویر قائم بردار  $\vec{a} + \vec{b}$  را بر امتداد بردار  $\vec{b}$  به دست آورید.









# نهج یادگیری

هندسه دوازدهم

ضرب خارجی بردارها



## اپیزود ۱۷: ضرب خارجی بردارها

ضرب خارجی دو بردار: برای دو بردار  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  ضرب خارجی یا برداری را با نماد  $\vec{a} \times \vec{b}$  نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

بسط نسبت به سطر اول

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$



الماتریکس  
 حسابان  
 هندسه  
 الفبای  
 الفبای  
 الفبای

مثال : ضرب خارجی دو بردار  $\vec{a} = (-1, 3, 4)$  و  $\vec{b} = (2, -5, 0)$  را به دست آورید.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$20\vec{i} + 17\vec{j} - 1\vec{k}$$

$$(20, 17, -1)$$



المعادن  
الرياضيات  
الفيزياء  
الكيمياء  
البيولوجيا  
الطب  
الهندسة  
العلوم  
التكنولوجيا  
البيئة  
الاجتماعيات  
اللغات  
الفنون  
الرياضة  
السياحة  
التاريخ  
السياسة  
الاقتصاد  
القانون  
الطباعة  
الطباعة

حاصلضرب خارجی دو بردار، همواره یک بردار است.

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad , \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k}$$

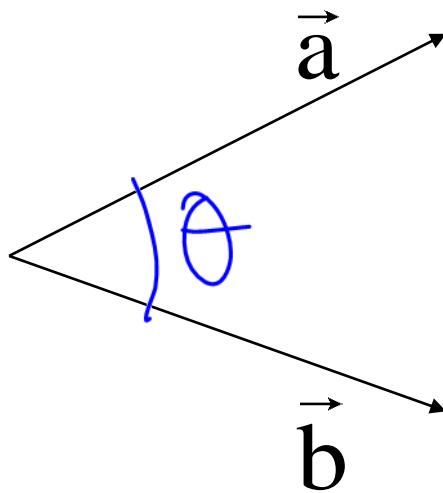


الکیمیاء  
الطبیعیات  
الفیزیک  
الکیمیا

محاسبه ضرب خارجی دو بردار با داشتن اندازه دو بردار و زاویه بین آنها:

اگر  $|\vec{a}|$  و  $|\vec{b}|$  اندازه‌های دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  و  $\theta$  زاویه بین دو بردار باشد، آنگاه:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$



$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$



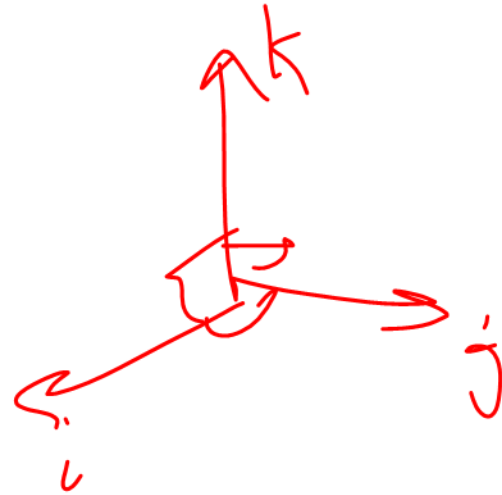
المعادن  
الطبيعية



مثال : اندازه هر یک از بردارهای زیر را حساب کنید.

$$\vec{i} \times \vec{j}, \vec{j} \times \vec{i}, \vec{j} \times \vec{k}, \vec{k} \times \vec{j}, \vec{i} \times \vec{k}, \vec{k} \times \vec{i}$$

$$|\vec{i}| |\vec{j}| \sin 90^\circ = 1$$



$$|\vec{j}| |\vec{k}| \sin 90^\circ = 1$$

تجربا العربية



برای دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  رابطه بین ضرب داخلی و ضرب خارجی به صورت زیر قابل اثبات است :

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$$

اثبات :

$$(a \cdot b)^2 + |a \times b|^2 = (|a||b|\cos\theta)^2 + (|a||b|\sin\theta)^2$$

$$= |a|^2 |b|^2 \cos^2 \theta + |a|^2 |b|^2 \sin^2 \theta$$

$$= |a|^2 |b|^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = |a|^2 |b|^2$$



المعادن  
الرياضيات  
الفيزياء  
الكيمياء  
البيولوجيا  
العلوم  
الطبيعية

مثال: بردارهای  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  مفروضند بطوریکه  $|a| = 3$  و  $|b| = 26$  و  $|a \times b| = 72$  در اینصورت مقدار  $a \cdot b$  را حساب کنید.

$$|a \times b|^2 + |a \cdot b|^2 = |a|^2 |b|^2$$

$$72^2 + |a \cdot b|^2 = 3^2 \times 26^2$$



برای دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  با زاویه بین  $\theta$  داریم :

$$\tan \theta = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}$$

اثبات :

$$\frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a} \cdot \vec{b}|} = \frac{|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta}{|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$



تجربها العربيه  
 2  
 1  
 2  
 3  
 4  
 5  
 6  
 7  
 8  
 9  
 10  
 11  
 12  
 13  
 14  
 15  
 16  
 17  
 18  
 19  
 20  
 21  
 22  
 23  
 24  
 25  
 26  
 27  
 28  
 29  
 30  
 31  
 32  
 33  
 34  
 35  
 36  
 37  
 38  
 39  
 40  
 41  
 42  
 43  
 44  
 45  
 46  
 47  
 48  
 49  
 50  
 51  
 52  
 53  
 54  
 55  
 56  
 57  
 58  
 59  
 60  
 61  
 62  
 63  
 64  
 65  
 66  
 67  
 68  
 69  
 70  
 71  
 72  
 73  
 74  
 75  
 76  
 77  
 78  
 79  
 80  
 81  
 82  
 83  
 84  
 85  
 86  
 87  
 88  
 89  
 90  
 91  
 92  
 93  
 94  
 95  
 96  
 97  
 98  
 99  
 100

مثال: اگر  $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{3} (\vec{a} \cdot \vec{b})$  زاویه بین دو بردار  $a, b$  چقدر است؟

$$\tan \theta = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a} \cdot \vec{b}|} = \frac{\sqrt{3} |\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a} \cdot \vec{b}|} = \sqrt{3}$$

$$\theta = 60^\circ$$



مثال: اگر  $\vec{a} = (2, -3, 4)$  و  $\vec{b} = (1, 2, -1)$  آنگاه ضرب خارجی  $\vec{a} + \vec{b}$  در  $\vec{a} - \vec{b}$  را حساب کنید.

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \dots$$

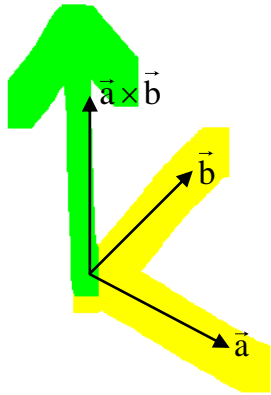


المعادن  
الرياضيات  
الفيزياء  
الكيمياء  
البيولوجيا  
العلوم  
الطبيعية

## خواص ضرب خارجی دو بردار :

(۱) حاصلضرب خارجی دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  برداری است عمود بر صفحه دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$ .

یعنی  $\vec{a} \times \vec{b}$  بر بردارهای  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  عمود است.



نتیجه ۱ :

$$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a} \Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

اثبات :

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) =$$

$$(a_1, a_2, a_3) \cdot (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$= a_1 a_2 b_3 - a_1 a_3 b_2 + a_2 a_3 b_1 - a_1 a_2 b_3 + a_1 a_3 b_2 - a_2 a_3 b_1 = 0$$



المعاهد العربية

نتیجه ۲ : برای بردارهای یکه  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  داریم :

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$۲) \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

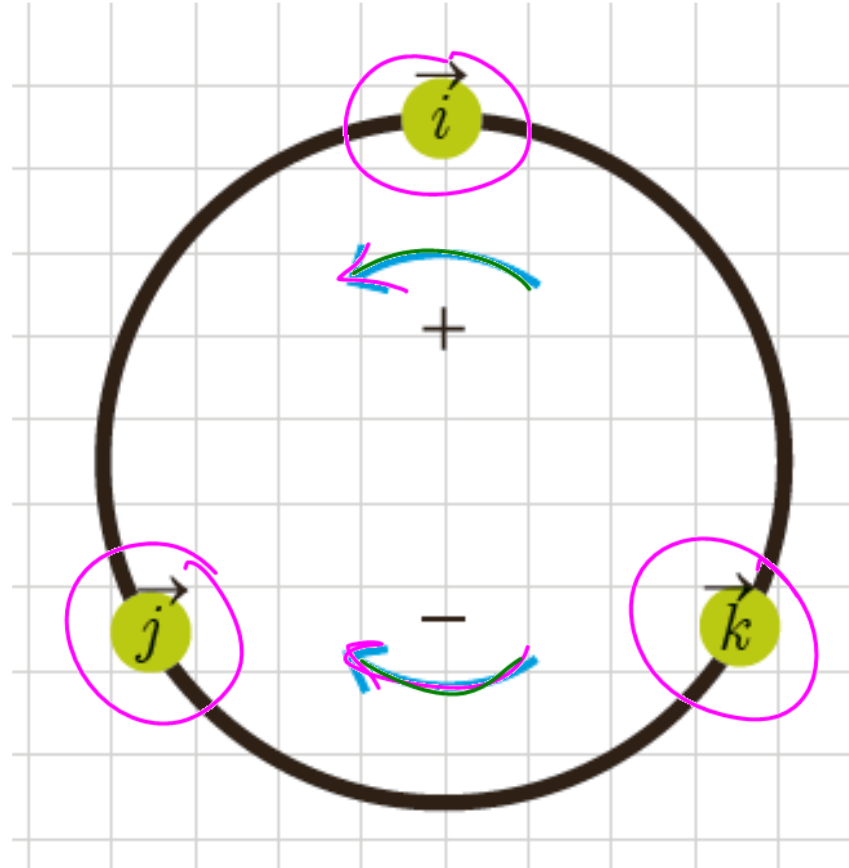
ضرب خارج ضمیمه بی برابرد  
 $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$

نتیجه :



المعربون

برای ضرب خارجی بردارهای یک  $i, j, k$  از دایره زیر می توان استفاده کرد :



الکتاب  
مفهوم  
۲  
۱  
۳  
۴  
۵  
۶  
۷  
۸  
۹  
۱۰  
۱۱  
۱۲  
۱۳  
۱۴  
۱۵  
۱۶  
۱۷  
۱۸  
۱۹  
۲۰  
۲۱  
۲۲  
۲۳  
۲۴  
۲۵  
۲۶  
۲۷  
۲۸  
۲۹  
۳۰  
۳۱  
۳۲  
۳۳  
۳۴  
۳۵  
۳۶  
۳۷  
۳۸  
۳۹  
۴۰  
۴۱  
۴۲  
۴۳  
۴۴  
۴۵  
۴۶  
۴۷  
۴۸  
۴۹  
۵۰  
۵۱  
۵۲  
۵۳  
۵۴  
۵۵  
۵۶  
۵۷  
۵۸  
۵۹  
۶۰  
۶۱  
۶۲  
۶۳  
۶۴  
۶۵  
۶۶  
۶۷  
۶۸  
۶۹  
۷۰  
۷۱  
۷۲  
۷۳  
۷۴  
۷۵  
۷۶  
۷۷  
۷۸  
۷۹  
۸۰  
۸۱  
۸۲  
۸۳  
۸۴  
۸۵  
۸۶  
۸۷  
۸۸  
۸۹  
۹۰  
۹۱  
۹۲  
۹۳  
۹۴  
۹۵  
۹۶  
۹۷  
۹۸  
۹۹  
۱۰۰

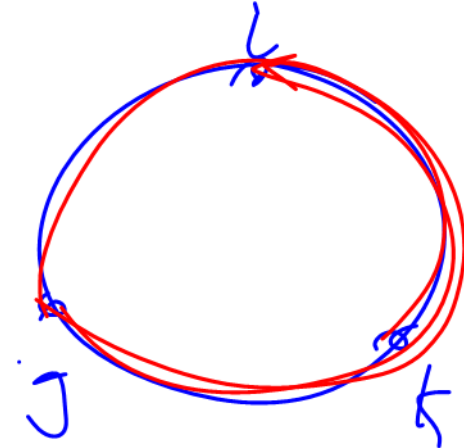
الکتاب  
مفهوم  
۲  
۱  
۳  
۴  
۵  
۶  
۷  
۸  
۹  
۱۰  
۱۱  
۱۲  
۱۳  
۱۴  
۱۵  
۱۶  
۱۷  
۱۸  
۱۹  
۲۰  
۲۱  
۲۲  
۲۳  
۲۴  
۲۵  
۲۶  
۲۷  
۲۸  
۲۹  
۳۰  
۳۱  
۳۲  
۳۳  
۳۴  
۳۵  
۳۶  
۳۷  
۳۸  
۳۹  
۴۰  
۴۱  
۴۲  
۴۳  
۴۴  
۴۵  
۴۶  
۴۷  
۴۸  
۴۹  
۵۰  
۵۱  
۵۲  
۵۳  
۵۴  
۵۵  
۵۶  
۵۷  
۵۸  
۵۹  
۶۰  
۶۱  
۶۲  
۶۳  
۶۴  
۶۵  
۶۶  
۶۷  
۶۸  
۶۹  
۷۰  
۷۱  
۷۲  
۷۳  
۷۴  
۷۵  
۷۶  
۷۷  
۷۸  
۷۹  
۸۰  
۸۱  
۸۲  
۸۳  
۸۴  
۸۵  
۸۶  
۸۷  
۸۸  
۸۹  
۹۰  
۹۱  
۹۲  
۹۳  
۹۴  
۹۵  
۹۶  
۹۷  
۹۸  
۹۹  
۱۰۰



مثال : حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$k \cdot (j \times i) + i \cdot (j \times k) + j \cdot (j \times k)$$

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{k}_{-k} \cdot \underbrace{(j \times i)}_i + i \cdot (j \times k) + j \cdot (j \times k) \\
 & -|k|^2 + |i|^2 + \cancel{j \cdot i} \\
 & -1 + 1 + 0 = 0
 \end{aligned}$$



مثال : اگر داشته باشیم  $|\vec{a}| = 3$  و  $|\vec{b}| = 4$  و زاویه بین دو بردار  $150^\circ$  باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید :

$$(2\vec{a} - 3\vec{b}) \times (2\vec{a} + 3\vec{b})$$

$$4\vec{a} \times \vec{b} - 4\vec{b} \times \vec{a}$$

$$4\vec{a} \times \vec{b} + 4\vec{a} \times \vec{b}$$

$$|4\vec{a} \times \vec{b}| = 4|a||b|\sin 150^\circ = 4 \times 3 \times 4 \times \frac{1}{2} = 24$$



تجربہ العریبیہ

$$6) \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

$a \neq 0$   
 $b \neq 0$

اثبات :

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0^\circ \text{ یا } 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} |\vec{a}| \neq 0 \\ |\vec{b}| \neq 0 \end{matrix} \rightarrow a \perp b$$

نتیجه: ضرب خارجی هر دو بردار موازی برابر صفر است.



العربية

مثال: اگر  $|\vec{a}| = 6$  و  $|\vec{b}| = 5$  و  $|\vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b})| = 18$  حاصل  $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$  را به دست آورید.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = 18$$

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| + |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}|$$

$$|\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b}$$



المعادن  
الرياضيات  
الفيزياء  
الكيمياء  
البيولوجيا  
العلوم  
الطبيعية

مثال : برداری عمود بر دو بردار  $(-2, 1, -5)$  و  $(1, -3, 2)$  بیابید.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & -5 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \dots$$

متریب شرح



الکیمیاء  
الهندسة  
الفيزياء  
الرياضيات  
العلوم  
الاجتماعية  
اللغة العربية

مثال: اگر  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$  و  $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$  آنگاه تصویر بردار  $a \times b$  را بر امتداد بردار  $a$  را به دست آورید.

$$a' = \frac{a \cdot b}{|b|^2} \vec{b}$$



المعادن  
الرياضيات  
الفيزياء  
الكيمياء  
البيولوجيا  
العلوم  
الطبيعية

مثال : برای دو بردار  $\vec{a} = (1, 0, -1)$  و  $\vec{b} = (0, 2, 1)$  حاصل  $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})$  را به دست آورید.

$$\begin{array}{l}
 \vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{a} \\
 \vec{a} \times \vec{b} \\
 2 \vec{a} \times \vec{b} = 2 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} =
 \end{array}$$



مثال: اگر  $\vec{a} = 2i - j + 3k$  و  $\vec{b} = -i + 2k$  آنگاه تصویر قائم بردار  $\vec{a} \times \vec{b}$  را روی م‌ محور  $y$  ها به دست آورید.

$$(0, y, 0)$$



العربية

بررسی قانون حذف در ضرب داخلی و خارجی :

از رابطه  $a \cdot b = a \cdot c$  چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

$$\underline{\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} = 0} \Rightarrow \underline{\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{a} = \vec{0} \\ \vec{b} = \vec{c} \\ \vec{a} \perp \vec{b} - \vec{c} \end{cases} \quad \text{یکی از سه حالت روبرو ممکن است رخ دهد :}$$

از رابطه  $a \times b = a \times c$  چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

$$\underline{\vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} = 0} \Rightarrow \underline{\vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) = 0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a} = \vec{0} \\ \vec{b} = \vec{c} \\ \vec{a} \parallel \vec{b} - \vec{c} \end{cases}$$



الفبا  
 ۲  
 ۳  
 ۴  
 ۵  
 ۶  
 ۷  
 ۸  
 ۹  
 ۱۰  
 ۱۱  
 ۱۲  
 ۱۳  
 ۱۴  
 ۱۵  
 ۱۶  
 ۱۷  
 ۱۸  
 ۱۹  
 ۲۰  
 ۲۱  
 ۲۲  
 ۲۳  
 ۲۴  
 ۲۵  
 ۲۶  
 ۲۷  
 ۲۸  
 ۲۹  
 ۳۰  
 ۳۱  
 ۳۲  
 ۳۳  
 ۳۴  
 ۳۵  
 ۳۶  
 ۳۷  
 ۳۸  
 ۳۹  
 ۴۰  
 ۴۱  
 ۴۲  
 ۴۳  
 ۴۴  
 ۴۵  
 ۴۶  
 ۴۷  
 ۴۸  
 ۴۹  
 ۵۰  
 ۵۱  
 ۵۲  
 ۵۳  
 ۵۴  
 ۵۵  
 ۵۶  
 ۵۷  
 ۵۸  
 ۵۹  
 ۶۰  
 ۶۱  
 ۶۲  
 ۶۳  
 ۶۴  
 ۶۵  
 ۶۶  
 ۶۷  
 ۶۸  
 ۶۹  
 ۷۰  
 ۷۱  
 ۷۲  
 ۷۳  
 ۷۴  
 ۷۵  
 ۷۶  
 ۷۷  
 ۷۸  
 ۷۹  
 ۸۰  
 ۸۱  
 ۸۲  
 ۸۳  
 ۸۴  
 ۸۵  
 ۸۶  
 ۸۷  
 ۸۸  
 ۸۹  
 ۹۰  
 ۹۱  
 ۹۲  
 ۹۳  
 ۹۴  
 ۹۵  
 ۹۶  
 ۹۷  
 ۹۸  
 ۹۹  
 ۱۰۰  
 ۱۰۱  
 ۱۰۲  
 ۱۰۳  
 ۱۰۴  
 ۱۰۵  
 ۱۰۶  
 ۱۰۷  
 ۱۰۸  
 ۱۰۹  
 ۱۱۰  
 ۱۱۱  
 ۱۱۲  
 ۱۱۳  
 ۱۱۴  
 ۱۱۵  
 ۱۱۶  
 ۱۱۷  
 ۱۱۸  
 ۱۱۹  
 ۱۲۰  
 ۱۲۱  
 ۱۲۲  
 ۱۲۳  
 ۱۲۴  
 ۱۲۵  
 ۱۲۶  
 ۱۲۷  
 ۱۲۸  
 ۱۲۹  
 ۱۳۰  
 ۱۳۱  
 ۱۳۲  
 ۱۳۳  
 ۱۳۴  
 ۱۳۵  
 ۱۳۶  
 ۱۳۷  
 ۱۳۸  
 ۱۳۹  
 ۱۴۰  
 ۱۴۱  
 ۱۴۲  
 ۱۴۳  
 ۱۴۴  
 ۱۴۵  
 ۱۴۶  
 ۱۴۷  
 ۱۴۸  
 ۱۴۹  
 ۱۵۰  
 ۱۵۱  
 ۱۵۲  
 ۱۵۳  
 ۱۵۴  
 ۱۵۵  
 ۱۵۶  
 ۱۵۷  
 ۱۵۸  
 ۱۵۹  
 ۱۶۰  
 ۱۶۱  
 ۱۶۲  
 ۱۶۳  
 ۱۶۴  
 ۱۶۵  
 ۱۶۶  
 ۱۶۷  
 ۱۶۸  
 ۱۶۹  
 ۱۷۰  
 ۱۷۱  
 ۱۷۲  
 ۱۷۳  
 ۱۷۴  
 ۱۷۵  
 ۱۷۶  
 ۱۷۷  
 ۱۷۸  
 ۱۷۹  
 ۱۸۰  
 ۱۸۱  
 ۱۸۲  
 ۱۸۳  
 ۱۸۴  
 ۱۸۵  
 ۱۸۶  
 ۱۸۷  
 ۱۸۸  
 ۱۸۹  
 ۱۹۰  
 ۱۹۱  
 ۱۹۲  
 ۱۹۳  
 ۱۹۴  
 ۱۹۵  
 ۱۹۶  
 ۱۹۷  
 ۱۹۸  
 ۱۹۹  
 ۲۰۰  
 ۲۰۱  
 ۲۰۲  
 ۲۰۳  
 ۲۰۴  
 ۲۰۵  
 ۲۰۶  
 ۲۰۷  
 ۲۰۸  
 ۲۰۹  
 ۲۱۰  
 ۲۱۱  
 ۲۱۲  
 ۲۱۳  
 ۲۱۴  
 ۲۱۵  
 ۲۱۶  
 ۲۱۷  
 ۲۱۸  
 ۲۱۹  
 ۲۲۰  
 ۲۲۱  
 ۲۲۲  
 ۲۲۳  
 ۲۲۴  
 ۲۲۵  
 ۲۲۶  
 ۲۲۷  
 ۲۲۸  
 ۲۲۹  
 ۲۳۰  
 ۲۳۱  
 ۲۳۲  
 ۲۳۳  
 ۲۳۴  
 ۲۳۵  
 ۲۳۶  
 ۲۳۷  
 ۲۳۸  
 ۲۳۹  
 ۲۴۰  
 ۲۴۱  
 ۲۴۲  
 ۲۴۳  
 ۲۴۴  
 ۲۴۵  
 ۲۴۶  
 ۲۴۷  
 ۲۴۸  
 ۲۴۹  
 ۲۵۰  
 ۲۵۱  
 ۲۵۲  
 ۲۵۳  
 ۲۵۴  
 ۲۵۵  
 ۲۵۶  
 ۲۵۷  
 ۲۵۸  
 ۲۵۹  
 ۲۶۰  
 ۲۶۱  
 ۲۶۲  
 ۲۶۳  
 ۲۶۴  
 ۲۶۵  
 ۲۶۶  
 ۲۶۷  
 ۲۶۸  
 ۲۶۹  
 ۲۷۰  
 ۲۷۱  
 ۲۷۲  
 ۲۷۳  
 ۲۷۴  
 ۲۷۵  
 ۲۷۶  
 ۲۷۷  
 ۲۷۸  
 ۲۷۹  
 ۲۸۰  
 ۲۸۱  
 ۲۸۲  
 ۲۸۳  
 ۲۸۴  
 ۲۸۵  
 ۲۸۶  
 ۲۸۷  
 ۲۸۸  
 ۲۸۹  
 ۲۹۰  
 ۲۹۱  
 ۲۹۲  
 ۲۹۳  
 ۲۹۴  
 ۲۹۵  
 ۲۹۶  
 ۲۹۷  
 ۲۹۸  
 ۲۹۹  
 ۳۰۰  
 ۳۰۱  
 ۳۰۲  
 ۳۰۳  
 ۳۰۴  
 ۳۰۵  
 ۳۰۶  
 ۳۰۷  
 ۳۰۸  
 ۳۰۹  
 ۳۱۰  
 ۳۱۱  
 ۳۱۲  
 ۳۱۳  
 ۳۱۴  
 ۳۱۵  
 ۳۱۶  
 ۳۱۷  
 ۳۱۸  
 ۳۱۹  
 ۳۲۰  
 ۳۲۱  
 ۳۲۲  
 ۳۲۳  
 ۳۲۴  
 ۳۲۵  
 ۳۲۶  
 ۳۲۷  
 ۳۲۸  
 ۳۲۹  
 ۳۳۰  
 ۳۳۱  
 ۳۳۲  
 ۳۳۳  
 ۳۳۴  
 ۳۳۵  
 ۳۳۶  
 ۳۳۷  
 ۳۳۸  
 ۳۳۹  
 ۳۴۰  
 ۳۴۱  
 ۳۴۲  
 ۳۴۳  
 ۳۴۴  
 ۳۴۵  
 ۳۴۶  
 ۳۴۷  
 ۳۴۸  
 ۳۴۹  
 ۳۵۰  
 ۳۵۱  
 ۳۵۲  
 ۳۵۳  
 ۳۵۴  
 ۳۵۵  
 ۳۵۶  
 ۳۵۷  
 ۳۵۸  
 ۳۵۹  
 ۳۶۰  
 ۳۶۱  
 ۳۶۲  
 ۳۶۳  
 ۳۶۴  
 ۳۶۵  
 ۳۶۶  
 ۳۶۷  
 ۳۶۸  
 ۳۶۹  
 ۳۷۰  
 ۳۷۱  
 ۳۷۲  
 ۳۷۳  
 ۳۷۴  
 ۳۷۵  
 ۳۷۶  
 ۳۷۷  
 ۳۷۸  
 ۳۷۹  
 ۳۸۰  
 ۳۸۱  
 ۳۸۲  
 ۳۸۳  
 ۳۸۴  
 ۳۸۵  
 ۳۸۶  
 ۳۸۷  
 ۳۸۸  
 ۳۸۹  
 ۳۹۰  
 ۳۹۱  
 ۳۹۲  
 ۳۹۳  
 ۳۹۴  
 ۳۹۵  
 ۳۹۶  
 ۳۹۷  
 ۳۹۸  
 ۳۹۹  
 ۴۰۰  
 ۴۰۱  
 ۴۰۲  
 ۴۰۳  
 ۴۰۴  
 ۴۰۵  
 ۴۰۶  
 ۴۰۷  
 ۴۰۸  
 ۴۰۹  
 ۴۱۰  
 ۴۱۱  
 ۴۱۲  
 ۴۱۳  
 ۴۱۴  
 ۴۱۵  
 ۴۱۶  
 ۴۱۷  
 ۴۱۸  
 ۴۱۹  
 ۴۲۰  
 ۴۲۱  
 ۴۲۲  
 ۴۲۳  
 ۴۲۴  
 ۴۲۵  
 ۴۲۶  
 ۴۲۷  
 ۴۲۸  
 ۴۲۹  
 ۴۳۰  
 ۴۳۱  
 ۴۳۲  
 ۴۳۳  
 ۴۳۴  
 ۴۳۵  
 ۴۳۶  
 ۴۳۷  
 ۴۳۸  
 ۴۳۹  
 ۴۴۰  
 ۴۴۱  
 ۴۴۲  
 ۴۴۳  
 ۴۴۴  
 ۴۴۵  
 ۴۴۶  
 ۴۴۷  
 ۴۴۸  
 ۴۴۹  
 ۴۵۰  
 ۴۵۱  
 ۴۵۲  
 ۴۵۳  
 ۴۵۴  
 ۴۵۵  
 ۴۵۶  
 ۴۵۷  
 ۴۵۸  
 ۴۵۹  
 ۴۶۰  
 ۴۶۱  
 ۴۶۲  
 ۴۶۳  
 ۴۶۴  
 ۴۶۵  
 ۴۶۶  
 ۴۶۷  
 ۴۶۸  
 ۴۶۹  
 ۴۷۰  
 ۴۷۱  
 ۴۷۲  
 ۴۷۳  
 ۴۷۴  
 ۴۷۵  
 ۴۷۶  
 ۴۷۷  
 ۴۷۸  
 ۴۷۹  
 ۴۸۰  
 ۴۸۱  
 ۴۸۲  
 ۴۸۳  
 ۴۸۴  
 ۴۸۵  
 ۴۸۶  
 ۴۸۷  
 ۴۸۸  
 ۴۸۹  
 ۴۹۰  
 ۴۹۱  
 ۴۹۲  
 ۴۹۳  
 ۴۹۴  
 ۴۹۵  
 ۴۹۶  
 ۴۹۷  
 ۴۹۸  
 ۴۹۹  
 ۵۰۰  
 ۵۰۱  
 ۵۰۲  
 ۵۰۳  
 ۵۰۴  
 ۵۰۵  
 ۵۰۶  
 ۵۰۷  
 ۵۰۸  
 ۵۰۹  
 ۵۱۰  
 ۵۱۱  
 ۵۱۲  
 ۵۱۳  
 ۵۱۴  
 ۵۱۵  
 ۵۱۶  
 ۵۱۷  
 ۵۱۸  
 ۵۱۹  
 ۵۲۰  
 ۵۲۱  
 ۵۲۲  
 ۵۲۳  
 ۵۲۴  
 ۵۲۵  
 ۵۲۶  
 ۵۲۷  
 ۵۲۸  
 ۵۲۹  
 ۵۳۰  
 ۵۳۱  
 ۵۳۲  
 ۵۳۳  
 ۵۳۴  
 ۵۳۵  
 ۵۳۶  
 ۵۳۷  
 ۵۳۸  
 ۵۳۹  
 ۵۴۰  
 ۵۴۱  
 ۵۴۲  
 ۵۴۳  
 ۵۴۴  
 ۵۴۵  
 ۵۴۶  
 ۵۴۷  
 ۵۴۸  
 ۵۴۹  
 ۵۵۰  
 ۵۵۱  
 ۵۵۲  
 ۵۵۳  
 ۵۵۴  
 ۵۵۵  
 ۵۵۶  
 ۵۵۷  
 ۵۵۸  
 ۵۵۹  
 ۵۶۰  
 ۵۶۱  
 ۵۶۲  
 ۵۶۳  
 ۵۶۴  
 ۵۶۵  
 ۵۶۶  
 ۵۶۷  
 ۵۶۸  
 ۵۶۹  
 ۵۷۰  
 ۵۷۱  
 ۵۷۲  
 ۵۷۳  
 ۵۷۴  
 ۵۷۵  
 ۵۷۶  
 ۵۷۷  
 ۵۷۸  
 ۵۷۹  
 ۵۸۰  
 ۵۸۱  
 ۵۸۲  
 ۵۸۳  
 ۵۸۴  
 ۵۸۵  
 ۵۸۶  
 ۵۸۷  
 ۵۸۸  
 ۵۸۹  
 ۵۹۰  
 ۵۹۱  
 ۵۹۲  
 ۵۹۳  
 ۵۹۴  
 ۵۹۵  
 ۵۹۶  
 ۵۹۷  
 ۵۹۸  
 ۵۹۹  
 ۶۰۰  
 ۶۰۱  
 ۶۰۲  
 ۶۰۳  
 ۶۰۴  
 ۶۰۵  
 ۶۰۶  
 ۶۰۷  
 ۶۰۸  
 ۶۰۹  
 ۶۱۰  
 ۶۱۱  
 ۶۱۲  
 ۶۱۳  
 ۶۱۴  
 ۶۱۵  
 ۶۱۶  
 ۶۱۷  
 ۶۱۸  
 ۶۱۹  
 ۶۲۰  
 ۶۲۱  
 ۶۲۲  
 ۶۲۳  
 ۶۲۴  
 ۶۲۵  
 ۶۲۶  
 ۶۲۷  
 ۶۲۸  
 ۶۲۹  
 ۶۳۰  
 ۶۳۱  
 ۶۳۲  
 ۶۳۳  
 ۶۳۴  
 ۶۳۵  
 ۶۳۶  
 ۶۳۷  
 ۶۳۸  
 ۶۳۹  
 ۶۴۰  
 ۶۴۱  
 ۶۴۲  
 ۶۴۳  
 ۶۴۴  
 ۶۴۵  
 ۶۴۶  
 ۶۴۷  
 ۶۴۸  
 ۶۴۹  
 ۶۵۰  
 ۶۵۱  
 ۶۵۲  
 ۶۵۳  
 ۶۵۴  
 ۶۵۵  
 ۶۵۶  
 ۶۵۷  
 ۶۵۸  
 ۶۵۹  
 ۶۶۰  
 ۶۶۱  
 ۶۶۲  
 ۶۶۳  
 ۶۶۴  
 ۶۶۵  
 ۶۶۶  
 ۶۶۷  
 ۶۶۸  
 ۶۶۹  
 ۶۷۰  
 ۶۷۱  
 ۶۷۲  
 ۶۷۳  
 ۶۷۴  
 ۶۷۵  
 ۶۷۶  
 ۶۷۷  
 ۶۷۸  
 ۶۷۹  
 ۶۸۰  
 ۶۸۱  
 ۶۸۲  
 ۶۸۳  
 ۶۸۴  
 ۶۸۵  
 ۶۸۶  
 ۶۸۷  
 ۶۸۸  
 ۶۸۹  
 ۶۹۰  
 ۶۹۱  
 ۶۹۲  
 ۶۹۳  
 ۶۹۴  
 ۶۹۵  
 ۶۹۶  
 ۶۹۷  
 ۶۹۸  
 ۶۹۹  
 ۷۰۰  
 ۷۰۱  
 ۷۰۲  
 ۷۰۳  
 ۷۰۴  
 ۷۰۵  
 ۷۰۶  
 ۷۰۷  
 ۷۰۸  
 ۷۰۹  
 ۷۱۰  
 ۷۱۱  
 ۷۱۲  
 ۷۱۳  
 ۷۱۴  
 ۷۱۵  
 ۷۱۶  
 ۷۱۷  
 ۷۱۸  
 ۷۱۹  
 ۷۲۰  
 ۷۲۱  
 ۷۲۲  
 ۷۲۳  
 ۷۲۴  
 ۷۲۵  
 ۷۲۶  
 ۷۲۷  
 ۷۲۸  
 ۷۲۹  
 ۷۳۰  
 ۷۳۱  
 ۷۳۲  
 ۷۳۳  
 ۷۳۴  
 ۷۳۵  
 ۷۳۶  
 ۷۳۷  
 ۷۳۸  
 ۷۳۹  
 ۷۴۰  
 ۷۴۱  
 ۷۴۲  
 ۷۴۳  
 ۷۴۴  
 ۷۴۵  
 ۷۴۶  
 ۷۴۷  
 ۷۴۸  
 ۷۴۹  
 ۷۵۰  
 ۷۵۱  
 ۷۵۲  
 ۷۵۳  
 ۷۵۴  
 ۷۵۵  
 ۷۵۶  
 ۷۵۷  
 ۷۵۸  
 ۷۵۹  
 ۷۶۰  
 ۷۶۱  
 ۷۶۲  
 ۷۶۳  
 ۷۶۴  
 ۷۶۵  
 ۷۶۶  
 ۷۶۷  
 ۷۶۸  
 ۷۶۹  
 ۷۷۰  
 ۷۷۱  
 ۷۷۲  
 ۷۷۳  
 ۷۷۴  
 ۷۷۵  
 ۷۷۶  
 ۷۷۷  
 ۷۷۸  
 ۷۷۹  
 ۷۸۰  
 ۷۸۱  
 ۷۸۲  
 ۷۸۳  
 ۷۸۴  
 ۷۸۵  
 ۷۸۶  
 ۷۸۷  
 ۷۸۸  
 ۷۸۹  
 ۷۹۰  
 ۷۹۱  
 ۷۹۲  
 ۷۹۳  
 ۷۹۴  
 ۷۹۵  
 ۷۹۶  
 ۷۹۷  
 ۷۹۸  
 ۷۹۹  
 ۸۰۰  
 ۸۰۱  
 ۸۰۲  
 ۸۰۳  
 ۸۰۴  
 ۸۰۵  
 ۸۰۶  
 ۸۰۷  
 ۸۰۸  
 ۸۰۹  
 ۸۱۰  
 ۸۱۱  
 ۸۱۲  
 ۸۱۳  
 ۸۱۴  
 ۸۱۵  
 ۸۱۶  
 ۸۱۷  
 ۸۱۸  
 ۸۱۹  
 ۸۲۰  
 ۸۲۱  
 ۸۲۲  
 ۸۲۳  
 ۸۲۴  
 ۸۲۵  
 ۸۲۶  
 ۸۲۷  
 ۸۲۸  
 ۸۲۹  
 ۸۳۰  
 ۸۳۱  
 ۸۳۲  
 ۸۳۳  
 ۸۳۴  
 ۸۳۵  
 ۸۳۶  
 ۸۳۷  
 ۸۳۸  
 ۸۳۹  
 ۸۴۰  
 ۸۴۱  
 ۸۴۲  
 ۸۴۳  
 ۸۴۴  
 ۸۴۵  
 ۸۴۶  
 ۸۴۷  
 ۸۴۸  
 ۸۴۹  
 ۸۵۰  
 ۸۵۱  
 ۸۵۲  
 ۸۵۳  
 ۸۵۴  
 ۸۵۵  
 ۸۵۶  
 ۸۵۷  
 ۸۵۸  
 ۸۵۹  
 ۸۶۰  
 ۸۶۱  
 ۸۶۲  
 ۸۶۳  
 ۸۶۴  
 ۸۶۵  
 ۸۶۶  
 ۸۶۷  
 ۸۶۸  
 ۸۶۹  
 ۸۷۰  
 ۸۷۱  
 ۸۷۲  
 ۸۷۳  
 ۸۷۴  
 ۸۷۵  
 ۸۷۶  
 ۸۷۷  
 ۸۷۸  
 ۸۷۹  
 ۸۸۰  
 ۸۸۱  
 ۸۸۲  
 ۸۸۳  
 ۸۸۴  
 ۸۸۵  
 ۸۸۶  
 ۸۸۷  
 ۸۸۸  
 ۸۸۹  
 ۸۹۰  
 ۸۹۱  
 ۸۹۲  
 ۸۹۳  
 ۸۹۴  
 ۸۹۵  
 ۸۹۶  
 ۸۹۷  
 ۸۹۸  
 ۸۹۹  
 ۹۰۰  
 ۹۰۱  
 ۹۰۲  
 ۹۰۳  
 ۹۰۴  
 ۹۰۵  
 ۹۰۶  
 ۹۰۷  
 ۹۰۸  
 ۹۰۹  
 ۹۱۰  
 ۹۱۱  
 ۹۱۲  
 ۹۱۳  
 ۹۱۴  
 ۹۱۵  
 ۹۱۶  
 ۹۱۷  
 ۹۱۸  
 ۹۱۹  
 ۹۲۰  
 ۹۲۱  
 ۹۲۲  
 ۹۲۳  
 ۹۲۴  
 ۹۲۵  
 ۹۲۶  
 ۹۲۷  
 ۹۲۸  
 ۹۲۹  
 ۹۳۰  
 ۹۳۱  
 ۹۳۲  
 ۹۳۳  
 ۹۳۴  
 ۹۳۵  
 ۹۳۶  
 ۹۳۷  
 ۹۳۸  
 ۹۳۹  
 ۹۴۰  
 ۹۴۱  
 ۹۴۲  
 ۹۴۳  
 ۹۴۴  
 ۹۴۵  
 ۹۴۶  
 ۹۴۷  
 ۹۴۸  
 ۹۴۹  
 ۹۵۰  
 ۹۵۱  
 ۹۵۲  
 ۹۵۳  
 ۹۵۴  
 ۹۵۵  
 ۹۵۶  
 ۹۵۷  
 ۹۵۸  
 ۹۵۹  
 ۹۶۰  
 ۹۶۱  
 ۹۶۲  
 ۹۶۳  
 ۹۶۴  
 ۹۶۵  
 ۹۶۶  
 ۹۶۷  
 ۹۶۸  
 ۹۶۹  
 ۹۷۰  
 ۹۷۱  
 ۹۷۲  
 ۹۷۳  
 ۹۷۴  
 ۹۷۵  
 ۹۷۶  
 ۹۷۷  
 ۹۷۸  
 ۹۷۹  
 ۹۸۰  
 ۹۸۱  
 ۹۸۲  
 ۹۸۳  
 ۹۸۴  
 ۹۸۵  
 ۹۸۶  
 ۹۸۷  
 ۹۸۸  
 ۹۸۹  
 ۹۹۰  
 ۹۹۱  
 ۹۹۲  
 ۹۹۳  
 ۹۹۴  
 ۹۹۵  
 ۹۹۶  
 ۹۹۷  
 ۹۹۸  
 ۹۹۹  
 ۱۰۰۰

۱/۷۵	<p>بردارهای <math>\vec{a} = (1, -3, 2)</math> و <math>\vec{b} = (-2, 1, -5)</math> را در نظر بگیرید.</p> <p>الف) تصویر قائم بردار <math>\vec{a}</math> را بر امتداد بردار <math>\vec{b}</math> به دست آورید.</p> <p>ب) برداری عمود بر دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> بنویسید.</p>	۱۳
۱	<p>ثابت کنید: دو بردار غیر صفر <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> با هم موازی هستند اگر و فقط اگر <math>\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}</math>.</p>	۱۴



تجربیات  
معمول  
در  
مطالعه  
فیزیک

۱/۲۵	ثابت کنید: دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی هستند، اگر و فقط اگر $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ .	۱۵
۲	سه بردار $\vec{a} = (2, 3, 1)$ و $\vec{b} = (-1, 1, 0)$ و $\vec{c} = (2, 1, -2)$ مفروض اند. الف) برداری عمود بر دو بردار $\vec{c}$ و $-\vec{b}$ را به دست آورید.	۱۶
۱	دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض اند به طوری که $ \vec{a}  = 6$ و $ \vec{b}  = 4$ و زاویه بین آنها $30^\circ$ درجه است مقدار عبارت $ \vec{a} \times \vec{b} $ را محاسبه کنید.	۱۴

$$2|\vec{a} \times \vec{b}|$$







# نهج جدید رسم

هندسه دوازدهم

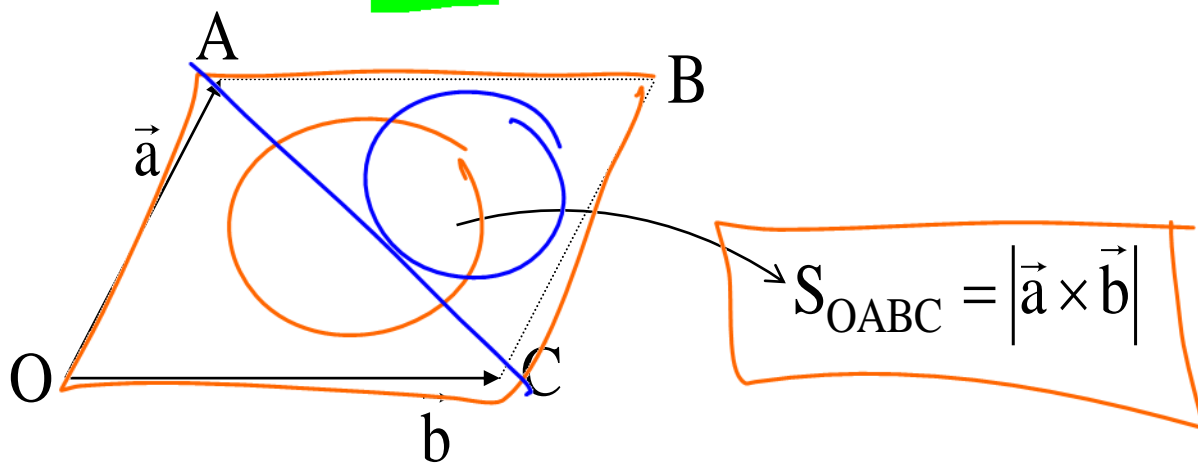
کاربردهای ضرب خارجی بردارها



## اپیزود ۱۸: کاربردهای ضرب خارجی بردارها

◀ کاربردهای ضرب خارجی دو بردار :

(۱) مساحت متوازی الاضلاعی که توسط دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  ساخته می‌شود برابر است با  $|\vec{a} \times \vec{b}|$ .



فصل ۱۸  
بردارها  
ضرب خارجی  
مساحت متوازی الاضلاعی  
مساحت مثلث





مسئله: اگر  $|a| = 3$  و  $|b| = 2$  و مساحت مثلثی که روی دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  ساخته می‌شود چقدر است؟

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \Delta$$

$$\begin{aligned} \text{مساحت} \Sigma &= \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{11} \end{aligned}$$

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 + |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = (|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2)$$

$$2\Delta + |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = 9 \times 4$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = 11$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{11}$$



تاریخچه علم ریاضیات

مسئله: فرض کنید  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  بردارهای به طول ۵ هستند که با هم زاویه  $۱۳۵$  درجه می‌سازند. در این صورت مساحت مثلثی که توسط بردارهای  $\vec{a} - ۲\vec{b}$  و  $۳\vec{a} + ۲\vec{b}$  تولید می‌شود را حساب کنید.

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} |(\vec{a} - 2\vec{b})(3\vec{a} + 2\vec{b})| = \frac{1}{2} |2a \times b - 4b \times a + 6a \times a + 4a \times b| = \frac{1}{2} |8a \times b| \\
 &= 4|a \times b| = 4 \times 5 \times 5 \times \sin 135 = 50\sqrt{2}
 \end{aligned}$$



تجربا العربية

مسئله : دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  به طول‌های ۵ و ۸ مفروض‌اند به طوری که مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته شده توسط آنها ۲۴ واحد مربع است. اگر زاویه بین دو بردار کمتر از قائمه باشد، اندازه تفاضل دو بردار را حساب کنید.

$$|a \times b| = 24 \rightarrow |a - b| = ?$$

$$|a - b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2(a \cdot b)$$

$$|a \cdot b|^2 + |a \times b|^2 = |a|^2 |b|^2$$

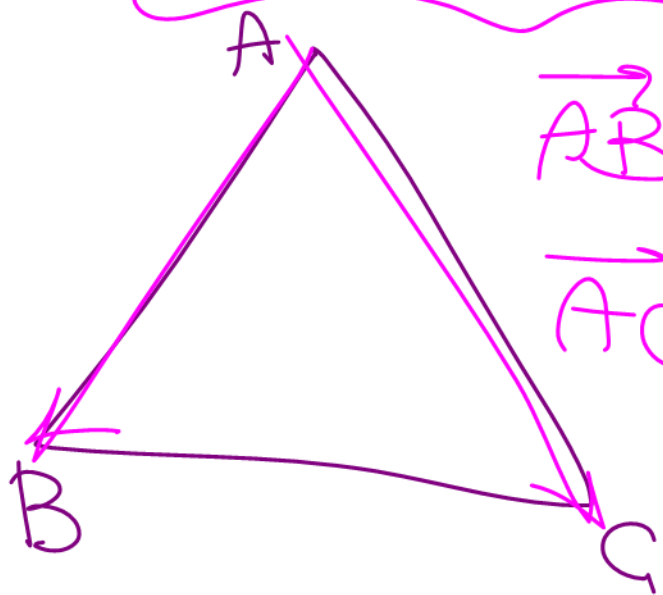


تجربا العربية

$$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2) \rightarrow \vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

مسئله: مساحت مثلثی را حساب کنید که رئوس آن نقاط زیر باشد:

$$A(3, 5, 7), B(5, 5, 0), C(-4, 0, 4)$$



$$\vec{AB} (2, 0, -7)$$

$$\vec{AC} (-7, -5, -3)$$

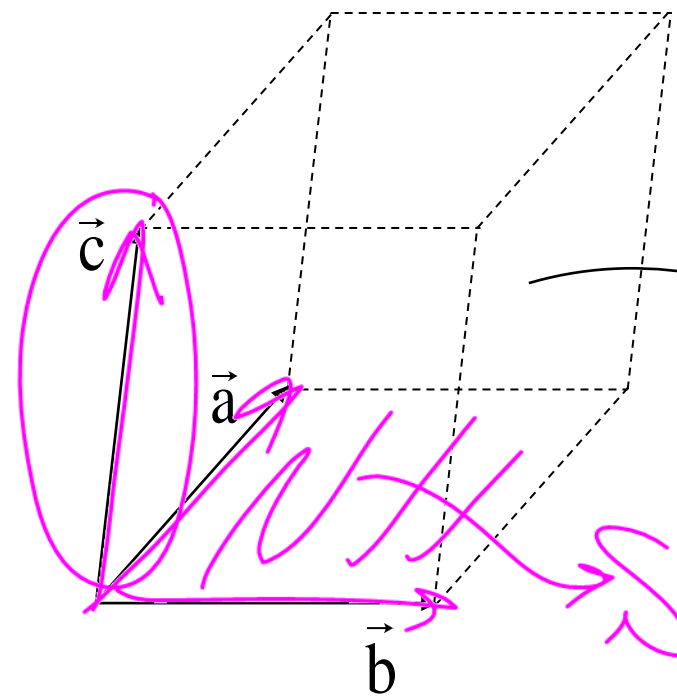
$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & -7 \\ -7 & -5 & -3 \end{vmatrix}$$



تیمارهای هندسه

(۳) حجم متوازی السطوحی که توسط ۳ بردار  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  ساخته می شود برابر است با:  $|a \cdot (b \times c)|$  یا  $|b \cdot (a \times c)|$  یا  $|c \cdot (a \times b)|$



$$a \rightarrow b \rightarrow c$$



$$V = |a \cdot (b \times c)| =$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$V = |a \times b| \cdot c$$



تجربا العربية

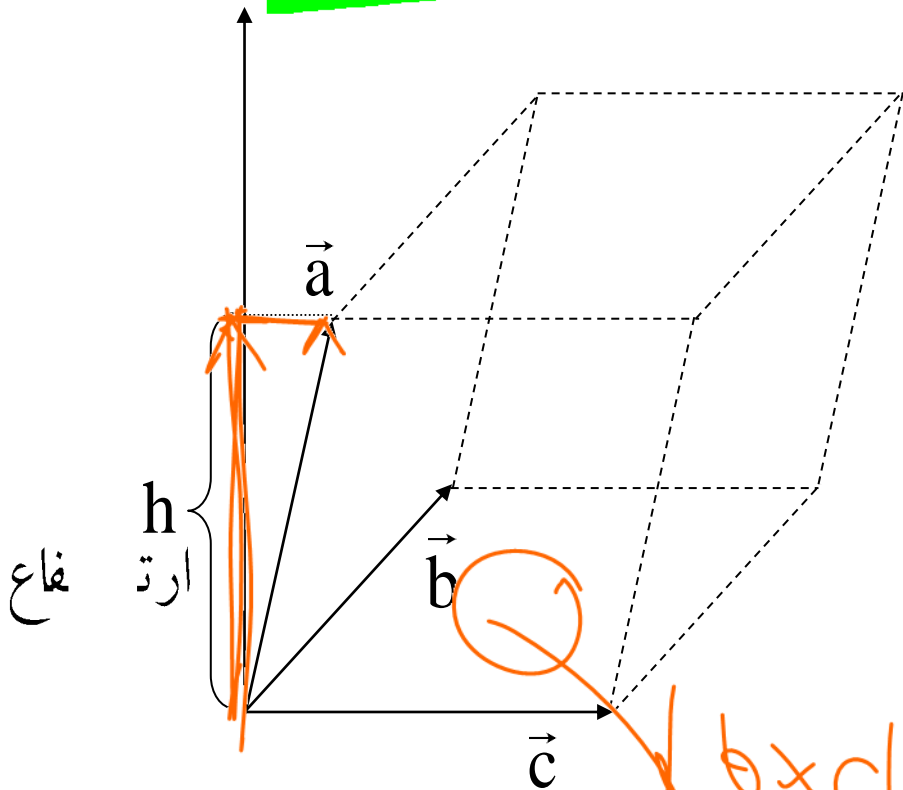
مثال : حجم متوازی السطوحی را به دست آورید که توسط بردارهای  $(1,1,0)$  و  $(1,0,1)$  و  $(0,1,1)$  تولید می شود.

$$|a \cdot (b \times c)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$



تجربا العربية

ارتفاع متوازی السطوح برابر است با اندازه تصویر قائم یک بردار بر ضرب خارجی دو بردار دیگر.



$$V_{\text{متوازی السطوح}} = \text{مساحت قاعده} \times h \rightarrow h = \frac{V}{\text{مساحت قاعده}}$$

$$h = \frac{|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|}{|\vec{b} \times \vec{c}|}$$



تجربها العربية

مثال : ارتفاع متوازی السطوحی را بیابید که روی بردارهای  $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$  و  $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

$\vec{c} = 4\vec{i} + 2\vec{k}$  ساخته شده است.

$$|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|\vec{b} \times \vec{c}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$|\vec{a}| = 5$$



المعادلات  
المتجانسة  
المعيارية  
المعيارية



مسئله: بر روی سه بردار  $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$  و  $\vec{b} = \vec{j} + 3\vec{k}$  و  $\vec{c} = 4\vec{i} - \vec{k}$  یک متوازی‌السطوح ساخته شده است. اگر قاعده این متوازی‌السطوح بردارهای  $a$  و  $b$  باشند، ارتفاع متوازی‌السطوح را حساب کنید.

$$h = \frac{|a \cdot (b \times c)|}{|a \times b|}$$





مثال : نشان دهید بردارهای  $(1, 9, -1)$  و  $(1, -1, 3)$  و  $(1, 4, 1)$  در یک صفحه قرار دارند.

$$|a \cdot (b \times c)| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 9 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$



۱	<p>مقدار <math>m</math> را طوری تعیین کنید که سه بردار <math>\vec{a} = (1, m, -1)</math>، <math>\vec{b} = (2, 3, -1)</math> و <math>\vec{c} = (1, -1, 3)</math> در یک صفحه باشند.</p> <p style="text-align: center;"><math>\downarrow \quad \downarrow</math> <math>\quad \quad \quad = 0</math></p>	۱۵
۱/۲۵	<p>اگر طول بردارهای <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> به ترتیب ۴ و ۶ و <math>\vec{a} \cdot \vec{b} = 12</math> باشد، مساحت مثلث بنا شده توسط دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> را به دست آورید.</p> <p style="text-align: center;"><math>\frac{1}{2}  a \times b </math></p>	۱۶
۲	<p>سه بردار <math>\vec{a} = (2, 3, 1)</math> و <math>\vec{b} = (-1, 1, 0)</math> و <math>\vec{c} = (2, 1, -2)</math> مفروض‌اند.</p> <p>الف) برداری عمود بر دو بردار <math>\vec{c}</math> و <math>-2\vec{b}</math> را به دست آورید.</p> <p>ب) حجم متوازی السطوحی که توسط سه بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> و <math>\vec{c}</math> تولید می‌شود را به دست آورید.</p>	۱۶



فصل ۱۱: بردارها

۱۵ اگر  $A = (2, -1, 3)$  و  $B = (3, 1, 4)$  و  $C = (-1, 1, 0)$  سه رأس مثلث  $ABC$  باشند، مساحت مثلث  $ABC$  را با  $\frac{1}{5}$

$$S = \frac{1}{2} |AB \times AC|$$

استفاده از ضرب خارجی بردارها به دست آورید.



المعادن  
الرياضيات  
الفيزياء  
الكيمياء  
البيولوجيا  
العلوم  
الهندسة  
الطب  
العمارة  
الهندسة المعمارية  
الهندسة المدنية  
الهندسة الميكانيكية  
الهندسة الكهربائية  
الهندسة الكيميائية  
الهندسة النووية  
الهندسة الفضائية  
الهندسة البحرية  
الهندسة الجوية  
الهندسة الجيوتقنية  
الهندسة الجيولوجية  
الهندسة الجيوفيزيائية  
الهندسة الجيوكيميائية  
الهندسة الجيوسياسية  
الهندسة الجيوسياسية  
الهندسة الجيوسياسية



## اپیزود ۱۹ : سوالات امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۱



الکتریک  
مکانیک  
فیزیک  
ریاضیات  
شیمی  
بیولوژی  
تاریخ  
ادبیات  
زبان  
علوم



