نهایی بندی جمع

هندسه دوازدهم

مفهوم و انواع ماتریس، جمع و تفریق ماتریس‌ها

اپیزود ۱ : مفهوم ماتریس، انواع ماتریس، جمع و تفریق ماتریسها

ماتریس : هر جدول مستطیلی از اعداد حقیقی شامل تعدادی سطر و ستون که معمولاً با حروف بزرگ لاتین مانند $A, B, C, \ldots$ نمایش داده می‌شود.

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} \sqrt{۲} & -\sqrt{۳} \\ -۳ & ۲/۵ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{bmatrix}$$

درایهٔ ماتریس : اعداد حقیقی درون هر ماتریس، درایه‌های آن ماتریس نامیده می‌شوند.

هر ماتریس دارای m سطر و n ستون را یک ماتریس m در n یا مرتبهٔ $m\times n$ می‌نامیم و بصورت $A_{m\times n}$ نمایش می‌دهیم.

$$A_{۲\times۲}=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}\ ,\ B_{۳\times۴}=\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & ۱۰ & ۰\\ ۱ & -۱/۲ & \sqrt{۵} & ۳\\ ۲ & ۴ & -۶ & \frac{۲}{۳}\end{bmatrix}$$

سطر ستون

➢ **درایهٔ عمومی ماتریس A** : درایهٔ A_{ij} را که در آن $1 \le i \le m$ و $1 \le j \le n$ است درایهٔ عمـومی مـاتریس A نامیده و بعنوان نماد همهٔ درایه‌های ماتریس در نظر گرفته می‌شود.

$A = [a_{ij}]$; i : شمارهٔ سطر , j : شمارهٔ ستون

$$A_{2\times2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad B_{3\times2} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \qquad C_{3\times4} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{bmatrix}$$

مسئله : ماتریس $A_{3\times2}$ بصورت زیر را با درایه‌هایش نمای دهید.

$$A_{ij} = [i^2 + j]$$

$$A_{3\times2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$$

مسئله : ماتریس ۳×۴ زیر را با درایه‌هایش بنویسید.

$$a_{ij}=\begin{cases} i^{۲} & i<j \\ ۷ & i=j \\ i+j & i>j \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & a_{۱۴} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} & a_{۲۴} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} & a_{۳۴} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۷ & ۱ & ۱ & ۴ \\ ۳ & ۷ & ۴ & ۵ \\ ۴ & ۵ & ۷ & ۶ \end{bmatrix}$$

تذکر: طبق قرارداد ماتریس مرتبهٔ ۱×۱ بصورت $[k]_{۱\times۱}$ را برابر با عدد حقیقی k تعریف می‌کنیم.

$[-۱۰]_{۱\times۱} = -۱۰$ $[۲]_{۱\times۱} = ۲$

معرفی چند ماتریس خاص :

۱- ماتریس مربعی : ماتریسی که دارای تعداد سطر و ستون برابر است؛ $m = n$. ماتریس‌های مربعی را اصطلاحاً از مرتبهٔ n یا $n \times n$ می‌نامیم.

$$A_{۲\times۲} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$$

قطر اصلی

$$B_{۳\times۳} = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۲ \\ -۳ & ۲ & ۵ \end{bmatrix}$$

قطر اصلی

۱ x n

۲- ماتریس سطری : ماتریسی که فقط یک سطر دارد؛ $m = ۱$.

$$A_{۱\times۱} = [۵] \quad , \quad B_{۱\times۲} = [۱ \quad ۲] \quad , \quad C_{۱\times۳} = [-۱ \quad ۰ \quad ۳]$$

$m \times 1$

۳- ماتریس ستونی: ماتریسی که فقط یک ستون دارد؛ $n = ۱$.

$$A_{۲\times۱} = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۴ \end{bmatrix} \quad , \quad B_{۳\times۱} = \begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \\ \sqrt{۶} \end{bmatrix}$$

۴- ماتریس قطری (D): ماتریس مربعی که در آن درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی همگی صفر هستند.

$$D_{۲\times۲} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix} \quad , \quad D_{۳\times۳} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

۵- ماتریس اسکالر : ماتریس قطری که درایه‌های قطر اصلی آن همگی با هم برابرند.

$$A_{۲\times۲}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\quad,\quad B_{۳\times۳}=\begin{bmatrix}۵ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۵ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۵\end{bmatrix}$$

۶- ماتریس همانی (واحد) (I) : ماتریس اسکالری که درایه‌های قطر اصلی آن همگی ۱ باشد.

$$I_{۱\times۱}=[۱]\quad,\quad I_{۲\times۲}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\quad,\quad I_{۳\times۳}=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

نکته: هر ماتریس اسکالر، مضربی از ماتریس همانی هم مرتبه اش است.

$$A_{۲\times۲}=\begin{bmatrix}k & ۰\\ ۰ & k\end{bmatrix}=k.\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=k.I_{۲\times۲} \quad , \quad B_{۳\times۳}=\begin{bmatrix}k & ۰ & ۰\\ ۰ & k & ۰\\ ۰ & ۰ & k\end{bmatrix}=k.I_{۳\times۳}$$

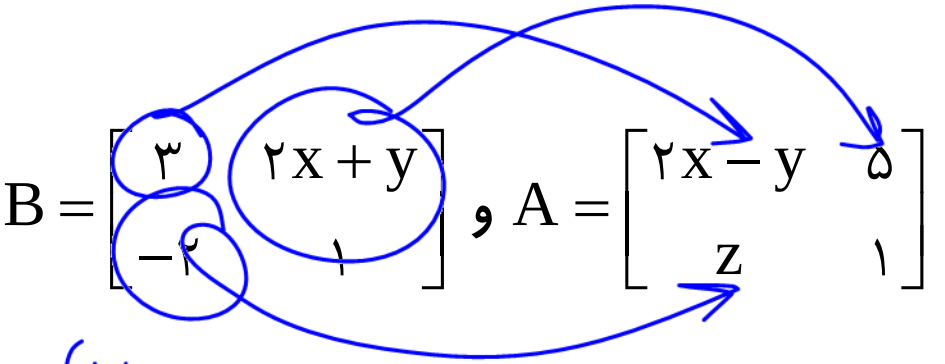
۷- ماتریس صفر $(\bar{O})$: ماتریسی که همهٔ درایه‌های آن صفر باشد.

$$\bar{O}_{۲\times۳}=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix} \quad , \quad \bar{O}_{۱\times۲}=\begin{bmatrix}۰ & ۰\end{bmatrix}$$

تساوی دو ماتریس: دو ماتریس هم مرتبه $m \times n$ را مساوی گوییم هرگاه درایه‌های نظیر به نظیر در آنها با هم برابر باشند.

$$\forall_{i,j} : A_{ij} = B_{ij} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$$

مسئله : اگر $A = \begin{bmatrix} ۲x-y & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ **و داشته باشیم** $A = B$ **آنگاه مقدار** $x+y+z$ **را بیابید.**



$$\begin{cases} ۲x-y=۳ \\ ۲x+y=۵ \end{cases} \qquad z=-۲$$

جمع و تفریق دو ماتریس : برای جمع یا تفریق دو ماتریس هم مرتبه کافی است درایه‌های دو ماتریس را نظیر به نظیر با هم جمع کرده یا از هم کم کنیم. بدیهی است که ماتریس حاصلجمع یا حاصل تفریق با ماتریس‌های اولیه هم‌مرتبه خواهد بود.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ -۷ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ -۸ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$A = [a_{ij}] \ , \ B = [b_{ij}]$$

$$A \pm B = [a_{ij}] \pm [b_{ij}] = [a_{ij} \pm b_{ij}]$$

ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس : برای ضرب کردن یک عدد حقیقی در یک ماتریس کافی است آن عدد را در تمام درایه‌های ماتریس ضرب کنیم.

$$A=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۰ & ۴\end{bmatrix}\Rightarrow ۳A=\begin{bmatrix}۶ & -۳\\ ۰ & ۱۲\end{bmatrix}$$

$$A=[a_{ij}]\xrightarrow{r\in\mathbb{R}}rA=r[a_{ij}]=[ra_{ij}]$$

قرینهٔ یک ماتریس : قرینهٔ ماتریس A را با $-A$ نمایش داده و از ضرب عدد (-1) در ماتریس A بدست می‌آید.

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow -A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

نکته: جمع هر ماتریس با قرینه‌اش، ماتریس صفر می‌شود :

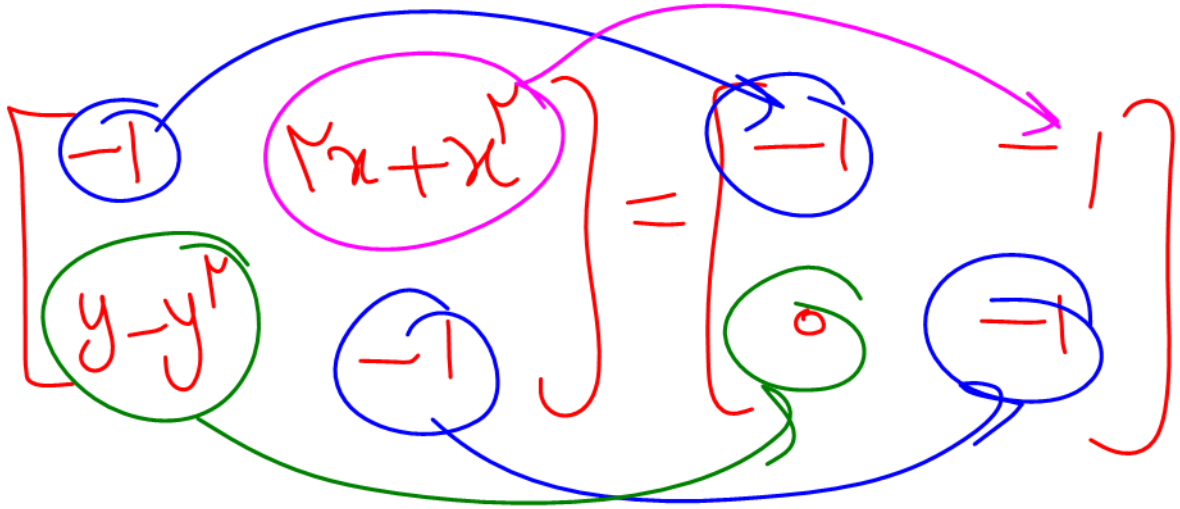
$$A+(-A)=\bar{O}$$

مسئله : اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ و $B=[ij]_{2\times 2}$ و $C=A+B$ **آنگاه ماتریس** C **را بیابید.**

$$B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 6\end{bmatrix}$$

مسئله : اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2x\\ y & 2\end{bmatrix}$ **و** $B=\begin{bmatrix}2 & -x^2\\ y^2 & 3\end{bmatrix}$ **و** $C=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ **و داشته باشیم** $A-B=C$ **آنگاه مقادیر** x, y **را محاسبه کنید.**



$x^2+2x=-1 \rightarrow x=\dots$

$y-y^2=0 \rightarrow y=\dots,1$

خواص مهم جمع و تفریق ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس :

برای ماتریس‌های هم‌مرتبهٔ A, B, C و اعداد حقیقی r, s داریم؛

۱) $A+B=B+A$ — خاصیت جابه‌جایی

۲) $A+(B+C)=(A+B)+C$ — خاصیت شرکت‌پذیری

۳) $A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$ — ماتریس صفر عضو خنثی عمل جمع

۴) $A+(-A)=(-A)+A=\bar{O}$ — ماتریس قرینه

۵) $r(A \pm B) = rA \pm rB$

۶) $(r \pm s)A = rA \pm sA$

۷) $A = B \Rightarrow rA = rB$

۸) $rA = rB \overset{r \neq 0}{\Rightarrow} A = B$

سؤالات امتحان نهایی‌درس : **هندسه ۳**	رشته : **ریاضی فیزیک**	مدت امتحان:**۱۳۵** دقیقه	ساعت شروع:**۸ صبح**
پایه **دوازدهم** دوره دوم متوسطه	نام و نام خانوادگی :	تاریخ امتحان: **۱۴۰۱/۳/۴**	تعداد صفحه: **۲**
دانش آموزان روزانه بزرگسال و داوطلبان آزادسراسرکشور در**نوبت خرداد** ماه سال **۱۴۰۱**		مرکز سنجش وپایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد)	نمره
	استفاده از ماشین حساب ساده(دارای چهار عمل اصلی و رادیکال) مجاز است .	
۱	عبارت های زیر را کامل کنید .	۱
	الف) اگر ماتریس $\begin{bmatrix} r & m-1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ یک ماتریس همانی باشد حاصل $m+r$ برابر با .....است .	

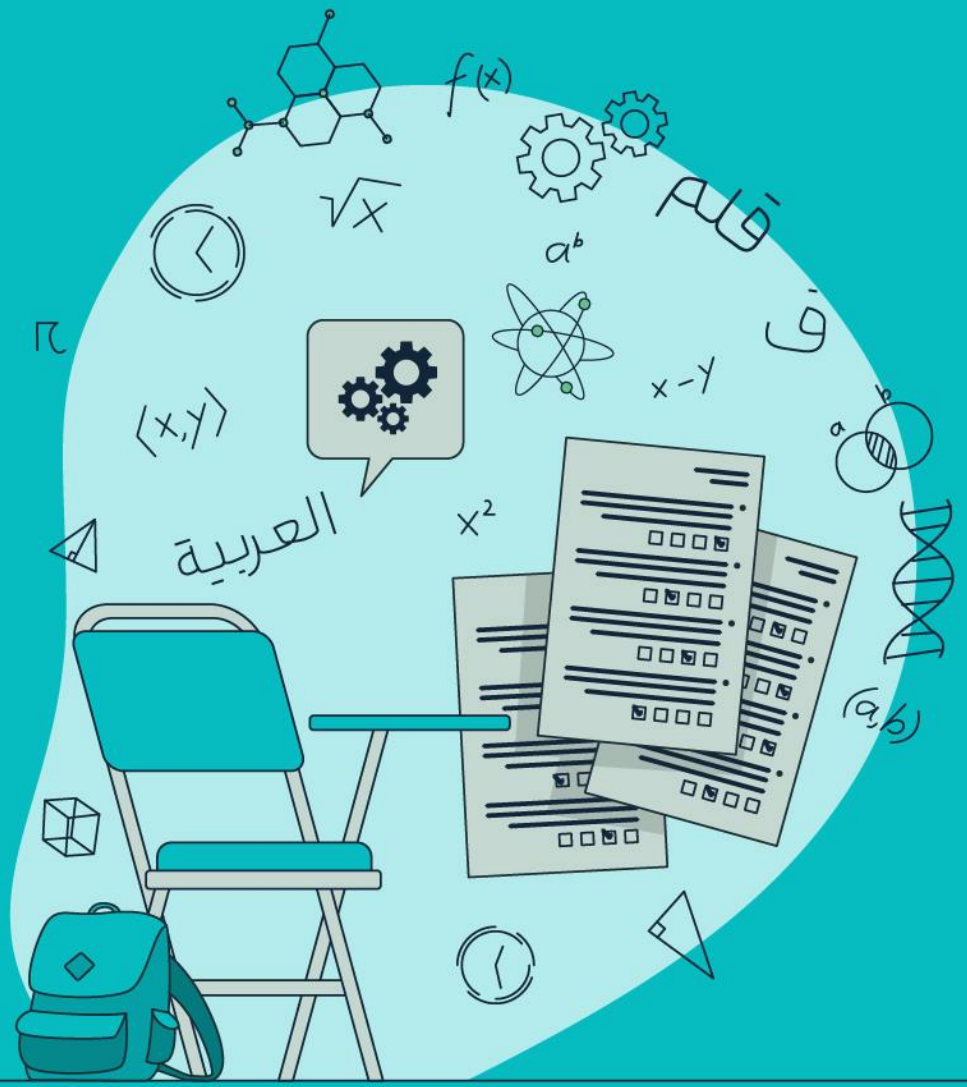
مرکز سنجش

سؤالات امتحان نهایی درس: **هندسه ۳**	مدت امتحان: **۱۳۵ دقیقه**	تاریخ امتحان: **۱۴۰۲/۰۳/۰۷**	ساعت شروع: **۸ صبح**
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	رشته: **ریاضی- فیزیک**	نام و نام خانوادگی:	تعداد صفحه: ۲
دانش‌آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسرکشور در **نوبت خرداد** ماه سال **۱۴۰۲**		مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش http://aee.medu.gov.ir	

ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد)	نمره
	استفاده از ماشین حساب ساده(دارای چهار عمل اصلی و رادیکال) مجاز است .	
	سوالات فصل اول	
۱	ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۵ & ۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}x+۱ & y+۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید، اگر $A+B=\begin{bmatrix}۵ & ۴\\ ۸ & ۳\end{bmatrix}$ باشد، آنگاه مقادیر x و y را به دست آورید.	۰/۵

مرجع دانلود

نهایی
بندی
جمع
پیشرفت، یعنی موفقیت



نهایی بندی جمع

هندسه دوازدهم

ضرب ماتریس‌ها، ویژگی‌ها و نکات آن

اپیزود ۲ : ضرب ماتریسها، ویژگی ها و نکات آن

➢ **شرط ضرب‌پذیری دو ماتریس در هم :**

برای دو ماتریس A, B حاصلضرب $A \times B$ زمانی قابل تعریف است که تعداد ستونهای ماتریس A با تعـداد سطرهای ماتریس B برابر باشد :

$$A_{m\times n} \times B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

واضح است که ماتریس حاصلضرب دارای تعداد سطرهای ماتریس A و تعداد ستون‌های ماتریس B است.

مثلاً برای دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\\ ۵ & ۶\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۸ & ۹\\ ۱۰ & ۱۱\end{bmatrix}$ حاصلضرب $A_{۳\times۲}\times B_{۲\times۲}$ قابل تعریف است اما حاصلضرب $B_{۲\times۲}\times A_{۳\times۲}$ تعریف نمی‌شود و داریم:

$$A_{۳\times۲}\times B_{۲\times۲}=C_{۳\times۲}$$

ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی :

هر درایهٔ ماتریس سطری در درایهٔ نظیرش در ماتریس ستونی ضرب شده و حاصلضرب‌ها را با هـم جمـع می‌کنیم تا ماتریس ۱×۱ (عددی حقیقی) حاصل شود.

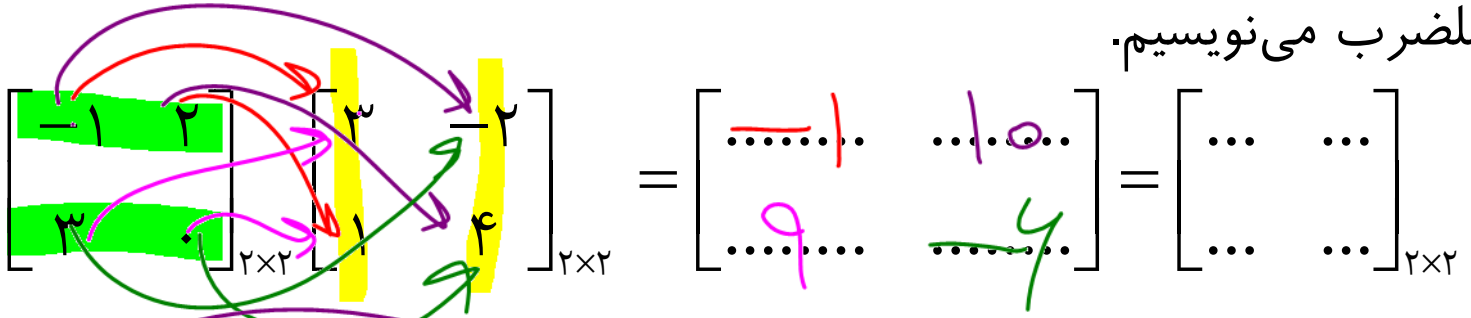
$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

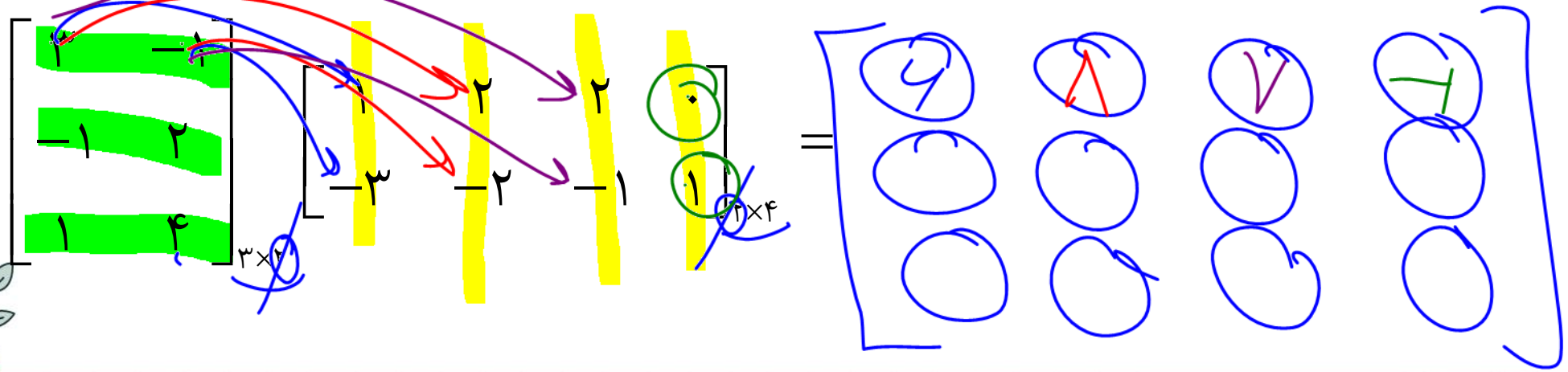
$$\begin{bmatrix} -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \end{bmatrix} = 18$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = -4 - 12 + 35 = 19$$

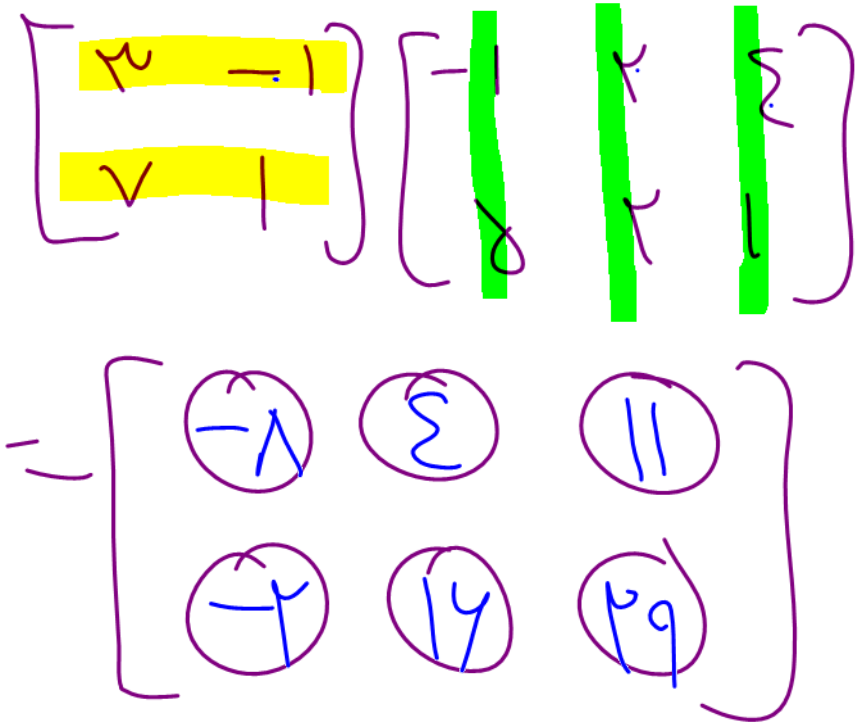
ضرب ماتریس در ماتریس :

اگر ماتریس $A \times B$ قابل تعریف باشد آنگاه برای محاسبهٔ آن، به روشی که قبلاً شرح داده شد هر یـک از سطرهای ماتریس A را در هر یک از ستون‌های ماتریس B ضرب کرده و عـدد حقیقـی بدسـت آمـده را در جایگاه سطری و ستونی ماتریس حاصلضرب می‌نویسیم.





مسئله : برای ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 7 & 1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 4\\ 5 & 2 & 1\end{bmatrix}$ چه حاصلضربی قابل تعریف است؟ آن را حساب کنید.



مسئله : جواب‌های معادلهٔ $\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ را بیابید.

1×2 $\quad 2\times 2$

$\begin{bmatrix} x+2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$

$-x^2+2x+3=0 \longrightarrow \cdots$

خواص عمل ضرب ماتریس‌ها :

۱) اگر A و B دو ماتریس مربعی باشند، آنگاه هر دو حاصلضرب $A\times B$ و $B\times A$ برای آنها قابل تعریف است.

هم مرتبه

$$A_{n\times n}\times B_{n\times n}=C_{n\times n}$$

۲) در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابجایی ندارد.

$$A\times B\neq B\times A$$

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}\quad A\times B=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & -۴\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dots & \dots\\ \dots & \dots\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}-۱ & -۴\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}\quad B\times A=\begin{bmatrix}-۱ & -۴\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dots & \dots\\ \dots & \dots\end{bmatrix}$$

۳) ماتریس همانی (I) عضو خنثای عمل ضرب ماتریس‌هاست.

$$A \times I = I \times A = A$$

مثال : $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow AI = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$

۴) ضرب ماتریس‌ها در جمع و تفریق آنها خاصیت توزیع‌پذیری (پخشی) دارد.

$$A \times (B \pm C) = A \times B \pm A \times C$$

۵) ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد.

$$A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$$

۶) توان در ماتریس های مربعی، از ضرب هر ماتریس در خودش حاصل می‌شود.

$$A^{۲}=A\times A \quad ,A^{۳}=A^{۲}\times A \quad ,A^{۴}=A^{۳}\times A \quad ,\ldots,A^{n}=A^{n-۱}\times A$$

$$A^{۴}=(A^{۲})^{۲}=A^{۲}\times A^{۲}$$

مسئله : دو ماتریس ۲×۲ مثال بزنید که هیچکدام صفر نباشند اما حاصلضرب آنها صفر شود.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\bar{0}$ ✗ $\bar{0}$ =

$A\times B=\bar{0} \Longrightarrow A=\bar{0} \vee B=\bar{0}$

خلاف داریم

مسئله : اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ **ماتریس‌های** A^2, A^3, A^6, A^7 **را حساب کنید.**

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

$$A^3=A^2\times A=I\times A=A$$

$$A^6=A^5\times A=A\times A=A^2=I$$

$$A^4=A^3\times A=A\times A=A^2=I$$

$$A^7=A^6\times A=I\times A=A$$

$$A^5=A^4\times A=I\times A=A$$

مسئله: اگر $A=\begin{bmatrix}۴ & a\\ b & -۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$ مقادیر b,a را طوری بیابید که $A\times B$ ماتریس قطری شود.

$$\begin{bmatrix}۴ & ۹\\ ۶ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳a+۴ & ۲a-۱۰\\ ۶-۳b & -۲b-۲\end{bmatrix}$$

$$۲a-۸=۰ \rightarrow a=۴$$

$$۶-۳b=۰ \rightarrow b=۲$$

مسئله : اگر $\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$ **باشد، مقادیر** x, y **را حساب کنید.**

$$\begin{bmatrix} ۲x-y \\ x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} ۲x-y=۳ \\ x-y=۱ \end{cases}$$

دستگاه ...

مسئله : برای ماتریس $A=\begin{bmatrix} x & y \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ مقادیر x, y را چنان تعیین کنید که داشته باشیم :

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

دو خاصیت از ماتریس‌های قطری :

۱) اگر یک ماتریس قطری در ماتریس هم مرتبه‌اش ضرب شود، هر درایهٔ روی قطر اصلی در درایه‌های ستون یا سطر نظیرش ضرب می‌شود.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r_1a & r_2b & r_3c \\ r_1d & r_2e & r_3f \\ r_1g & r_2h & r_3i \end{bmatrix}$$ ستون

$$\begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r_1a & r_1b & r_1c \\ r_2d & r_2e & r_2f \\ r_3g & r_3h & r_3i \end{bmatrix}$$ سطر

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۴ & ۵ & ۷ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & -۴ & ۳ \\ ۴ & ۴ & ۰ \\ ۴ & ۵ & -۷ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۴ & ۵ & ۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & -۲ & ۶ \\ ۸ & ۴ & ۰ \\ -۴ & -۵ & -۷ \end{bmatrix}$$

۲) اگر یک ماتریس قطری به توان n برسد، درایه‌های روی قطر اصلی‌اش به توان n می‌رسند.

$$\begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} r_1^n & 0 & 0 \\ 0 & r_2^n & 0 \\ 0 & 0 & r_3^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} -8 & \cdots & \cdots \\ \cdots & 27 & \cdots \\ \cdots & \cdots & 64 \end{bmatrix}$$

دو ماتریس تعویض‌پذیر : دو ماتریس هم مرتبه و مربعی A, B را تعویض‌پذیر گوییم هرگاه :

$$A \times B = B \times A$$

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

نکات:

۱) ماتریس **اسکالر** با هر ماتریس هم مرتبه‌اش تعویض‌پذیر است.

۲) ماتریس **همانی** با هر ماتریس هم مرتبه‌اش تعویض‌پذیر است.

$$AI = IA = A$$

۳) اگر دو ماتریس A, B تعویض‌پذیر باشند، آنگاه اتحادهای جبری در آنها برقرار است.

$$(A+B)^{۲} = A^{۲} + ۲AB + B^{۲}$$

$$(A-B)(A+B) = A^{۲} - B^{۲}$$

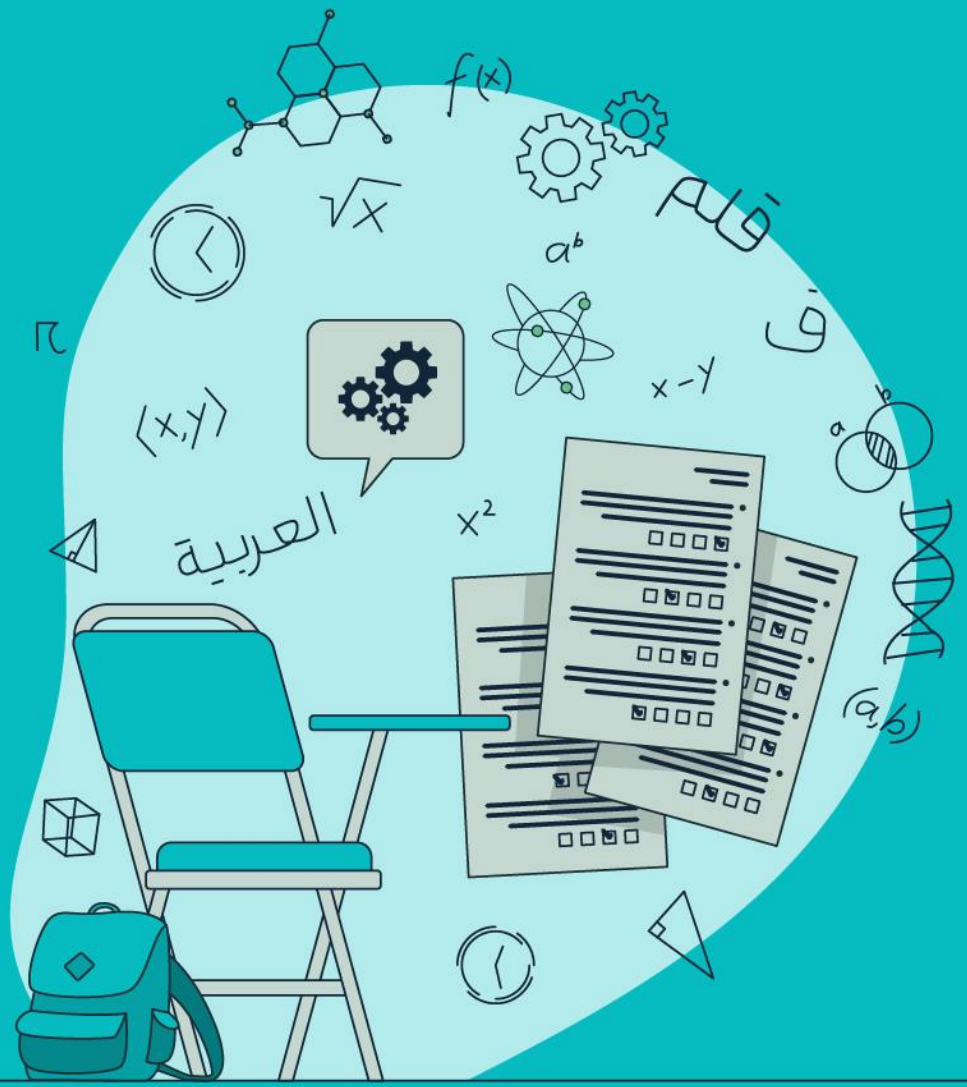
تذکر مهم: دقت کنید که اگر دو ماتریس A, B تعویض‌پذیر نباشند، آنگاه نمی‌توانیم از اتحادهای جبری استفاده کنیم و باید پرانتزها را در هم ضرب کنیم :

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

$$(A-B)(A+B) = A^2 + AB - BA - B^2$$

۴	در معادله ماتریسی $\begin{bmatrix}-۱\\۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۲\\-۳ & ۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۳x\end{bmatrix}=\circ$ مقدار x را بیابید.	۱/۲۵
۳	اگر $A=\begin{bmatrix}۴ & a\\b & -۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\۳ & ۲\end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری به دست آورید که $A\times B$ ماتریس قطری باشد.	۱
۳	دوماتریس $A=\begin{bmatrix}۲ & m-۲ & \circ\\ \circ & ۳ & \circ\\ n+۱ & \circ & ۳\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۲\\ m & n & \circ\\ ۳ & -۱ & ۲\end{bmatrix}$ مفروض‌اند، اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل AB را محاسبه کنید.	۱

نهایی
بندی
جمع
پیشرفت، یعنی موفقیت



نهایی بندی جمع

هندسه دوازدهم

وارون یک ماتریس

اپیزود ۳ : وارون یک ماتریس

وارون یک ماتریس :

برای هر ماتریس مربعی مانند A، وارون A ماتریسی است مانند B بطوریکه؛

$$A \times B = B \times A = I$$

که در اینصورت B را وارون ماتریس A نامیده و با A^{-1} نمایش می‌دهیم.

مثال : ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۲ & -۷ \end{bmatrix}$ **و** $B=\begin{bmatrix} ۷ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ **وارون یکدیگرند، زیرا :**

$$A\times B=\begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۲ & -۷ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۷ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۰ & ۰ \\ ۰ & ۱۰ \end{bmatrix}=I$$

$$B=A^{-1}$$

$$B\times A=\begin{bmatrix} ۷ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۲ & -۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۰ & ۰ \\ ۰ & ۱۰ \end{bmatrix}=I$$

$$A=B^{-1}$$

محاسبهٔ وارون ماتریس ۲×۲ :

اگر وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریس $A^{-1}=\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ باشد داریم :

$$AA^{-1}=I \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax+bz=۱ \\ cx+dz=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{d}{ad-bc} \\ z=\dfrac{-c}{ad-bc} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} ay+bt=۰ \\ cy+dt=۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-b}{ad-bc} \\ t=\dfrac{a}{ad-bc} \end{cases}$$

و از آنجا خواهیم داشت :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

مسئله : وارون ماتریس‌های زیر را بیابید :

$$A=\begin{bmatrix}۳ & ۷\\ ۲ & ۵\end{bmatrix} \rightarrow A^{-1}=\frac{۱}{۱۵-۱۴}\begin{bmatrix}۵ & -۷\\ -۲ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵ & -۷\\ -۲ & ۳\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}-۲ & ۴\\ ۶ & -۸\end{bmatrix} \rightarrow A^{-1}=\frac{۱}{۱۶-۲۴}\begin{bmatrix}-۸ & -۴\\ -۶ & -۲\end{bmatrix}=\frac{-۱}{۸}\begin{bmatrix}-۸ & -۴\\ -۶ & -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & \frac{۱}{۲}\\ \frac{۳}{۴} & \frac{۱}{۴}\end{bmatrix}$$

➢ **قضیهٔ یکتایی وارون** : وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود منحصربفرد است.

اثبات : فرض می‌کنیم ماتریس‌های B, C هر دو وارون A باشند، ثابت می‌کنیم $B = C$.

طبق فرض داریم :

$$AB = BA = I$$
$$AC = CA = I$$

و به کمک فرض داریم :

$$B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$$

پس وارون هر ماتریس مربعی یکتاست.

➢ **خواص وارون یک ماتریس (ماتریس مربعی ۲×۲) :**

۱) $(A\times B)^{-۱}=B^{-۱}\times A^{-۱}$

۲) $(kA)^{-۱}=\frac{۱}{k}A^{-۱}$ $\quad k\in\mathbb{R}$

۳) $(A^{-۱})^{-۱}=A$

اثبات ۱ :

$$(A\times B)\times(B^{-۱}\times A^{-۱})=A\times(B\times B^{-۱})\times A^{-۱}$$

$$=(A\times I)\times A^{-۱}=A\times A^{-۱}=I$$

یعنی $A\times B$ وارون $B^{-۱}\times A^{-۱}$ است.

اثبات ۲ :

$$(kA)\times(\frac{۱}{k}A^{-۱})=(k\times\frac{۱}{k})(A\times A^{-۱})=۱\times I=I$$

یعنی $\frac{۱}{k}A^{-۱}$ وارون (kA) است.

اثبات ۳ :

$$A^{-۱}\times A=I$$

$$(A^{-1})^{-1}=A$$

یعنی A وارون $A^{-۱}$ است یعنی $A=(A^{-۱})^{-۱}$

مسئله : اگر $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ **و** $(BA)^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ **باشد، در اینصورت ماتریس** B **را بیابید.**

$\times A$

$A\times A^{-1}\times B^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

I

$(B^{-1})^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}^{-1}$

$B=\frac{1}{-1-0}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow B$

مسئله : اگر $A=\begin{bmatrix}۴ & ۳\\ ۲ & ۵\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۲ & -۳\\ ۵ & -۱\end{bmatrix}$ حاصل عبارت $۲A^{-۱}-۳B^{-۱}$ را بیابید.

مسئله : اگر $A=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ **باشد مطلوبست محاسبهٔ** $(\frac{3}{5}A)^{-1}$.

$$\frac{3}{2}A^{-1}=\frac{3}{2}\times\frac{1}{5-6}\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}=\cdots$$

مسئله : اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ x & ۳\end{bmatrix}$ و داشته باشیم $A^{۲}+(A^{-۱})^{-۱}=\begin{bmatrix}۵ & -۳\\ ۱۵ & ۱\end{bmatrix}$ مقدار x را بدست آورید.

نکته : مقدار $ad-bc$ را در ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ که حاصلضرب درایه‌های روی قطر اصلی منهای حاصلضرب درایه‌های روی قطر فرعی است، «دترمینان» ماتریس A نامیده و با نماد $|A|$ نمایش می‌دهیم.

$$A=\begin{bmatrix} a & d \\ b & c \end{bmatrix} \quad ; \quad |A| = ad - bc$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = A \rightarrow |A| = 5 - (-3) = 8$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

وارون‌پذیری یک ماتریس مربعی :

ماتریس مربعی A را وارون‌پذیر گوییم هرگاه دترمینان آن مخالف صفر باشد و برعکس.

A وارون پذیر است. $\Leftrightarrow |A| \neq ۰$

بدیهی است اگر $|A| = ۰$ باشد، ماتریس A وارون ندارد.

مسئله : وارون ماتریس زیر را بدست آورید :

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۶ & ۴ \end{bmatrix}$$

$|A| = ۱۲ - ۱۲ = ۰ \longrightarrow$ وجود ندارد A^{-1}

مسئله : اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} -a & ۴ \\ -۹ & a \end{bmatrix}$ **وارون پذیر نباشد، مقدار** a **را حساب کنید.**

$$|A|=۰ \rightarrow -a^{۲}+۳۶=۰ \rightarrow a^{۲}=۳۶ \rightarrow a=\pm ۶$$

مسئله : به ازای چه مقادیری از m ماتریس $\begin{bmatrix} m^2-m & m-1 \\ m & 1 \end{bmatrix}$ وارون پذیر است؟

ϕ هیچ مقدار

$|A| \neq 0 \rightarrow m^2 - m - m(m-1) \neq 0$

$|A| = 0$

$m^2 - m - m^2 + m \neq 0$

$0 \neq 0$

سؤالات امتحان نهایی درس : **هندسه ۳**	رشته : **ریاضی فیزیک**	تاریخ امتحان: **۱۳۹۸/۳/۲**	ساعت شروع: **۸ صبح**
پایه: **دوازدهم** دوره دوم متوسطه	نام و نام خانوادگی :	مدت امتحان : **۱۳۵** دقیقه	تعداد صفحه: **۲**
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسرکشور در **نوبت خرداد** ماه سال **۱۳۹۸**		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد)	نمره
	استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی و رادیکال) مجاز است .	
۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب پرکنید . الف) شرط لازم و کافی برای اینکه ماتریس مربعی A وارون پذیر باشد آن است که دترمینان ماتریس A.....باشد .	۱

سؤالات امتحان نهایی درس : **هندسه ۳**	تعداد صفحه: **۳**	تاریخ امتحان: **۱۳۹۹/۴/۱۴**	ساعت شروع: **۸ صبح**
پایه: **دوازدهم** دوره دوم متوسطه	نام و نام خانوادگی :	مدت امتحان : **۱۳۵** دقیقه	رشته : **ریاضی فیزیک**
دانش آموزان **روزانه** سراسرکشور در **نوبت خرداد** ماه سال **۱۳۹۹**		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد)	نمره

استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی و رادیکال) مجاز است .

الف)بخش الزامی

$|A|=0 \rightarrow -4a-24=0$

دانش آموزان عزیز به سوالات اتا ۱۲ (جهت کسب ۱۶ نمره پاسخ دهید.)

$-4a=24 \rightarrow a=-6$

ردیف		نمره
۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب پرکنید .	۱
	الف) اگر $A=\begin{bmatrix} a & 8 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد، مقدار a برابر .....-۶.....است.	
	ب) اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه های روی قطر اصلی با هم برابر باشند آن را یک ماتریس .....اسکالر.....می‌نامیم .	

مرکز سنجش و پایش

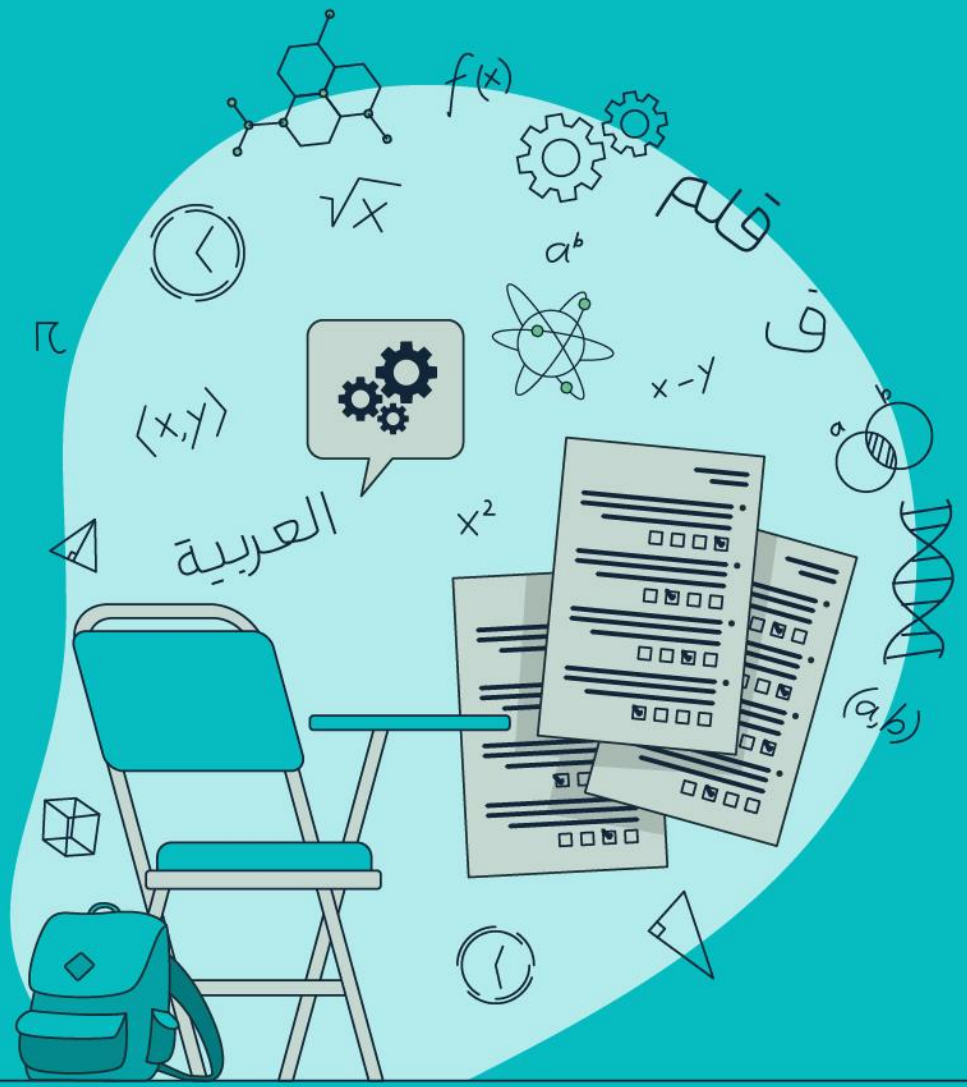
۳	در تساوی ماتریسی $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۵ & ۲\\ ۷ & ۳\end{bmatrix}$ ، ماتریس A را به دست آورید.	۱/۲۵

$B^{-1}X$ B B^{-1}

I

$$A=\frac{۱}{۱۸-۱۴}\begin{bmatrix}۳ & -۲\\ -۷ & ۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

نهایی
بندی
جمع
پیشرفت، یعنی موفقیت



نهایی بندی جمع

هندسه دوازدهم

حل دستگاه دو معادله و دو مجهول با ماتریس وارون

اپیزود ۴ : حل دستگاه دو معادله و دو مجهولی با واتریس وارون

➢ **حل دستگاه معادلات دومجهولی به کمک ماتریس وارون :**

دستگاه روبرو را در نظر بگیرید :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

$B = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$

ماتریس‌های زیر را تعریف می‌کنیم :

۱) ماتریس ضرایب ۲) ماتریس مجهولات ۳) ماتریس مقادیر معلوم(اعداد ثابت)

ماتریس ضرایب $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

ماتریس مجهولات $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

ماتریس اعداد ثابت $B=\begin{bmatrix} C \\ C' \end{bmatrix}$

$AX=B$

$\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

طرفین رابطهٔ $AX=B$ را در A^{-1} ضرب می‌کنیم :

$$A^{-1}(AX)=A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X=A^{-1}B$$

$$\Rightarrow IX=A^{-1}B \Rightarrow X=A^{-1}B$$

$$X=A^{-1}B$$

نتیجه : برای پیدا کردن جواب‌های دستگاه دومعادله و دومجهولی کافی است وارون ماتریس ضرایب را در ماتریس اعداد ثابت ضرب کنیم.

$$\begin{cases} x-3y=-7 \\ 2x+y=7 \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} -7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \times B = \frac{1}{1+6} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 14 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$$

شرط وجود جواب در دستگاه دومعادله و دومجهولی :

شرط اینکه دستگاه دومعادله دومجهولی جواب منحصر بفرد داشته باشد آن است که دترمینان ماتریس ضرایب مخالف صفر باشد.

$$\begin{cases} ۲x - y = ۴ \\ -۴x + ۲ = ۷ \end{cases}$$

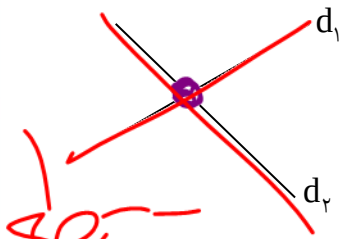
$A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix}$ $\quad |A| = ۴ - ۴ = ۰ \longrightarrow A^{-1}$ وجود ندارد

دستگاه جواب منحصر بفرد ندارد.

بحث در وجود جواب‌های دستگاه دومعادله و دومجهولی :

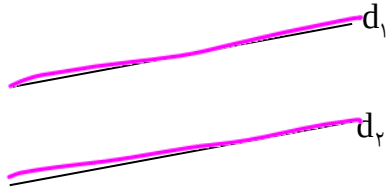
دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ درحقیقت دو معادلهٔ خط را نشان می‌دهد که هدف از حل دستگاه پیدا کردن نقطهٔ برخورد دو خط است.

$|A| \neq 0$



دو خط متقاطع

$|A| = 0$



جواب نداریم

دو خط موازند

$|A| = 0$

دو خط منطبق

بی شمار جواب داریم

ماتریس ضرایب دستگاه را در نظر بگیرید :

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} \; ; \; |A| = ab' - a'b$$

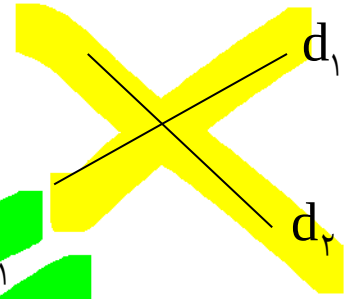
برای داشتن جواب منحصر بفرد :

$$|A| \neq 0 \Rightarrow ab' - a'b \neq 0 \Rightarrow ab' \neq a'b \Rightarrow \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$$

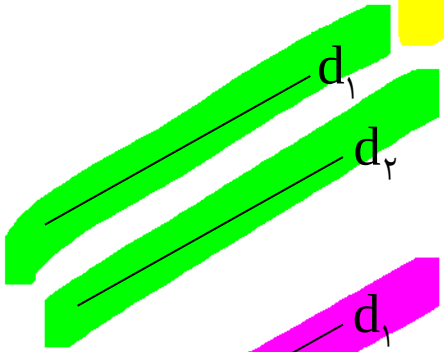
و در نتیجه در حالت کلی داریم :

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

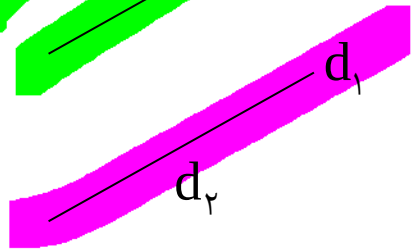
۱) $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ دستگاه جواب منحصر بفرد دارد.



۲) $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ دستگاه جواب ندارد.



۳) $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ دستگاه بیشمار جواب دارد.



مسئله : به ازای چه مقداری از k دستگاه $\begin{cases} kx+3y=4 \\ x-2y=3 \end{cases}$ یک دسته جواب منحصر بفرد دارد؟

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \rightarrow \frac{k}{1} \neq \frac{3}{-2}$$

$$\rightarrow k \neq -\frac{3}{2} \rightarrow k \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$$

مسئله : به ازای کدام مقدار a دستگاه $\begin{cases} ۲x - y = a \\ ax + ۲y = ۳ \end{cases}$ جواب ندارد؟

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

$\frac{۲}{a} = \frac{-۱}{۲} \neq \frac{a}{۳} \longrightarrow \frac{-۱}{۲} = \frac{۱}{-۲} \neq \frac{-۴}{۳}$

$a = -۴$

مسئله : دستگاه زیر را به روش ماتریس وارون حل کنید :

$$\begin{cases} ۳x - ۴y = ۱ \\ -x + ۲y = ۱ \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{۱}{۲} \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۲} \begin{bmatrix} ۶ \\ ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

مسئله : بر روی وجود یا عدم وجود و تعداد جواب‌های دستگاه‌های زیر بحث کنید.

الف) $\begin{cases} x+3y=5 \\ -2x-6y=1 \end{cases}$

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

$\frac{1}{-2} = \frac{3}{-6} \neq \frac{5}{1}$

دستگاه جواب ندارد

ب) $\begin{cases} -2x+3y=2 \\ 4x-6y=-4 \end{cases}$

$\frac{-2}{4} = \frac{3}{-6} = \frac{2}{-4}$

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

مسئله : به ازای چه مقداری از k دستگاه زیر بیشمار جواب دارد؟

$$\begin{cases} 2x - ky = 3 \\ kx - 8y = k + 2 \end{cases}$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

$$\frac{2}{k} = \frac{-k}{-8} = \frac{3}{k+2}$$

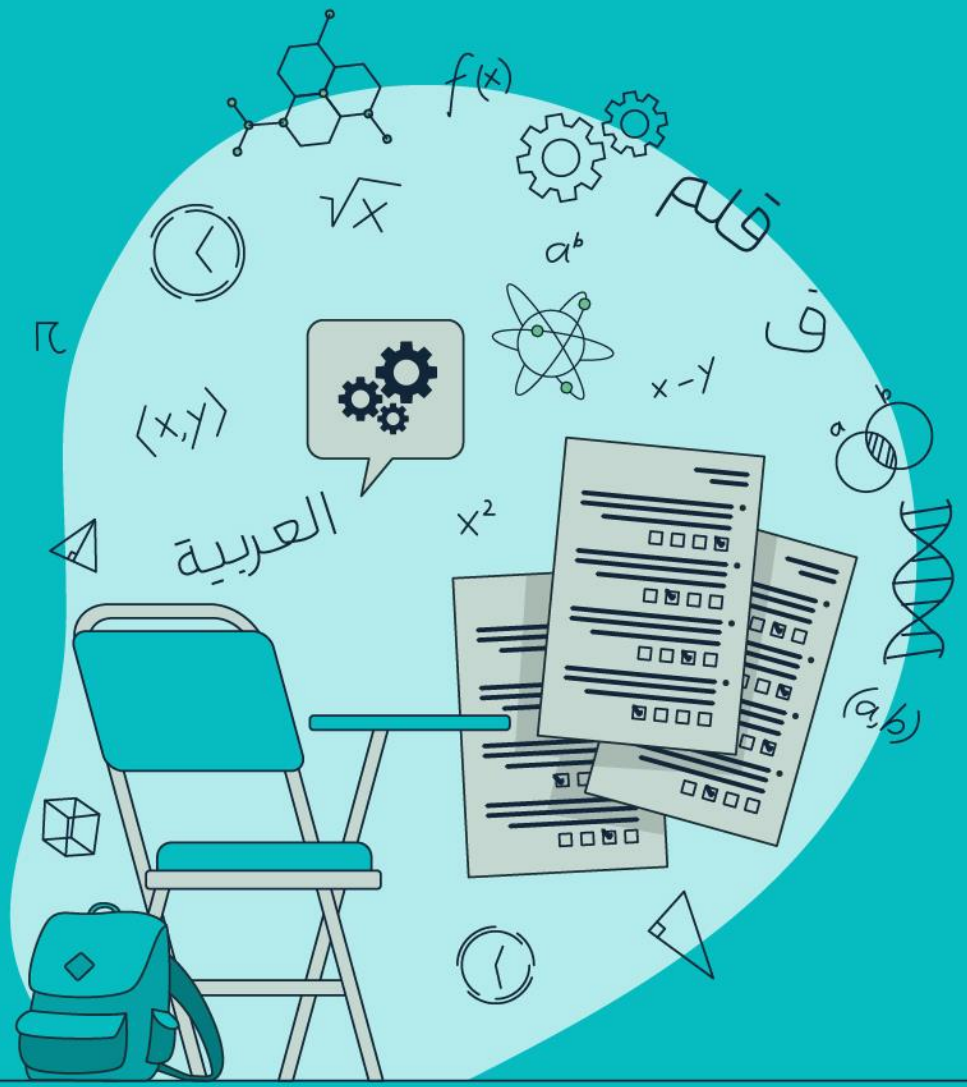
$$-k^2 = -16 \rightarrow k^2 = 16 \rightarrow k = \pm 4$$

$k = -4 : \frac{-1}{2} = \frac{-1}{2} \neq \frac{-3}{2}$ غ ق ق

$k = 4 : \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ✓ ق ق

۵	مقدار m را چنان بیابید که دستگاه $\begin{cases} mx+۳y=-۳ \\ ۴x+(m+۴)y=۲ \end{cases}$ جواب نداشته باشد.	۱/۲۵
۵	جواب دستگاه زیر را در صورت وجود، با استفاده از ماتریس وارون بیابید. $\begin{cases} ۳x-۴y=۷ \\ ۲x+y=۱ \end{cases}$	۱

نهایی
بندی
جمع
پیشرفت، یعنی موفقیت



نهایی بندی جمع

هندسه دوازدهم

دترمینان ماتریس مربعی و خواص آن

اپیزود ۵ : دترمینان ماتریس مربعی و خواص آن

➢ **دترمینان یک ماتریس مربعی :**

به هر ماتریس مربعی می‌توان یک عدد حقیقی نسبت داد که دترمینان آن ماتریس نامیده می‌شود.

دترمینان ماتریس مربعی A را با نماد $\det(A)$ یا $|A|$ نمایش می‌دهند.

➢ **محاسبهٔ دترمینان ماتریس مربعی ۲×۲ :**

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A)=ad-bc$$

مثال : $A=\begin{bmatrix}۱ & ۳\\ ۵ & ۷\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=۷-۱۵=-۸$

مسئله : دترمینان ماتریس زیر را حساب کنید :

$$A=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}۲ & ۳\\ ۱ & ۲\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}۴ & ۲\\ -۱ & ۱\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}۱ & ۵\\ ۲ & ۱۱\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}۲ & -۳\\ ۱ & ۵\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۶\\ -۱ & ۱۳\end{bmatrix}$$

$۴-۳$ $۴+۲$ $-۱۱+۱۵$ $۱۰+۳$

$|A|=۱۳+۶=۱۹$

مسئله : اگر $A=\begin{bmatrix}|A| & ۲\\ ۱ & |A|\end{bmatrix}$ **باشد،** $|A|$ **را بیابید.**

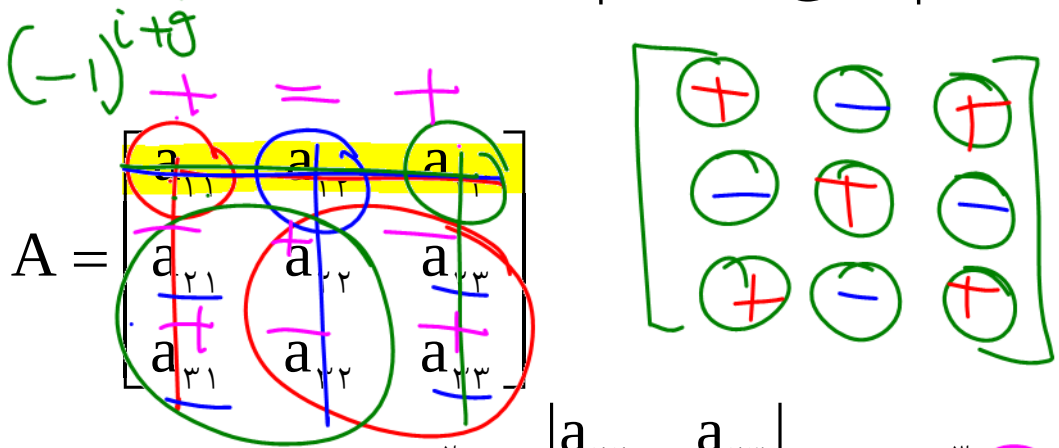
$$|A| = |A|^{۲} - ۲ \xrightarrow{|A|=x} x^{۲} - x - ۲ = ۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} x=-۱ \rightarrow |A|=-۱ \\ x=۲ \rightarrow |A|=۲ \end{cases}$$

➢ محاسبهٔ دترمینان ماتریس مربعی ۳×۳ :

روش اول ← روش بسط دادن نسبت به یک سطر یا ستون

در هر سطر یا ستون، سطر و ستون هر درایه را حذف کرده و دترمینان ماتریس ۲×۲ باقیمانده را حساب کرده و در آن درایه ضرب می‌کنیم و سپس هر سه عدد را با هم جمع می‌کنیم. علامت هر یک از اعداد بصورت $(-۱)^{i+j}$ تعیین می‌شود.



$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$$

سطر اول $|A|=(-۱)^{۲}a_{۱۱}\begin{vmatrix} a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix}+(-۱)^{۳}a_{۱۲}\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{vmatrix}+(-۱)^{۴}a_{۱۳}\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{vmatrix}$

$$|A| = (-1)^{3}\, a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{4}\, a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{5}\, a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$ ستون دوم

مسئله : دترمینان ماتریس‌های زیر را حساب کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ -۲ & ۴ & ۱ \end{bmatrix} = ۱(۱-۱۲) - (-۱)(۲+۶) + ۲(۸+۲)$$

$$-۱۱ + ۸ + ۲۰ = ۱۷$$

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & -۲ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۴ \\ -۳ & ۵ & ۰ \end{bmatrix} = ۳(۱۸+۶) - ۴(۱۰-۶) = ۶۴ - ۱۶ = ۴۸$$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = -4(1-3) = -20$$

➢ همواره بسط دادن نسبت به سطر یا ستونی که تعداد صفر بیشتری دارد ساده‌تر است.

روش دوم ← روش ساروس

دو ستون اول و دوم ماتریس را سمت راست آن نوشته و آنگاه دترمینان ماتریس برابر است با مجموع حاصلضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی و دو قطر موازی آن، منهای مجموع حاصلضرب درایه‌های واقع بر قطر فرعی و دو قطر موازی آن.

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{bmatrix}$$

$$|A| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

مسئله : دترمینان ماتریس زیر را به روش ساروس حساب کنید.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & -۲ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۴ \\ -۳ & ۵ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$(۰+۲۴+۴۵)-(-۱۸+۴۰+۰)$$

$$۶۹-۲۲=۴۷$$

مسئله : اگر داشته باشیم $\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۷ \\ ۲ & -۱ & ۱ \\ x & ۱ & ۲ \end{vmatrix} = A + x \begin{vmatrix} ۲ & ۷ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix}$ **آنگاه مقدار** A **را حساب کنید.**

مسئله : اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & a & -۶ \\ -۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & a \end{bmatrix}$ **وارون پذیر نباشد، مقادیر** a **را حساب کنید.**

$|A|=۰$

$$a(-a-۱)-(-۱)(۶-۰)=۰$$

$$-a^{۲}-a+۶=۰$$

$$a^{۲}+a-۶=۰ \rightarrow (a+۳)(a-۲)=۰$$

$a=-۳$ | $a=۲$

خواص دترمینان یک ماتریس :

۱) دترمینان حاصلضرب دو ماتریس مربعی با حاصلضرب دترمینان آنها برابر است.

$$|AB| = |A||B|$$

۲) دترمینان هر ماتریس مربعی صفر، برابر صفر است.

$$|\bar{O}| = ۰$$

۳) دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با حاصلضرب درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس.

$$A = \begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = abc$$

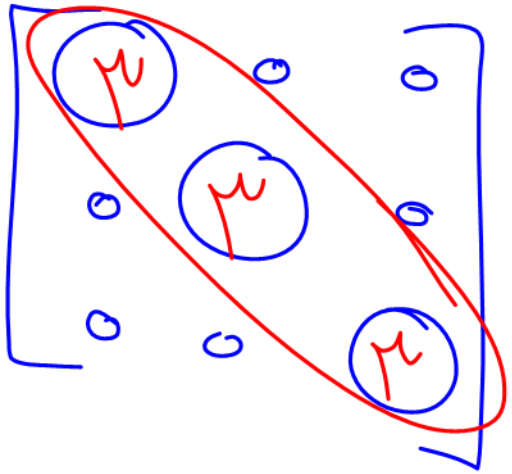
۴) برای خروج ضریب ماتریس از داخل دترمینان، ضریب را به توان مرتبهٔ ماتریس می‌رسانیم.

$$|kA_{۲\times۲}| = k^{۲}|A|$$

$$|kA_{۳\times۳}| = k^{۳}|A|$$

$$|kA_{n\times n}| = k^{n}|A|$$

مسئله : اگر A ماتریس اسکالر مرتبهٔ ۳ بوده و $a_{۱۱} = ۳$ باشد، آنگاه دترمینان A را محاسبه کنید.



$$|A| = ۳^۳ = ۲۷$$

۵) دترمینان ماتریس همانی، برابر یک است.

$$|I_{۲\times۲}| = |I_{۳\times۳}| = ۱$$

۶) برای هر ماتریس مربعی داریم :

$$|A^n| = |A|^n$$

$$|A^۲| = |A|^۲$$

$$|A^۳| = |A|^۳$$

۷) دترمینان وارون ماتریس A با وارون دترمینان آن برابر است :

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

اثبات :

می‌دانیم $AA^{-1} = I \Rightarrow |AA^{-1}| = |I|$

$$\Rightarrow |A||A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

مسئله : اگر A ماتریسی ۲×۲ و $|A|=۳$ باشد حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$|A^{۳}|-۳|A^{-۱}|+۵=$$

$$|A|^{۳}-۳\frac{۱}{|A|}+۵=۳^{۳}-۳\times\frac{۱}{۳}+۵=۲۷-۱+۵=۳۱$$

مسئله : اگر A ماتریسی 3×3 و $|A|=5$ باشد، حاصل $||A|A|$ را بیابید.

$$|5A| = 5^3|A| = 5^4 = 625$$

$$||A|A| = |A|^3|A| = |A|^4$$

مسئله : اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & ۵\end{bmatrix}$ **و** $B=\begin{bmatrix}-۳ & ۱\\ ۵ & -۴\end{bmatrix}$ **باشند حاصل** $|B^{۲}A|$ **را حساب کنید.**

$$|B^{۲}|\times|A| = |B|^{۲}\times|A| =$$

مسئله : اگر $|A|=۲$ و A ماتریس مربعی مرتبه ۳ باشد، در اینصورت دترمینان ماتریس $-۴A^{۳}$ چقدر است؟

$$|-۴A^{۳}| = (-۴)^{۳}|A^{۳}| = -۶۴|A|^{۳} = -۲^{۶}\times ۲^{۳}$$

$$= -۲^{۹} = -۵۱۲$$

مسئله : به ازای چه مقداری از m دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ m & ۵ \end{bmatrix}$ با دترمینان وارونش برابر است؟

$$|A|=|A^{-1}| \rightarrow |A|=\frac{1}{|A|} \rightarrow |A|^{۲}=۱ \rightarrow |A|=\pm ۱$$

نکته

$$۵+۲m=\pm ۱$$

$m=\dots$

$m=\dots$

۳	اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۳ & ۴\\ ۰ & ۲ & ۳\\ ۰ & ۱ & ۲\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $\lvert A^{۳}\rvert$ را محاسبه کنید.	۱
۳	دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲ & m-۲\\ n+۱ & ۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۲\\ m & ۰ & n\\ ۳ & -۱ & ۲\end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل $\lvert A\rvert+\lvert B\rvert$ را محاسبه کنید.	۱/۷۵
۴	الف) اگر $A=\begin{bmatrix}\lvert A\rvert & ۸\\ ۳ & ۵\end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $\lvert A\rvert$ را بیابید. ب) ماتریس وارون A را حساب کنید.	۱/۲۵

۴	اگر $\begin{bmatrix} \lvert A\rvert & -۴ \\ ۱ & \lvert A\rvert \end{bmatrix} = ۲A$ باشد ، در این صورت حاصل $\lvert A^{-۱} \rvert$ را بیابید.	۱/۵

$$\lvert ۲A\rvert = \lvert A\rvert^{۲} + ۴$$

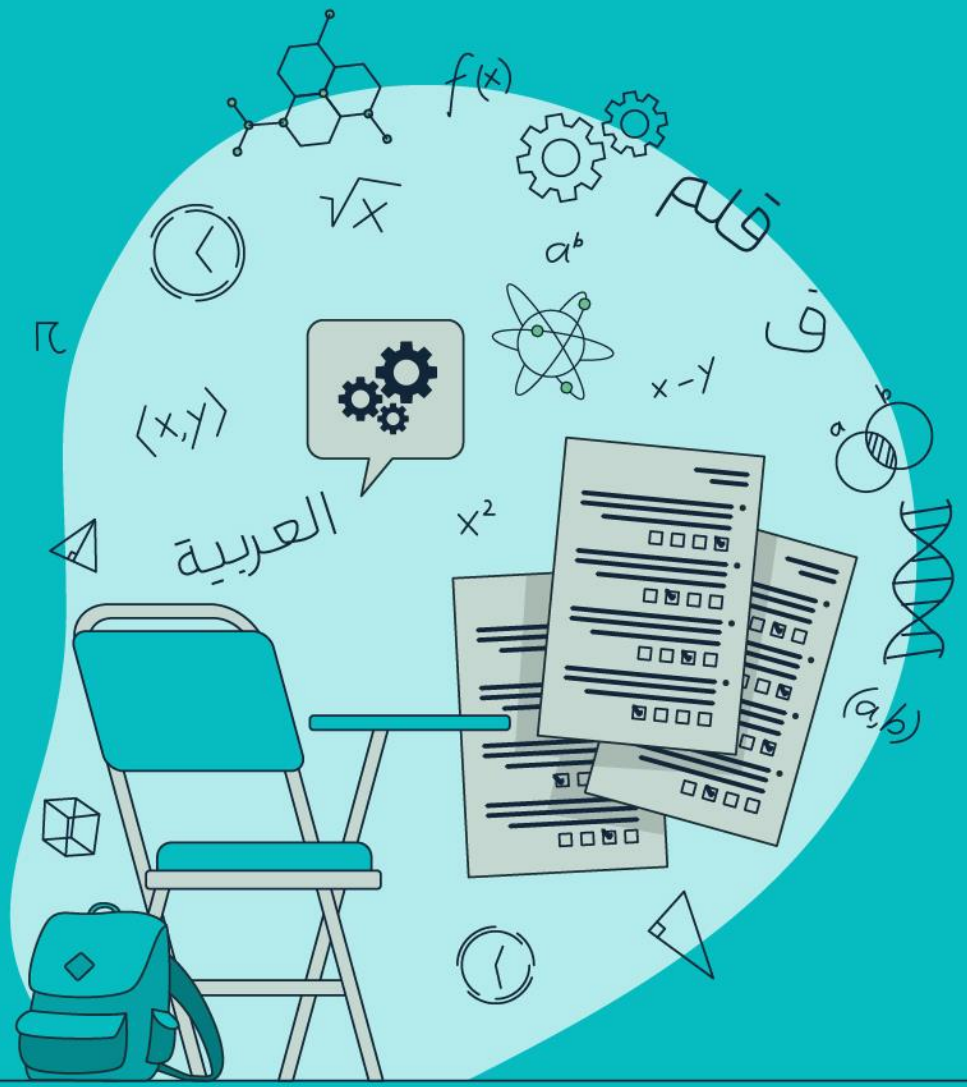
$$۴\lvert A\rvert = \lvert A\rvert^{۲} + ۴$$

$$\lvert A\rvert^{۲} - ۴\lvert A\rvert + ۴ = ۰$$

$$(\lvert A\rvert - ۲)^{۲} = ۰ \rightarrow \lvert A\rvert = ۲$$

$$\frac{۱}{۲}$$

نهایی
بندی
جمع
پیشرفت، یعنی موفقیت



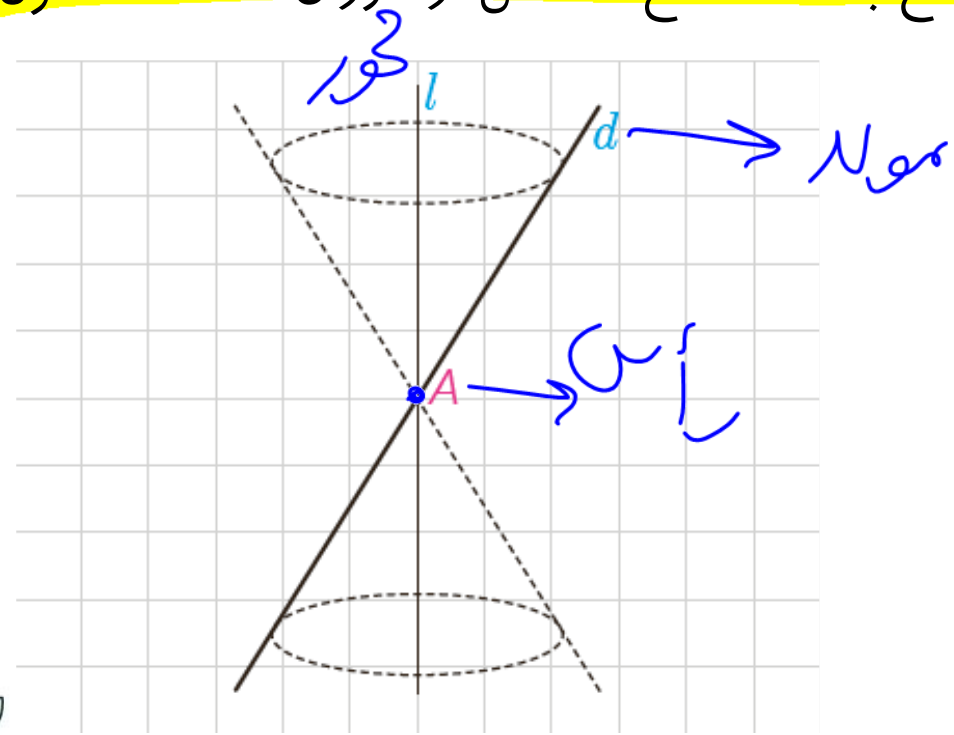
نهایی بندی جمع

هندسه دوازدهم

مقاطع مخروطی و مکان هندسی

اپیزود ۶ : مقاطع مخروطی و مکان هندسی

رویه مخروطی : فرض کنید دو خط d, ℓ در نقطهٔ A متقاطع باشند. سطح حاصل از دوران خط d حول خط ℓ را یک رویهٔ مخروطی (سطح مخروطی) می‌نامیم.



A : رأس رویهٔ مخروطی

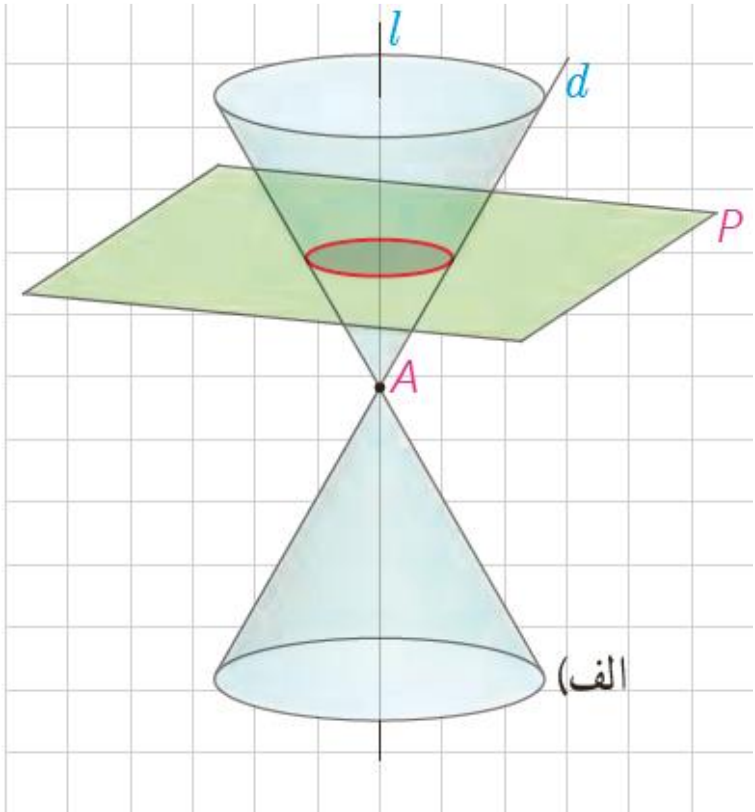
ℓ : محور رویهٔ مخروطی

d : مولّد رویهٔ مخروطی

➢ **فصل مشترک یک صفحه و یک سطح مخروطی** : اگـر صـفحهٔ P رویـهٔ مخروطـی را قطـع کنـد یکـی از شکل‌های زیر ممکن است از فصل مشترک آنها حاصل شود :

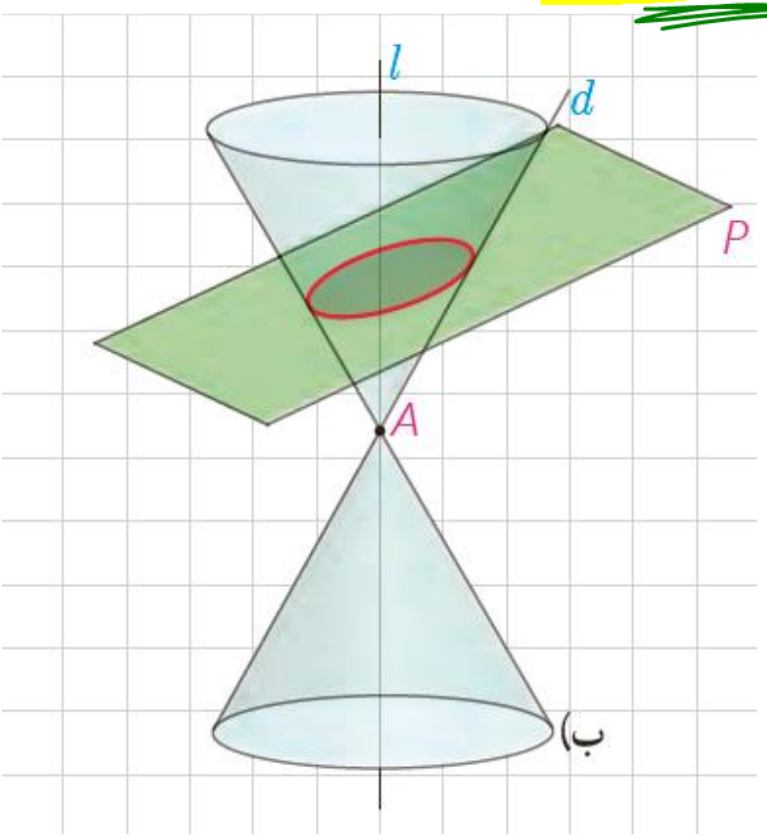
نقطه – خط – دایره – بیضی – سهمی – هذلولی

۱) اگر صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس رویه عبور نکند، فصل مشترک آنها یک دایره است :

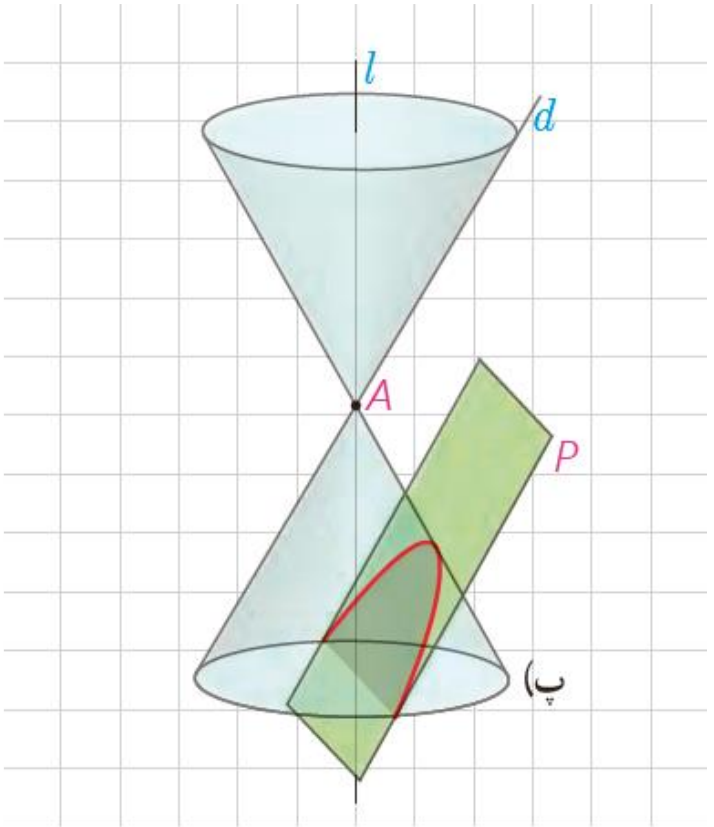


۲) اگر صفحهٔ P بر محور رویهٔ مخروطی عمود بوده و از رأس رویه نیز بگذرد، فصل مشترک آنها یک نقطه است که همان رأس رویه است.

۳) اگر صفحهٔ P بر محور رویه عمود نباشد و با مولد رویه نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمـهٔ مخـروط را قطع کند، فصل مشترک آنها یک بیضی است.



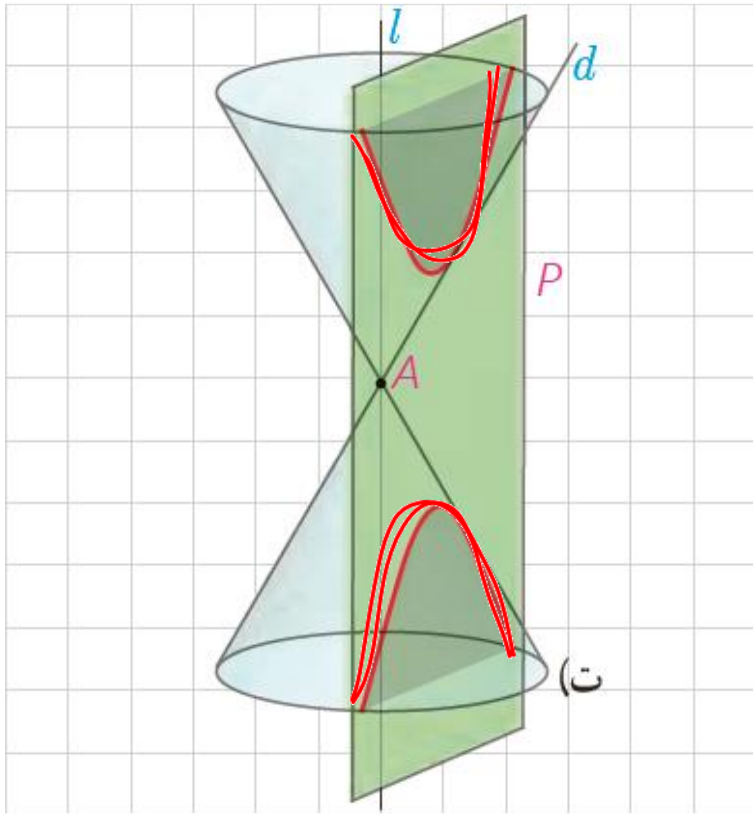
۴) اگر صفحهٔ P با مولد رویه موازی باشد و از رأس رویه عبور نکند، فصل مشترک یک سهمی است.



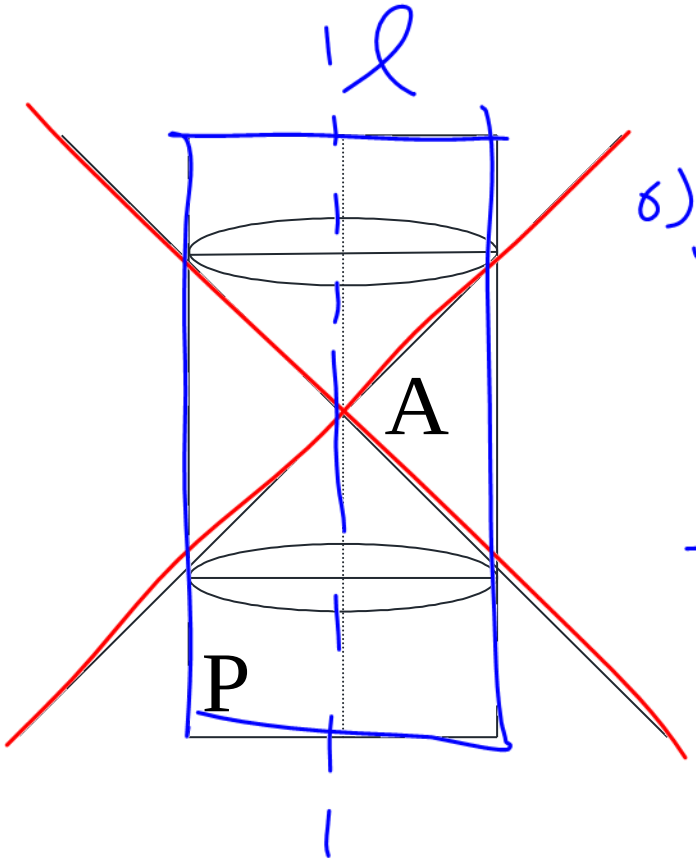
۵) اگر صفحهٔ P با مولد رویه موازی بوده و از رأس رویه نیز عبور کند، فصل مشترک آنها یک خط است که همان مولد رویه است.

یکی از یال‌ها

۶) اگر صفحهٔ P هر دو تکهٔ بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند، فصل مشترک آنها یک هذلولی خواهد بود.



۷) اگر صفحهٔ P شامل محور سطح مخروطی آنها بُرش دهد، فصل مشترک حاصل دو خط متقاطع است.



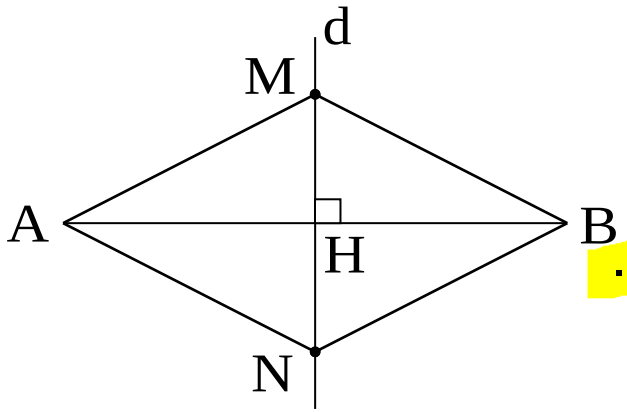
صفحه‌ای که دو مخروط را قطع کرده و از رأس عبور کند.

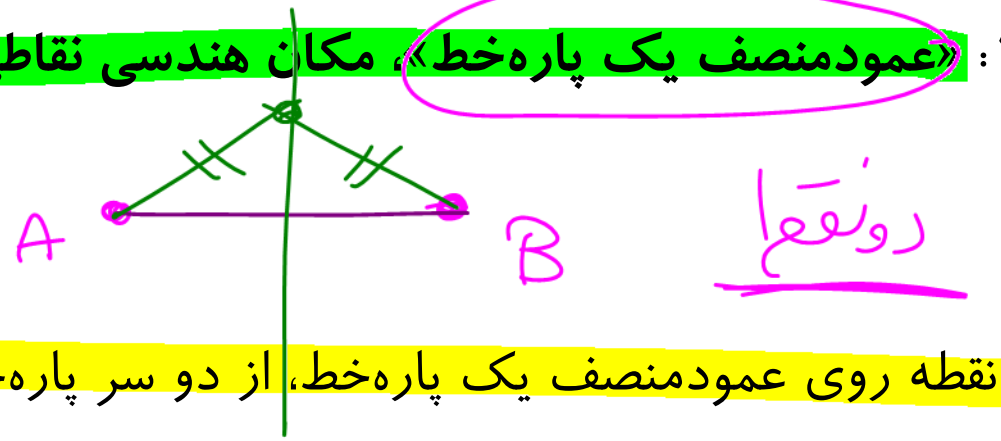
دو خط متقاطع

- **مکان هندسی** : مجموعه نقاطی را گویند که همگی دارای یک ویژگی مشترک هستند و همچنین هر نقطه‌ای که دارای ویژگی مورد نظر باشد، عضو این مجموعه است.

- هر مکان هندسی بیانگر این قضیه دوشرطی است که معمولاً با اصطلاح «اگر و فقط اگر» بیان می‌شود.

مثال ۱: «عمودمنصف یک پاره‌خط»، مکان هندسی نقاطی است که از دو سر پاره‌خط به یک فاصله‌اند.





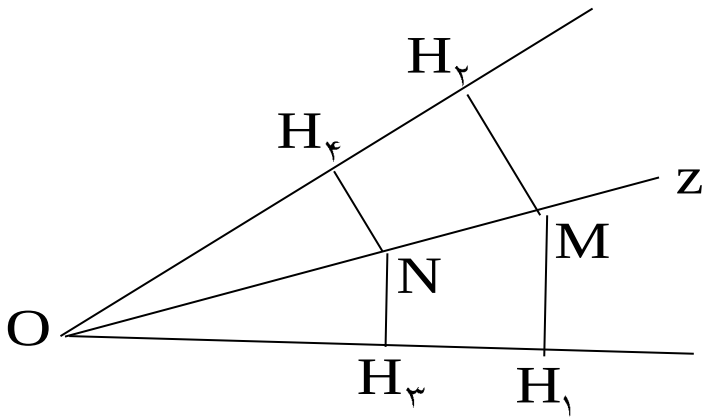
۱) هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.

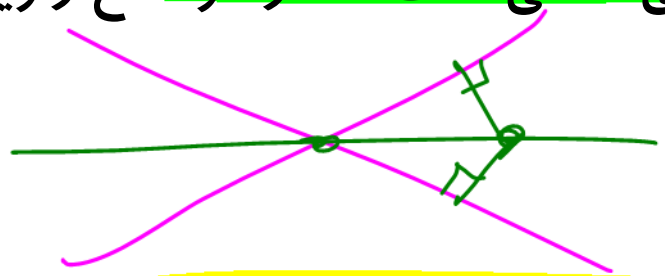
۲) هر نقطه‌ای که از دو سر پاره‌خط به یک فاصله باشد روی عمودمنصف پاره‌خط قرار دارد

➢ **بیان مکان هندسی عمودمنصف به صورت دوشرطی :** یک نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط است اگر و فقط اگر از دو سر پاره‌خط به یک فاصله باشد.

$M \in d \text{ , } AB$ عمودمنصف $d \Leftrightarrow MA = MB$

مثال ۲: **«نیمساز یک زاویه»، مکان هندسی نقاطی است که از دو ضلع زاویه به یک فاصله‌اند.**





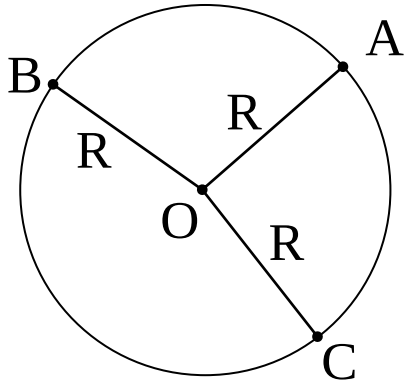
۱) هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

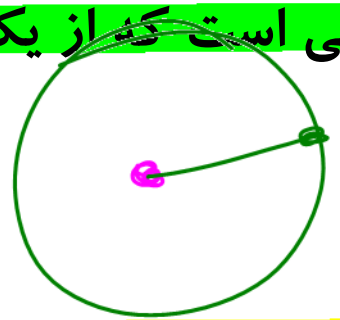
۲) هر نقطه‌ای که از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز زاویه قرار دارد.

➢ **بیان مکان هندسی نیمساز بصورت دوشرطی :** یک نقطه روی نیمساز زاویه است اگر و فقط اگر از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد.

$$M \in Oz \ , \ x\hat{o}y \text{ نیمساز } Oz \Rightarrow MH_۱ = MH_۲$$

مثال ۳: «دایره»، مکان هندسی نقاطی است که از یک نقطهٔ ثابت در صفحه، به فاصلهٔ ثابت قرار دارند.





یک نقطه!

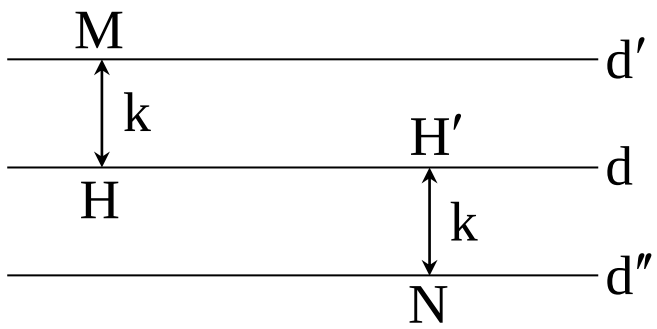
۱) هر نقطه روی دایره از مرکز آن به فاصلهٔ ثابت شعاع دایره قرار دارد.

۲) هر نقطه که از مرکز دایره به فاصلهٔ ثابت شعاع دایره باشد، روی دایره قرار دارد.

➢ **بیان مکان هندسی دایره بصورت دوشرطی :** نقطهٔ A روی دایرهٔ $C(O,R)$ است اگر و فقط اگر فاصلهٔ A از مرکز O برابر شعاع R باشد.

$$A \in C(O,R) \Leftrightarrow OA = R$$

مثال ۴: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط مفروض d در صفحه به فاصلهٔ ثابت k قرار داشته باشند، دو خط موازی با خط d و در طرفین d و به فاصلهٔ k از d است.



۱) هر نقطه روی یکی از دو خط d' یا d'' از خط d به فاصلهٔ k قرار دارد.

۲) هر نقطه که از خط d به فاصلهٔ ثابت k باشد، روی یکی از دو خط d' یا d'' است.

➢ **بیان مکان هندسی دو خط موازی به صورت دوشرطی :** یک نقطه در صفحه از خط مفروض d به فاصلهٔ k است اگر و فقط اگر روی یکی از دو خط d' و d'' که موازی d هستند و به فاصلهٔ k از d قرار دارند واقع باشد.

$$M \in \begin{matrix} d' \\ d'' \end{matrix} \Leftrightarrow MH = k$$

جمع‌بندی ۴ مثال ارائه شده و ارائهٔ ۴ مکان هندسی مهم :

۱) مکان هندسی نقاطی که از دو نقطهٔ ثابت A و B در صفحه به فاصلهٔ یکسان باشند، عمودمنصف AB است.

۲) مکان هندسی نقاطی که از دو ضلع زاویهٔ xoy به فاصلهٔ یکسان قرار دارند، نیمساز آن زاویه است.

۳) مکان هندسی نقاطی که از نقطهٔ ثابت O به فاصلهٔ ثابت R قرار دارند، دایره‌ای است به مرکز O و شعاع R.

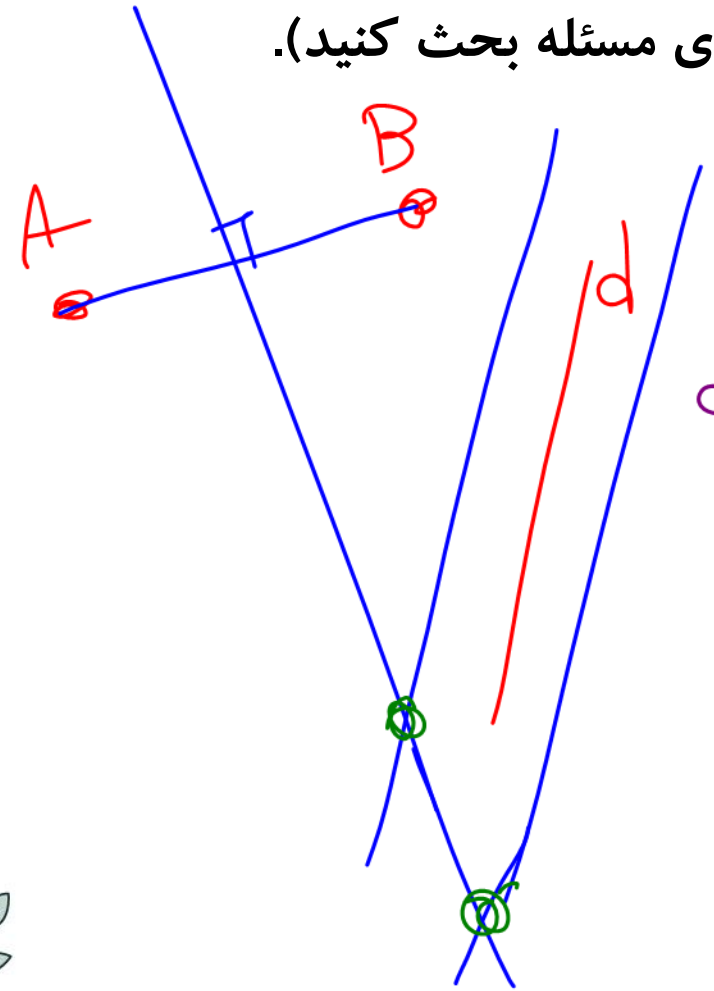
۴) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط مفروض d به فاصلهٔ ثابت k قرار دارند، دو خط موازی d و به فاصلهٔ k از آن در طرفین آن است.

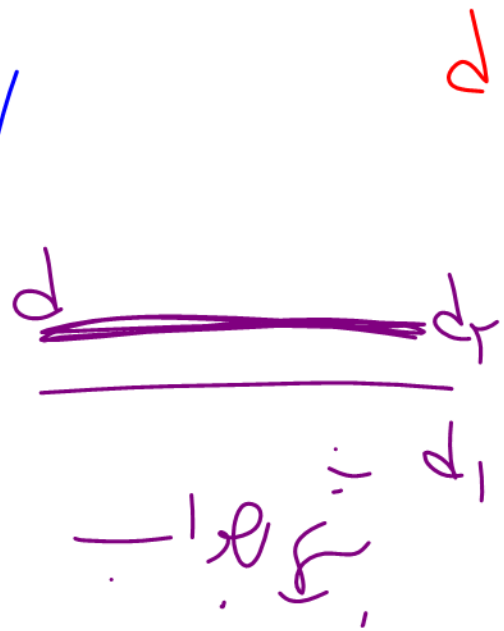
➢ **کاربرد مکان هندسی** : مهم‌ترین کاربرد مکان‌های هندسی، ترسیم‌های هندسی و یافتن نقاطی است که دارای ویژگی مشخص و مشترکی هستند.

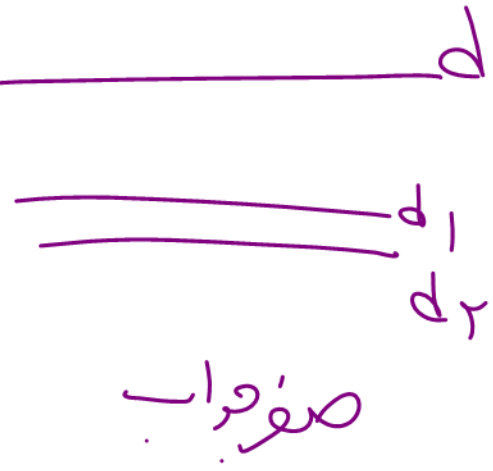
اگر S_1 و S_2 به ترتیب مکان هندسی نقاطی با ویژگی P_1 و P_2 باشند، $S_1 \cap S_2$ مجموعه نقاطی هستند که هر دو ویژگی P_1 و P_2 را دارند.

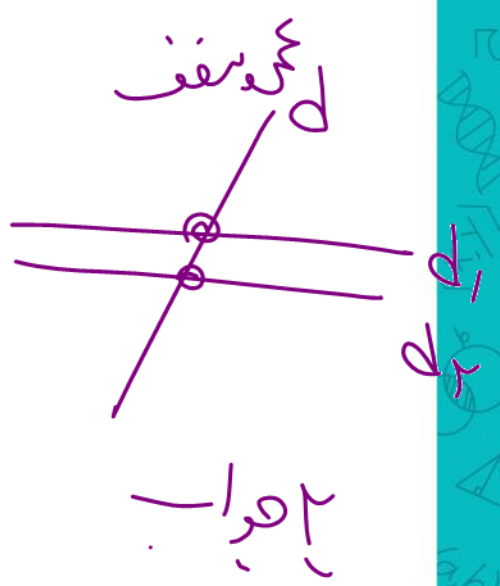
➢ **پیدا کردن نقاط با ویژگی مشترک (نقطهٔ مجهول)** : برای یافتن نقاطی که هر دو ویژگی P_1 و P_2 از مکان‌های هندسی S_1 و S_2 را دارند کافی است نمودارهای S_1 و S_2 را رسم کرده و نقاط تلاقی (برخورد) آنها را به دست آورد.

مثال : دو نقطهٔ A و B و خط d که شامل هیچیک نیست در صفحه مفروضند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد (در تعداد جواب‌های مسئله بحث کنید).

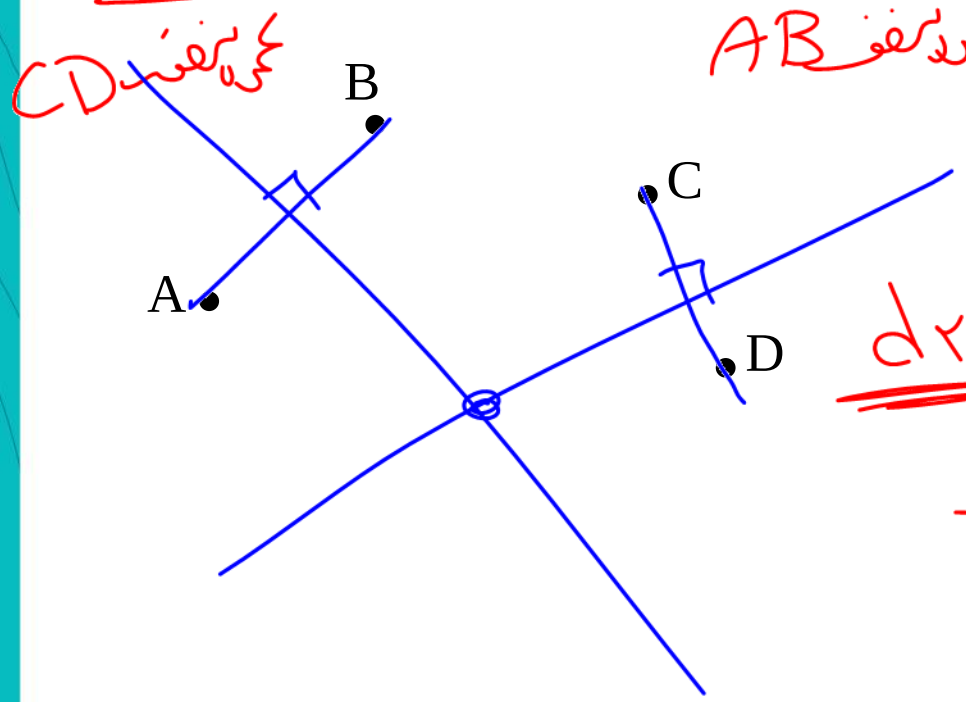


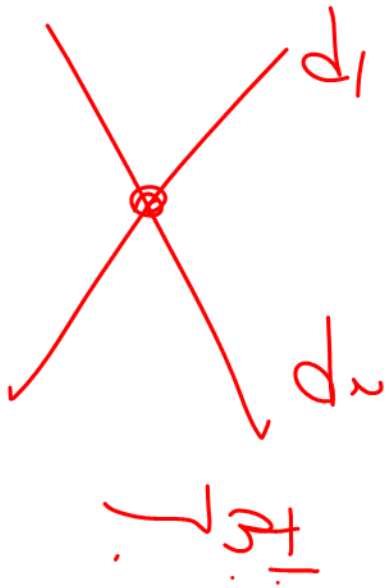




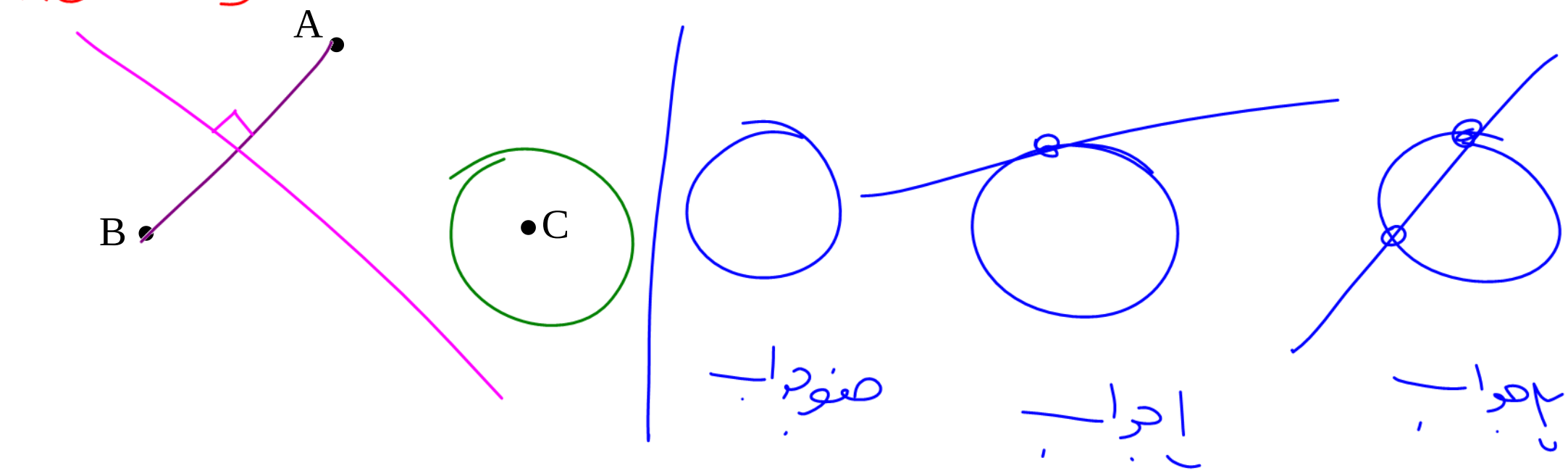


مسئلهٔ: نقاط D, C, B, A در صفحه مفروضند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد (روی جواب‌های مسئله بحث کنید).

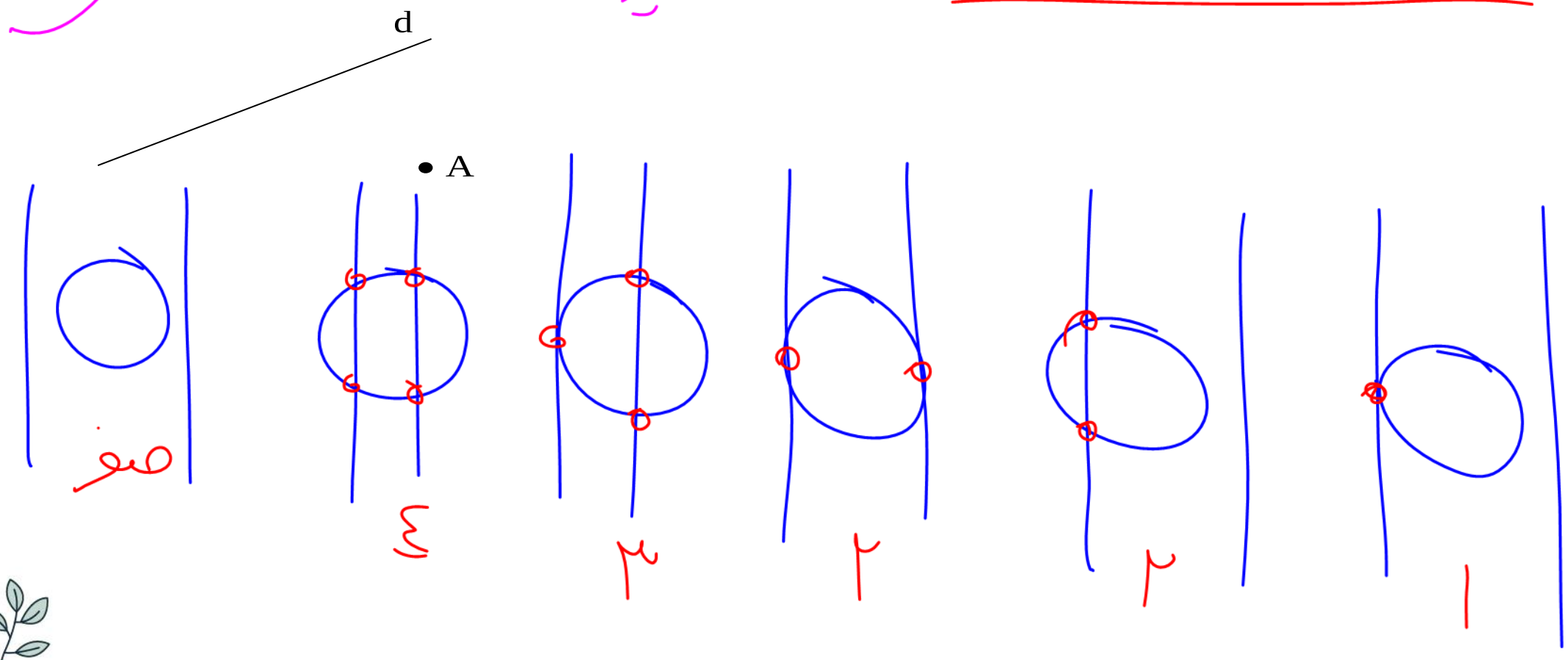




مسئله: نقاط C, B, A در صفحه مفروضند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصلهٔ k باشد (روی جواب‌های مسئله بحث کنید).



مسئله: نقطهٔ A و خط d در صفحه مفروضند. نقطه‌ای بیابید که از A به فاصلهٔ k و از خط d به فاصلهٔ k' باشد (روی تعداد جواب‌های مسئله بحث کنید).

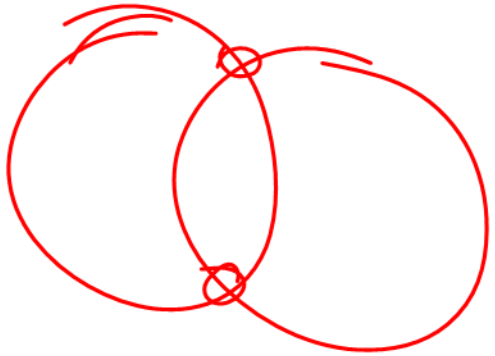


مسئله : خط d و نقاط A, B در صفحه مفروضند. مکان هندسی نقاطی را تعیین کنید که از خط d به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر بوده و از نقاط A, B به فاصلهٔ یکسان باشند. (روی تعداد جواب‌های مسئله بحث کنید)

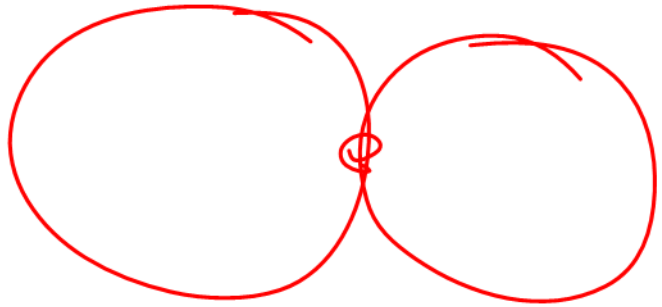
مسئله : نقاط B, A در صفحه مفروضند. مکان هندسی نقاطی را تعیین کنید که از A به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر بوده و از B به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر باشند. (روی تعداد جواب‌های مسئله بحث کنید)

دایره به شعاع ۲

دایره به شعاع ۴



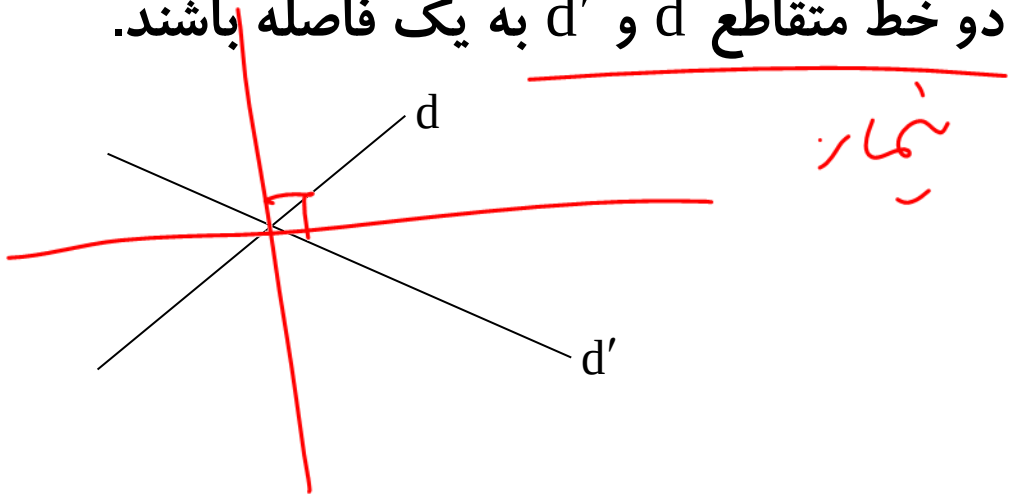
۲ جواب



۱ جواب

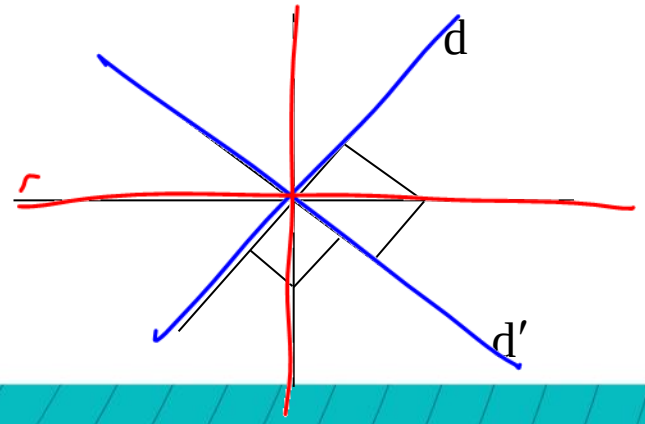
بدون جواب

مسئله: مکان هندسی نقاطی از صفحه را مشخص کنید که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله باشند.

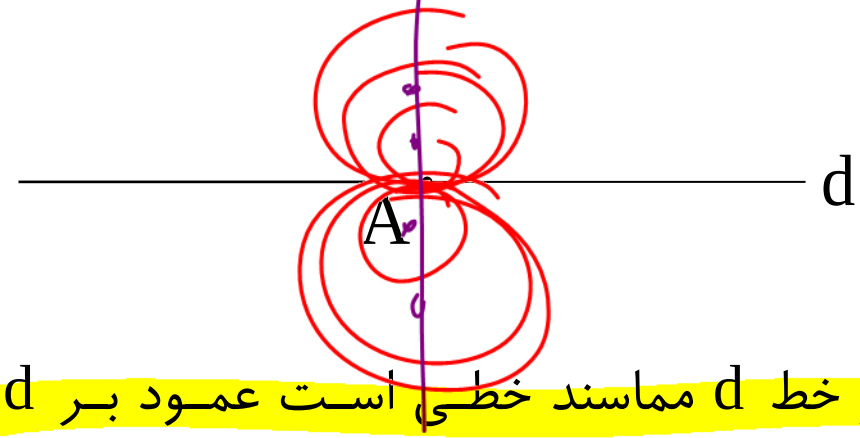


نیمساز

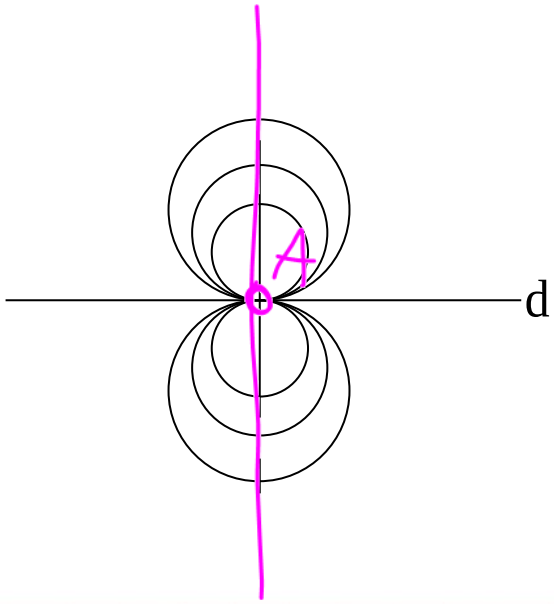
➢ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله باشند، دو خط عمود بر هم است که همان نیمسازهای زوایای بین دو خط است و از محل تلاقی دو خط می‌گذرند.



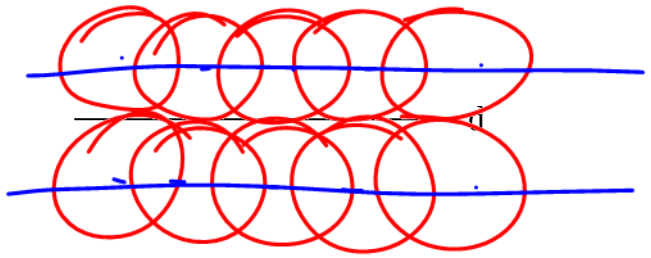
مسئله: مکان هندسی مراکز همهٔ دایره‌هایی در صفحه را تعیین کنید که بر خط مفروض d در نقطـهٔ ثابـت A مماسند.



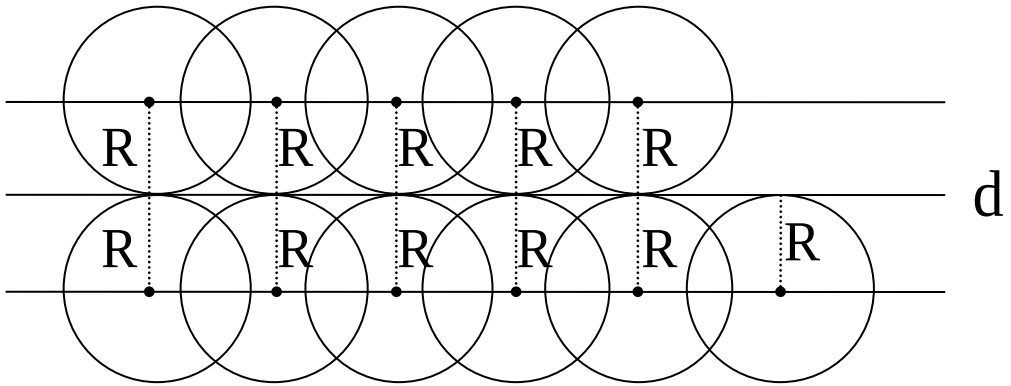
➢ مکان هندسی مراکز تمام دوایری که در نقطهٔ A روی خط d بر خط d مماسند خطی است عمـود بـر d در نقطهٔ A.



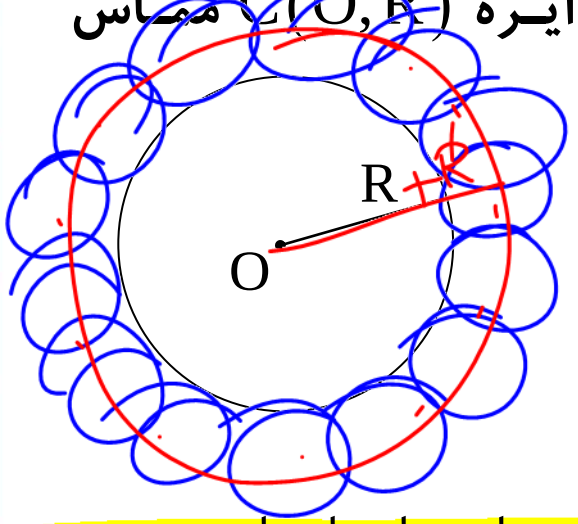
مسئله: مکان هندسی مراکز همهٔ دوایری با شعاع ثابت R را که بر خط d در صفحه مماسند تعیین کنید.



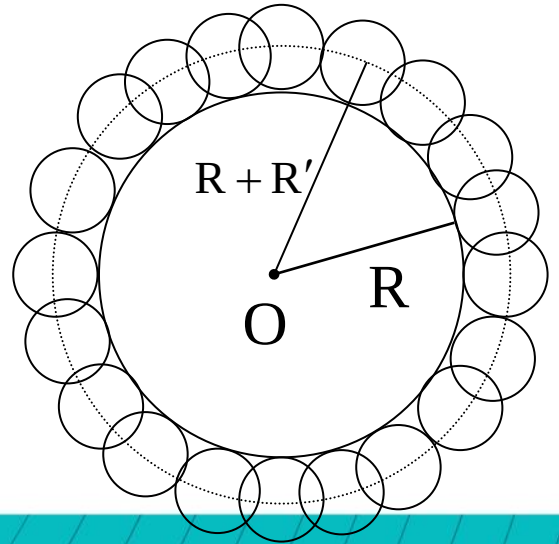
➢ مکان هندسی مراکز همهٔ دایره‌هایی که با شعاع ثابت R بر خط d در صفحه مماسند، دو خط به موازات d و در طرفین d و به فاصلهٔ R از خط d است.



مسئله: مکان هندسی مراکز دوایری را تعیین کنید که با شعاع ثابت R' بر دایرهٔ $C(O,R)$ مماس خارجی‌اند.

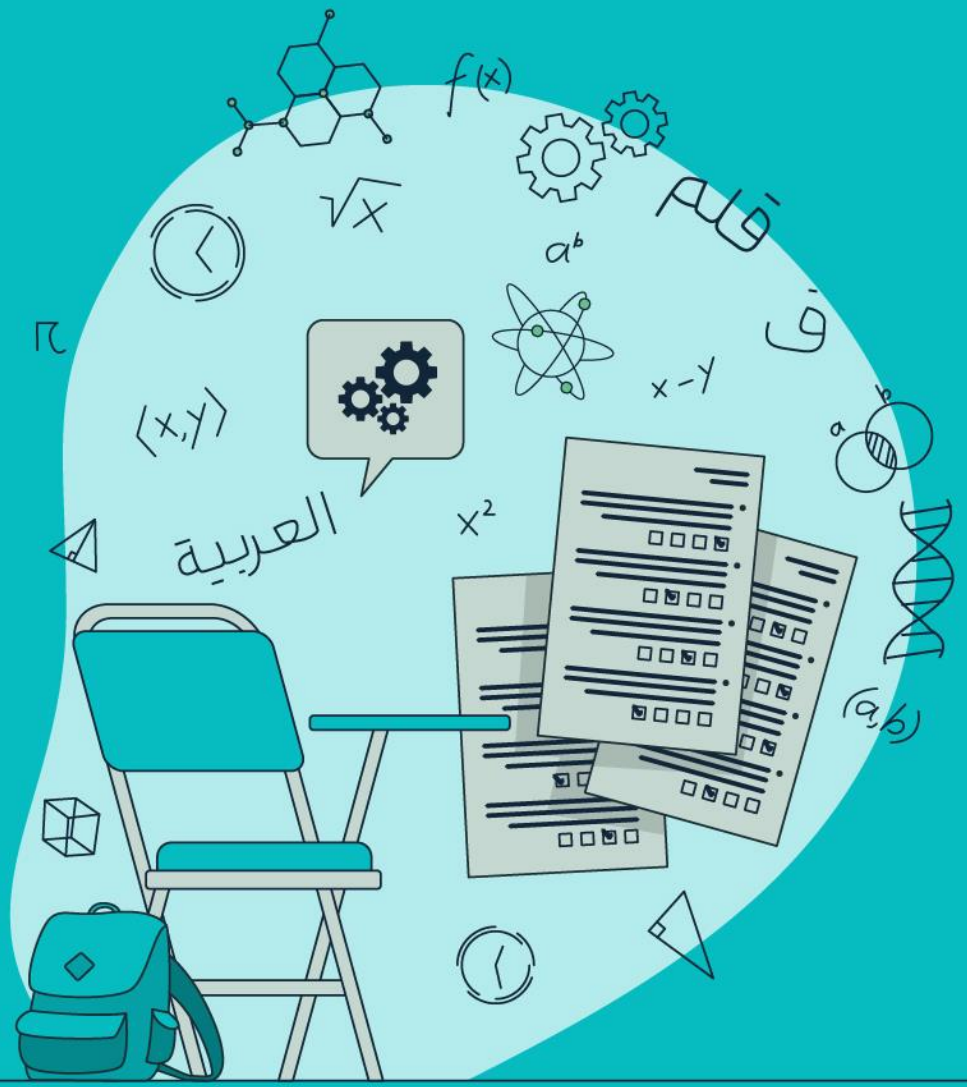


➢ مکان هندسی مراکز دوایری که با شعاع ثابت R' بر دایرهٔ $C(O,R)$ مماس خارجی‌اند دایره‌ای است به مرکز O و شعاع $R+R'$.



	ب) مکان هندسی، مجموعهٔ نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همهٔ آنها یک ..... داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.	
	ب) در حالتی که صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی (l) عمود نباشد و با مولد آن (d)نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، فصل‌مشترک حاصل یک بیضی خواهد بود.	
	پ) مکان هندسی مرکز همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر دایرهٔ $C(O,r)$ در صفحه این دایره مماس خارج‌اند، دایره $C'(O,2r)$ است.	
۶	نقاط A، B، C و D در صفحه مفروض‌اند، نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد(بحث کنید).	۱/۵

نهایی
بندی
جمع
پیشرفت، یعنی موفقیت



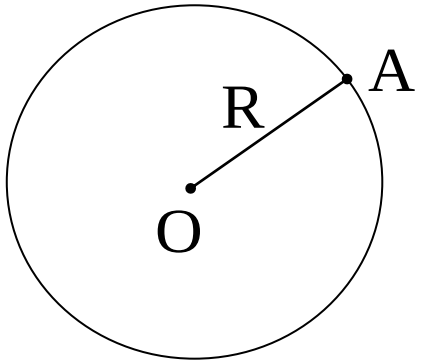
نهایی بندی جمع

هندسه دوازدهم

دایره، وضعیت نقطه و خط با دایره و وضعیت دو دایره

اپیزود ۷ : دایره، وضعیت نقطه و خط با دایره و وضعیت دو دایره

➢ **دایره** : مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطهٔ ثابت (مرکز دایره) به فاصلهٔ ثابت (شعاع دایـره) قرار دارند.



➢ **معادلهٔ استاندارد دایره** : معادلهٔ استاندارد دایره $C(O,R)$ به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع R بصـورت زیـر است :

$$(x-\alpha)^{۲}+(y-\beta)^{۲}=R^{۲}$$

مثال : معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O(۲,-۱)$ و شعاع ۲ را نوشته و مختصات نقـاط برخـورد آن بـا محورهـای مختصات را بدست آورید.

$$(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۴$$

$x=۰ \longrightarrow$ $۴+(y+۱)^۲=۴ \rightarrow (y+۱)^۲=۰ \rightarrow y+۱=۰$

$\rightarrow y=-۱ \rightarrow A(۰,-۱)$

$y=۰ \longrightarrow$

معادلهٔ ضمنی دایره : اگر معادلهٔ استاندارد دایره را به کمک اتحادهای جبری به توان رسانده و ساده کنیم، معادلهٔ ضمنی دایره بصورت زیر حاصل می‌شود :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

که در آن مرکز و شعاع دایره به طریق زیر بدست می‌آیند :

مرکز : $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ و شعاع : $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$

مثال : مختصات مرکز و طول شعاع دایره به معادلهٔ ضمنی زیر را تعیین کنید :

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$$

$a=2$ $b=-4$ $c=1$

$O(-1, 2)$ و $R = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 - 4} = 2$

$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$

- معادلهٔ ضمنی هر دایره را با مربع کامل کردن می‌توان به معادلهٔ استاندارد تبدیل کرد.

$x^2+y^2+2x-4y+1=0$

O R ← استاندارد

- **شرط دایره بودن معادلهٔ ضمنی** $x^2+y^2+ax+by+c=0$

$R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}\ ;\ a^2+b^2-4c>0$

- $a^2+b^2-4c>0$ دایره
- $a^2+b^2-4c=0$ نقطه $(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$
- $a^2+b^2-4c<0$ تهی

مسئله : در هر حالت نوع معادلهٔ ضمنی را تعیین کنید.

الف) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 7 = 0$

$a \quad b \quad c$

$\frac{4 + 16}{20} - 28 = -8 < 0$ دایره

ب) $x^2 + y^2 - 3x + 2y + 3 = 0$

$a \quad b \quad c$

$\frac{9 + 4}{12} - 12 = 1 > 0$ دایره

پ) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5 = 0$

مسئلهٔ : حدود a را طوری تعیین کنید که معادلهٔ زیر معادلهٔ یک دایره باشد :

$x^2 + y^2 - 3x + 5y + a = 0$

a b c

$a^2 + b^2 - 4c > 0$

$9 + 25 - 4a > 0$

$34 > 4a$

$a < 8/5$

معادلهٔ دایره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع R :

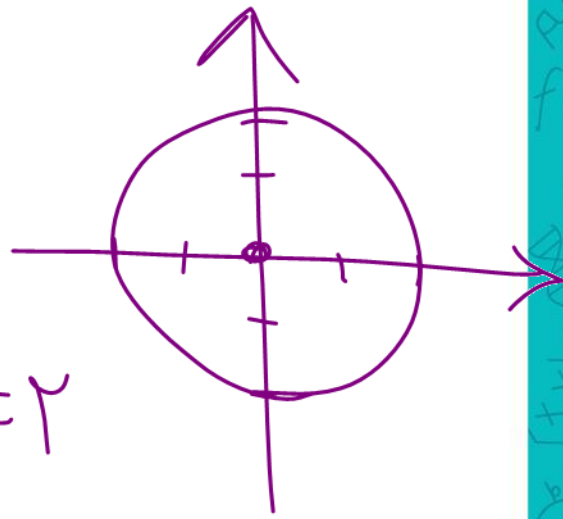
$$O(0,0)\ ;\ \alpha=\beta=0$$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow \boxed{x^2+y^2=R^2}$$

$\alpha=0$ $\beta=0$

$x^2+y^2=4$

$O(0,0)$, $R=2$



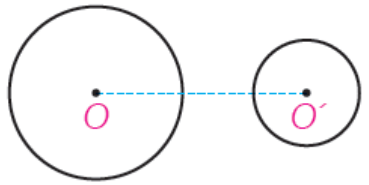
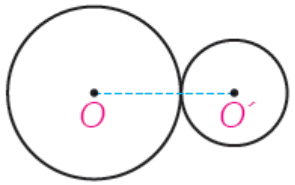
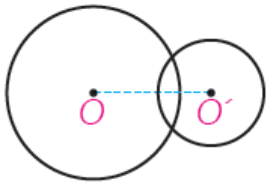
مسئله : معادلهٔ استاندارد و ضمنی دایره‌ای بنویسید که مرکز آن نقطـهٔ $O(۰,۱)$ بـوده و شـعاع آن ۳ واحـد باشد.

$$x^۲ + (y-۱)^۲ = ۳^۲$$

$$x^۲ + y^۲ - ۲y + ۱ - ۳ = ۰$$

$$x^۲ + y^۲ - ۲y - ۲ = ۰$$

➢ **وضعیت دو دایره نسبت به هم** : وضعیت دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ با طول خط‌المرکزین $d = OO'$ یکی از ۶ حالت زیر است :

دو دایرهٔ برون هم (متخارج)	$d > R + R'$	
دو دایره مماس برون	$d = R + R'$	
دو دایره متقاطع	$R - R' < d < R + R'$	

	$d = R - R'$	دو دایره مماس درون
	$d < R - R'$	دو دایره متداخل
	$d = 0$	دایره‌های هم‌مرکز

مسئله : وضعیت هر یک از جفت دایره‌های زیر را تعیین کنید :

الف)

$$x^2+y^2-4x-6y-3=0 \longrightarrow O(2,3), R=\frac{1}{2}\sqrt{16+36+12}=4$$

$$x^2+y^2-10x-14y+73=0 \longrightarrow O'(5,7), R'=\frac{1}{2}\sqrt{100+196-292}=1$$

$$d=OO'=\sqrt{9+16}=5$$

$$R+R'=4$$

$$R-R'=3$$

$d=R+R'$ پس مماس خارج

ب)

$$x^2+y^2-2x-1=0$$

$$x^2+y^2=1$$

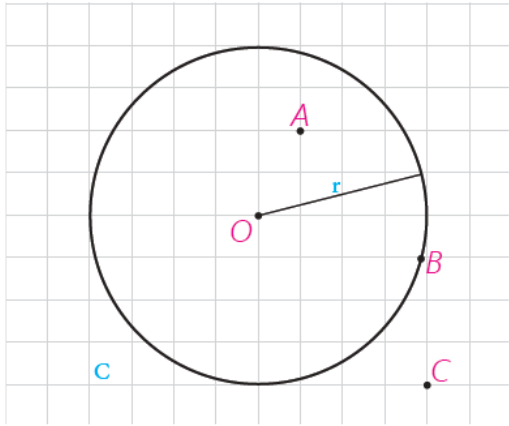
وضعیت نقطه نسبت به دایره: می‌خواهیم وضعیت نقطهٔ (x_0, y_0) را نسبت به دایره به معادلهٔ $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ را تعیین کنیم. دو روش زیر قابل استفاده است:

- **روش کار:** مرکز و شعاع دایره و همچنین فاصله مرکز دایره تا نقطه مورد نظر را بدست می‌آوریم.

الف) اگر فاصله نقطه تا مرکز دایره از شعاع دایره کمتر باشد، نقطه داخل دایره است. $(OA < R)$

ب) اگر فاصله نقطه تا مرکز دایره با شعاع دایره برابر باشد، نقطه روی دایره است. $(OB = R)$

پ) اگر فاصله نقطه تا مرکز دایره از شعاع دایره بیشتر باشد، نقطه خارج دایره است. $(OC > R)$



مثال : دایره به معادلهٔ $x^2+y^2-2x+4y-5=0$ را در نظر گرفته و وضعیت هر یک از نقاط زیر را نسبت به آن تعیین کنید :

الف) $A(-1,-1)$

ب) $B(2,3)$

پ) $C(4,-1)$

$O(1,-2)$

$R=\frac{1}{2}\sqrt{4+16+20}=\sqrt{10}\simeq 3/...$

$OB=\sqrt{1+25}=\sqrt{26}\simeq 5/...$ $OB>R$

ضعیف دایره

وضعیت خط و دایره : می‌خواهیم وضعیت خط به معادلهٔ $ax+by+c=0$ را نسبت به دایره با معادلهٔ $x^2+y^2+ax+by+c=0$ تعیین کنیم. بدین منظور دو روش وجود دارد که در ادامه به تشریح آنها می‌پردازیم:

- **روش اول** : از معادلهٔ خط، متغیر y را بدست آورده و در معادلهٔ دایره جایگذاری می‌کنیم. اینک پس از ساده‌سازی یک معادلهٔ درجه ۲ بر حسب x وجود دارد که بسته به مقدار Δ تعداد نقاط تلاقی خط و نقطه به دست می‌آید :

Δ
- $+$ دایره و خط در دو نقطه متقاطعند.
- 0 خط در یک نقطه بر دایره مماس است.
- $-$ دایره و خط متخارجند و نقطهٔ تقاطع ندارند.

مثال : وضعیت خط به معادلهٔ $x+y=4$ نسبت به دایره به معادلهٔ $x^2+y^2-2x-3=0$ چگونه است؟

$y=4-x$

$x^2+(4-x)^2-2x-3=0$

$x^2+16+x^2-8x-2x-3=0$

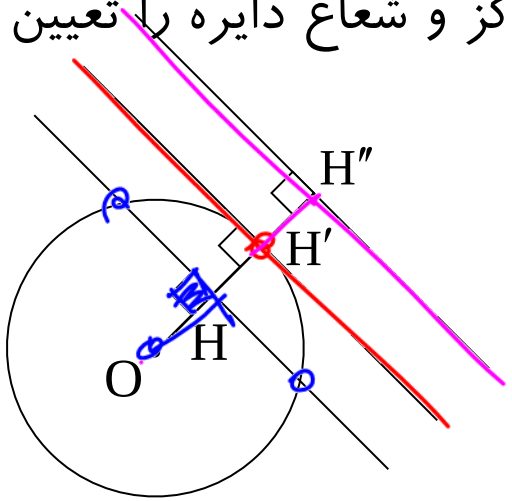
$2x^2-10x+13=0$

$\Delta=100-4(2)(13)=-4<0$

هیچ برخورد، تماس یا مماسی

صفر نقطه تقاطع

- **روش دوم** : ابتدا مختصات مرکز و شعاع دایره را تعیین می‌کنیم. سپس فاصلهٔ مرکز دایره از خط مفروض را بدست می‌آوریم. آنگاه :



$OH < R$ خط و دایره متقاطع

$OH' = R$ خط بر دایره مماس

$OH'' > R$ خط و دایره متخارج

حل مثال قبل با روش دوم :

$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \longrightarrow O(1, 0)$ ، $R = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 0 + 12} = 2$

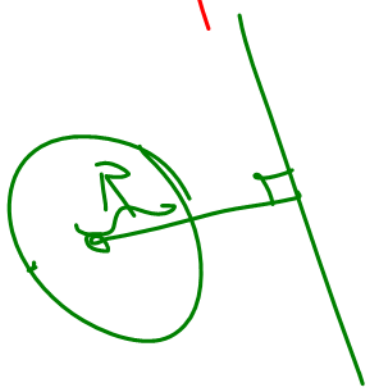
$x + y = 4$

$x + y - 4 = 0$

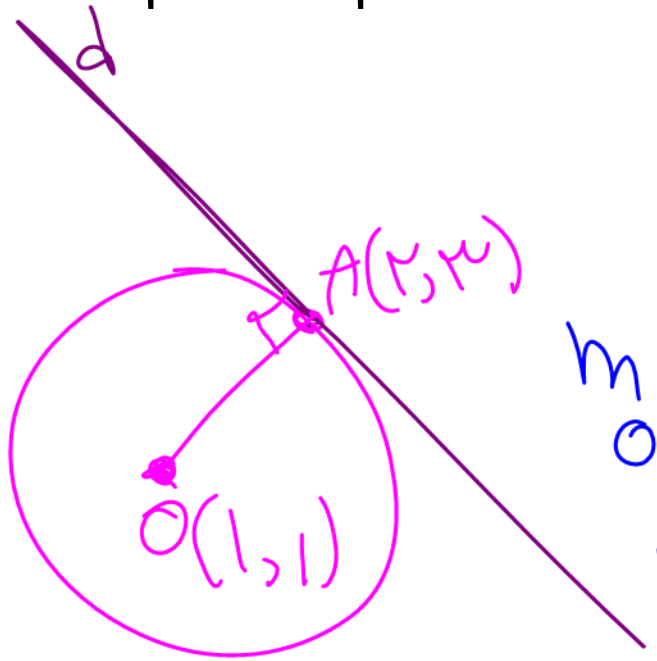
$OH = \frac{|1 + 0 - 4|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \simeq 2,1 > R = 2$

فاصله مرکز دایره تا خط

طول پاره خط عمود



مسئله : در نقطهٔ $A(۲,۳)$ روی دایره $x^۲+y^۲-۲x-۲y-۳=۰$ مماسی بر آن رسم کرده‌ایم. معادلهٔ خط مماس را بنویسید.



$O(۱\text{ و }۱)$

$$m_{OA}=\frac{۳-۱}{۲-۱}=\frac{۲}{۱}=۲$$

$$m_d=\frac{-۱}{۲}$$

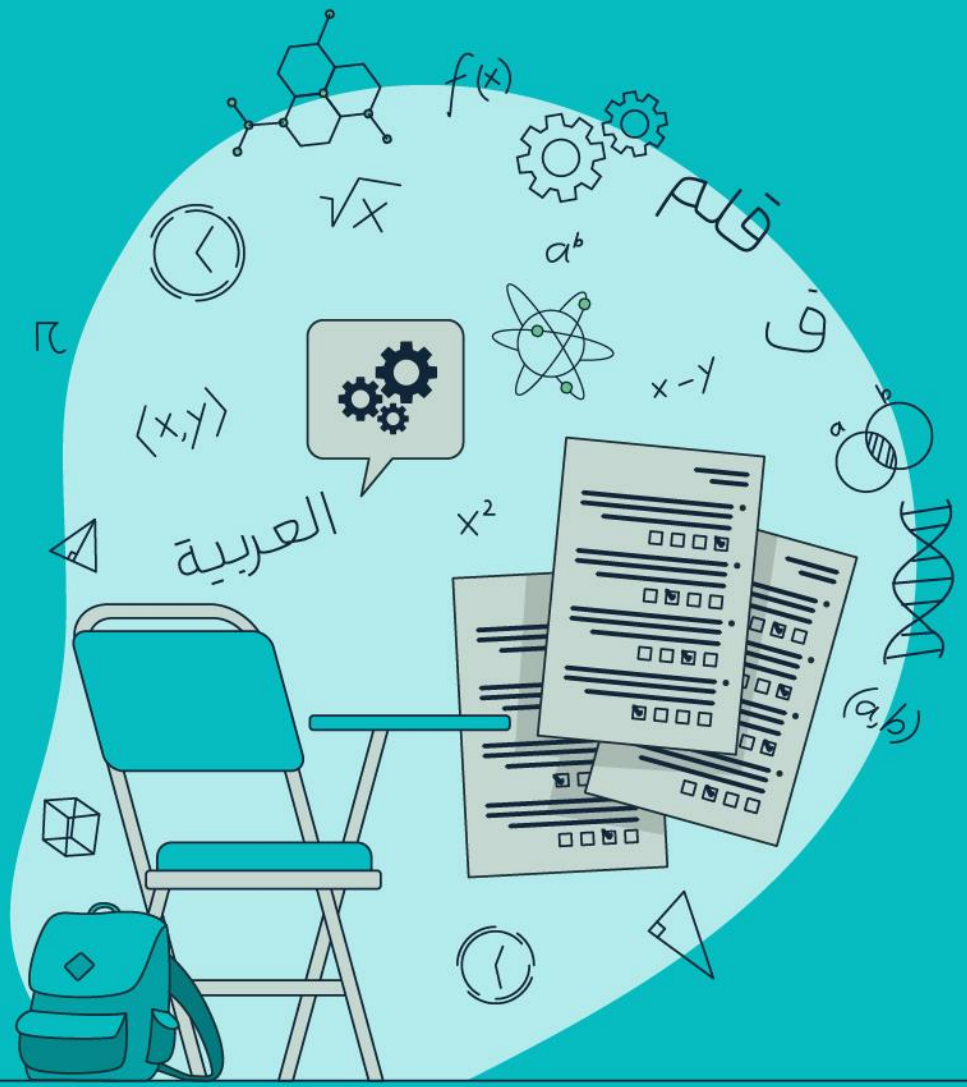
$$y-۳=\frac{-۱}{۲}(x-۲)$$

۷	در نقطه $A(۲,۳)$ روی دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x-۲y=۳$ مماسی رسم کرده‌ایم، معادله این خط مماس را به‌دست آورید.	۱
۸	وضعیت نقطه $A(۱,-۲)$ نسبت به دایره $x^۲+y^۲-۲x+۲y=۰$ را تعیین کنید.	۱
۷	وضعیت دایره $x^۲+y^۲-۶x-۲y+۹=۰$ با دایره ای به مرکز مبدا مختصات و شعاع یک را نسبت به هم مشخص کنید.	۱/۵

$x^۲+y^۲=۱$

پ) نقطه $A(۱,-۲)$ در .....دایره به معادله $x^۲+y^۲-۲x+۲y=۰$ قرار دارد.

نهایی
بندی
جمع
پیشرفت، یعنی موفقیت



نهایی بندی جمع

هندسه دوازدهم

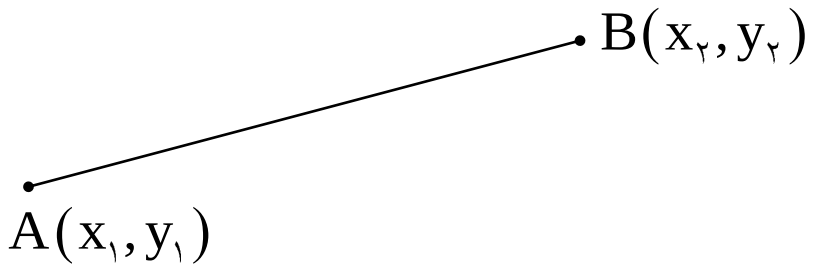
نوشتن معادله دایره

اپیزود ۸ : نوشتن معادله دایره

➢ مدل های مختلف و متنوع نوشتن معادله دایره

یادآوری : فاصلهٔ بین دو نقطهٔ $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ (طول پاره‌خط AB) برابر است با :

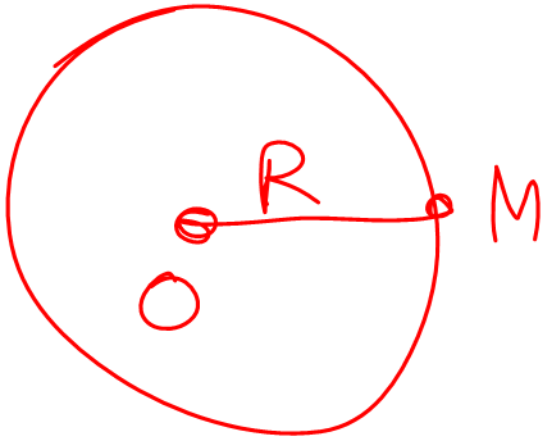
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



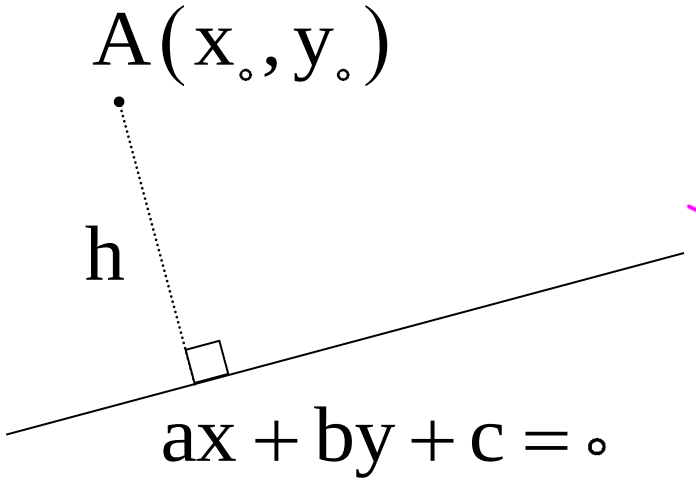
مسئله : معادلهٔ دایره‌ای بنویسید که نقطهٔ $O(-۲,-۱)$ مرکـز آن بـوده و نقطـهٔ $M(۱,۱)$ بـک نقطـه از آن باشد.

$OM = R$

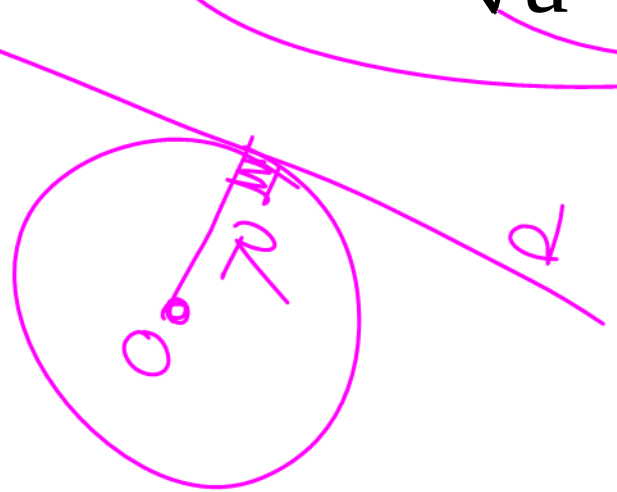
$(x+۲)^۲+(y+۱)^۲=$



یادآوری : فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0, y_0)$ از خط $ax+by+c=0$ برابر است با :

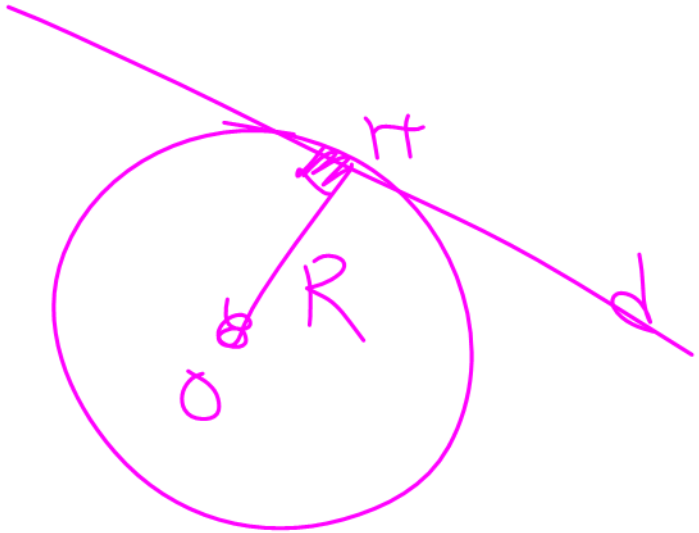


$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



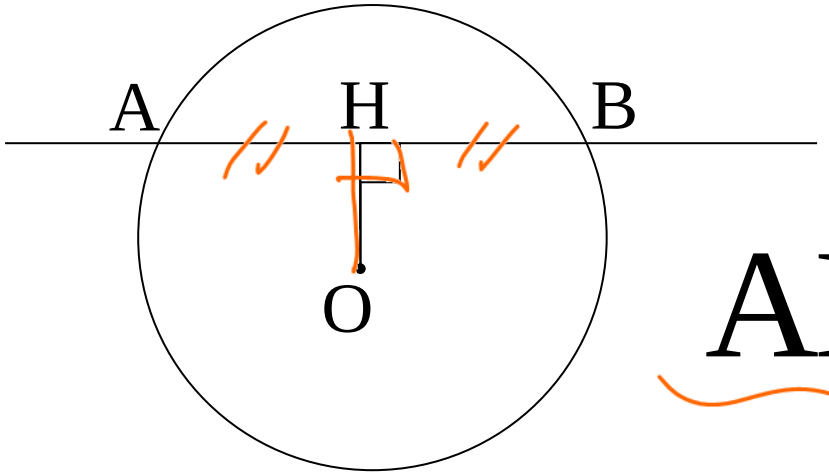
مسئله : معادلهٔ دایره‌ای بنویسید که نقطهٔ $O(۱,-۱)$ مرکز آن بوده و بر خط بـه معادلـهٔ $۳x-۴y+۳=۰$ مماس باشد.

$OH = R$

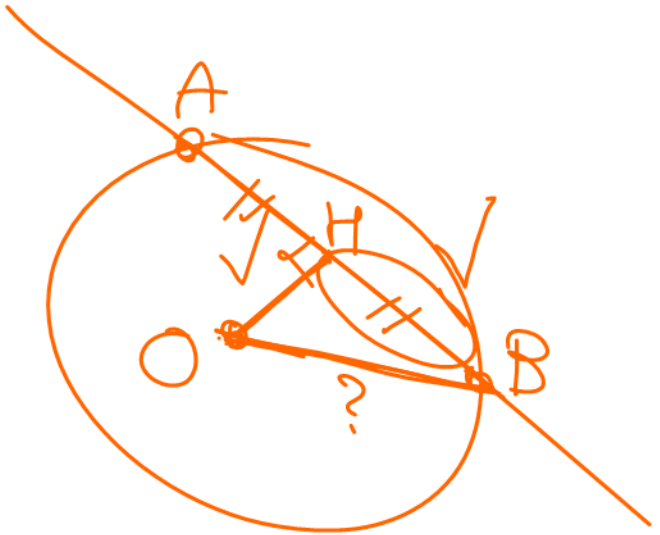


$(x-۱)^۲+(y+۱)^۲=O^۲$

یادآوری : قطر (شعاع) عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند.

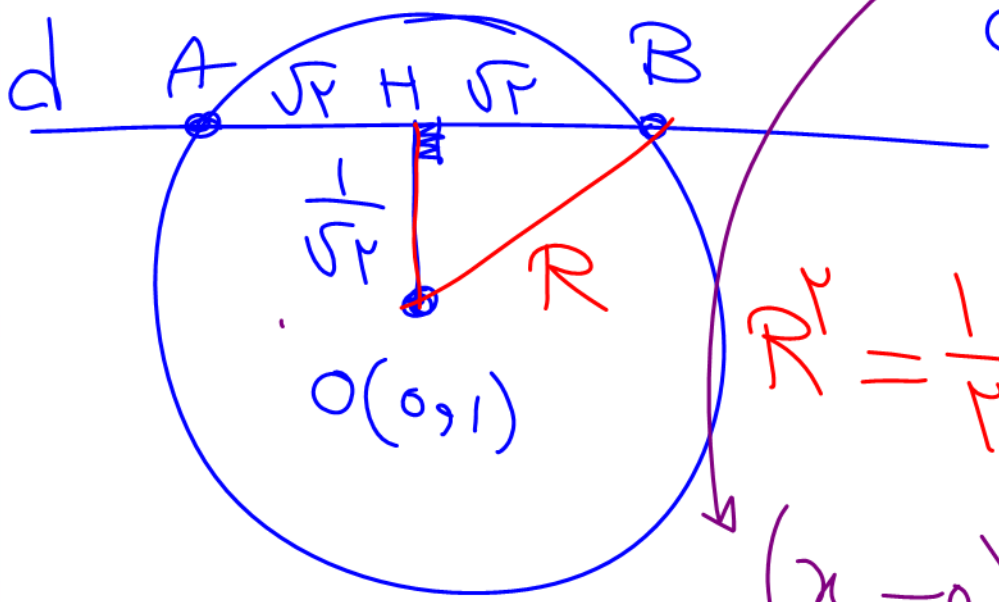


$$AH = BH$$



مسئله : معادلهٔ دایره‌ای بنویسید که مرکز آن $O(0,1)$ بوده و روی خط به معادلهٔ $x+y=2$ وتری به طـول $2\sqrt{2}$ جدا کند.

$x+y-2=0$

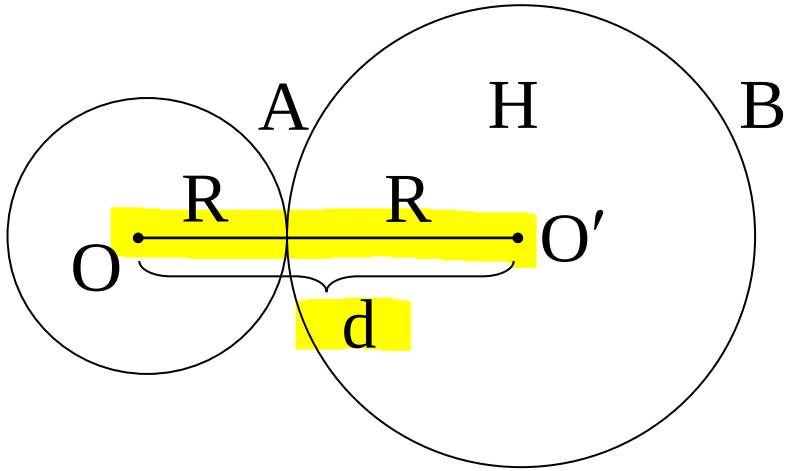


$$OH=\frac{|0+1-2|}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$R^2=\frac{1}{2}+2=\frac{9}{2}$$

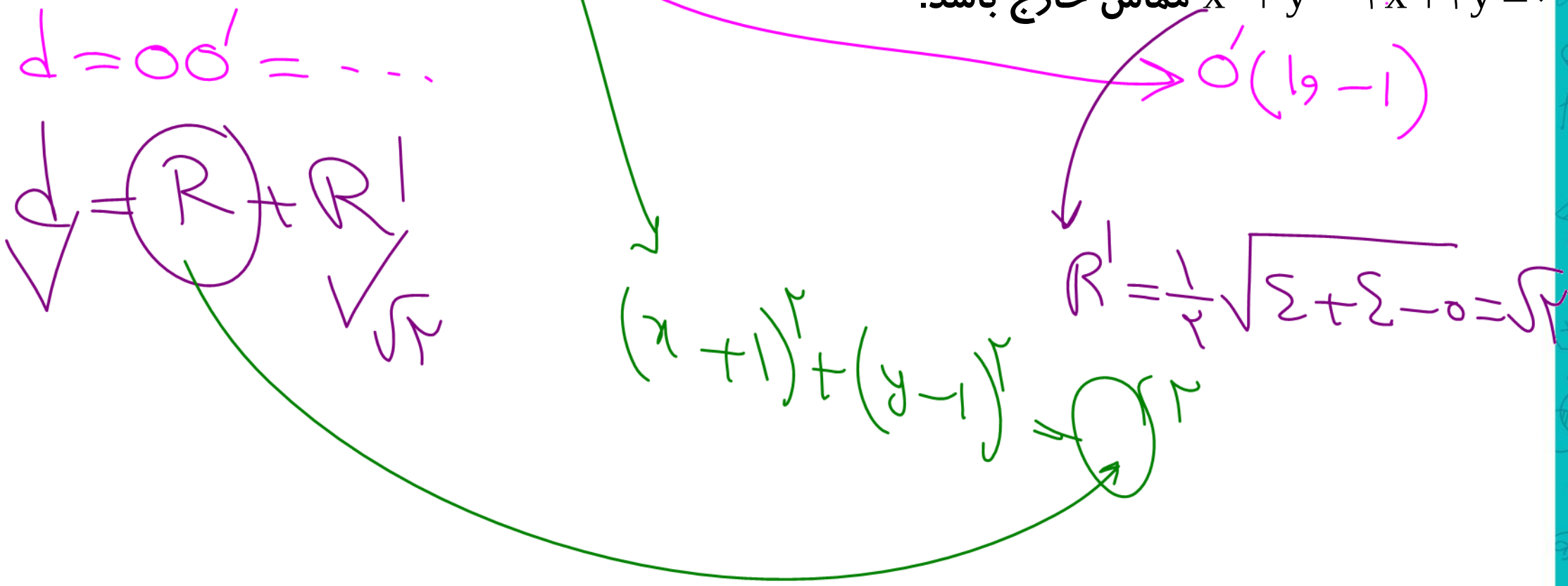
$$(x-0)^2+(y-1)^2=\frac{9}{2}$$

یادآوری : در دو دایرهٔ مماس خارج، طول خط‌المرکزین برابر با مجموع شعاع‌های دو دایره است.

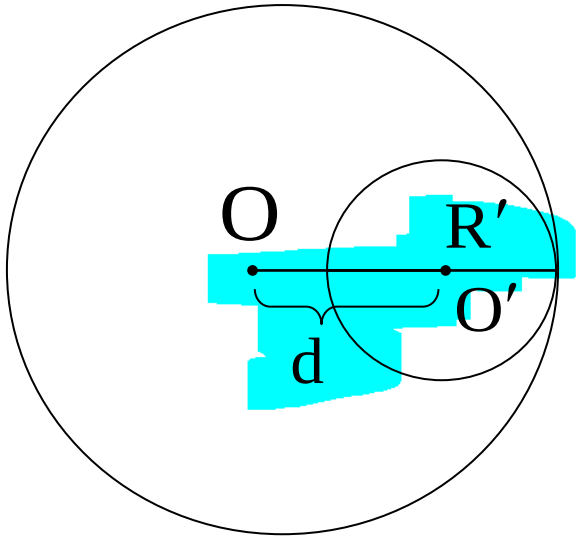


$$d = R + R'$$

مسئله: معادلهٔ دایره‌ای بنویسید که مرکز آن نقطهٔ $O(-۱,۱)$ بوده و بر دایره به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۲y=۰$ مماس خارج باشد.

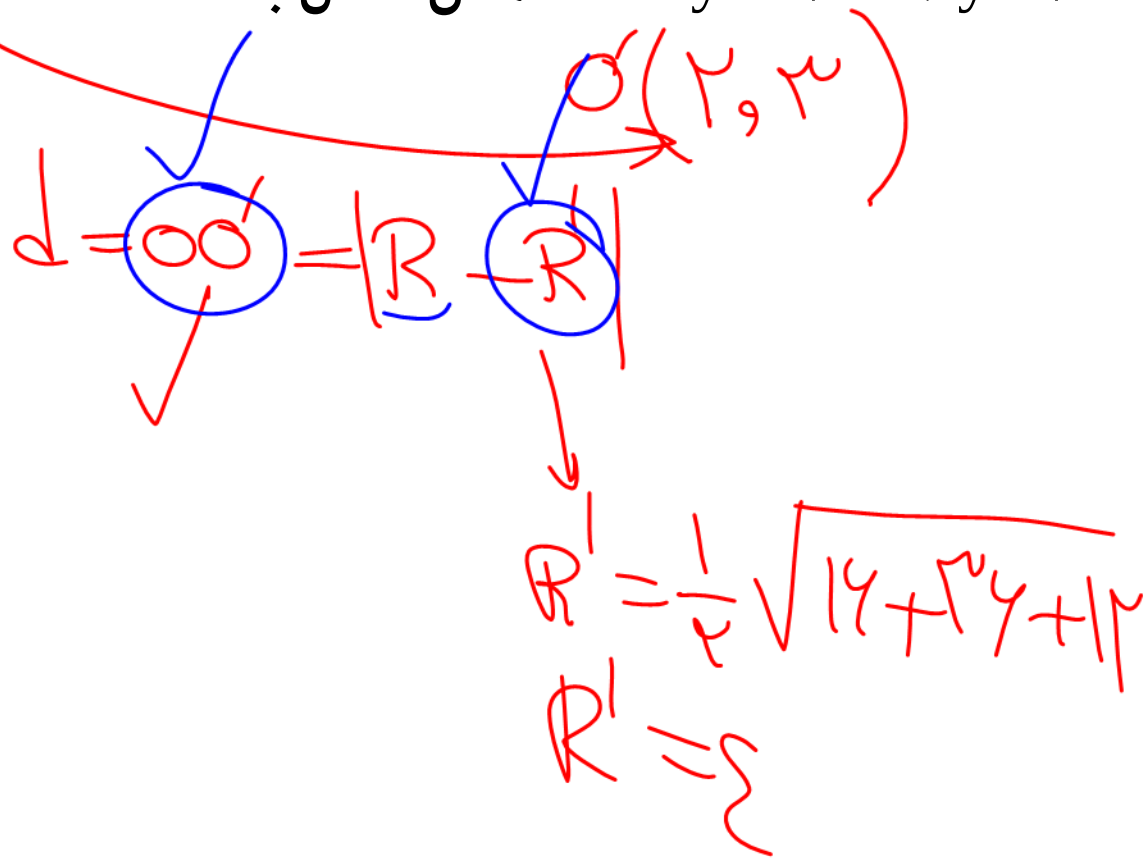


یادآوری : در دو دایرهٔ مماس داخل، طول خط‌المرکزین برابر با قدرمطلق تفاضل شعاع‌های دو دایره است.

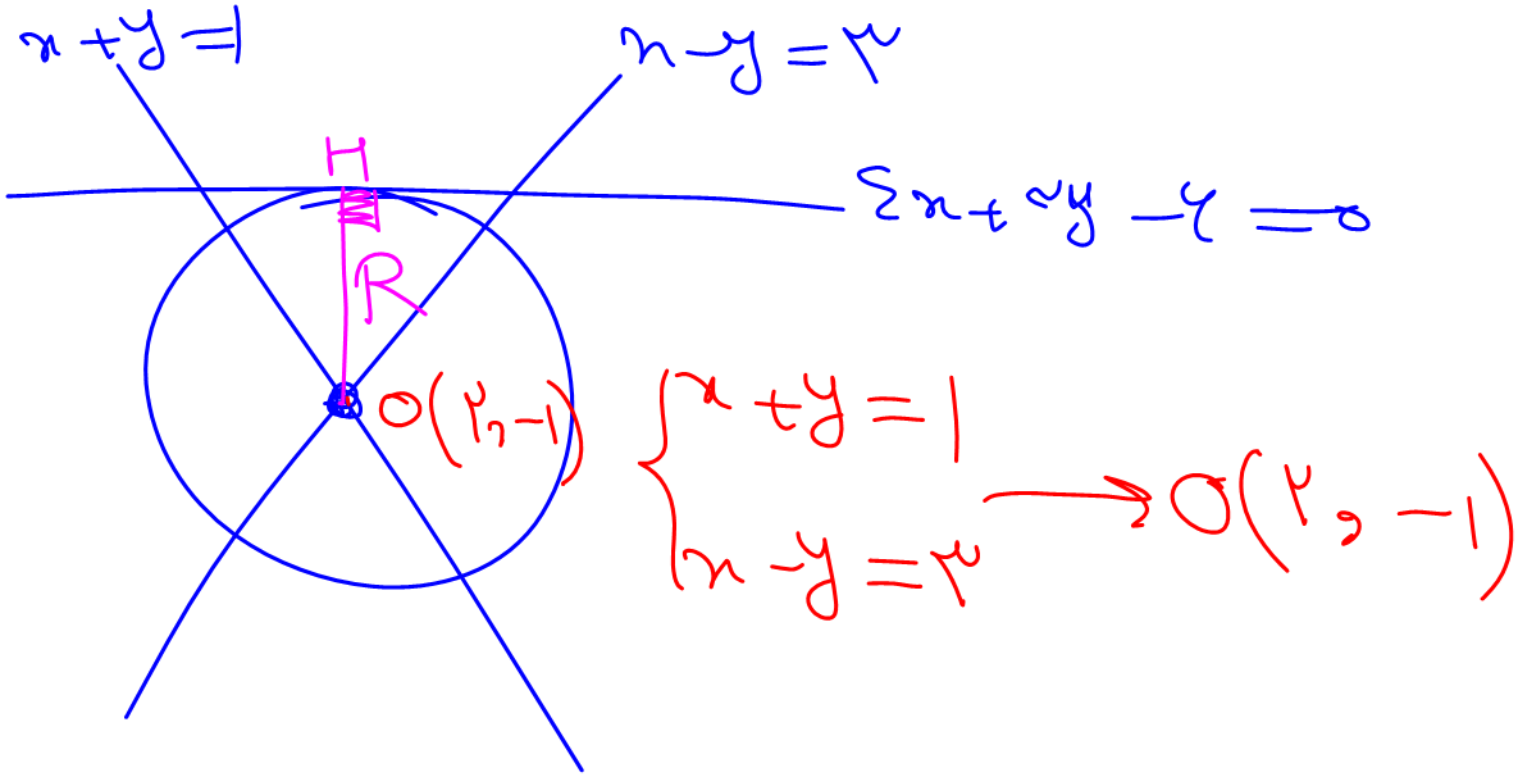


$$d = |R - R'|$$

مسئله: معادلهٔ دایره‌ای بنویسید که مرکز آن $O(۰,۱)$ بوده و با دایره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ - ۴x - ۶y - ۳ = ۰$ مماس داخل باشد.

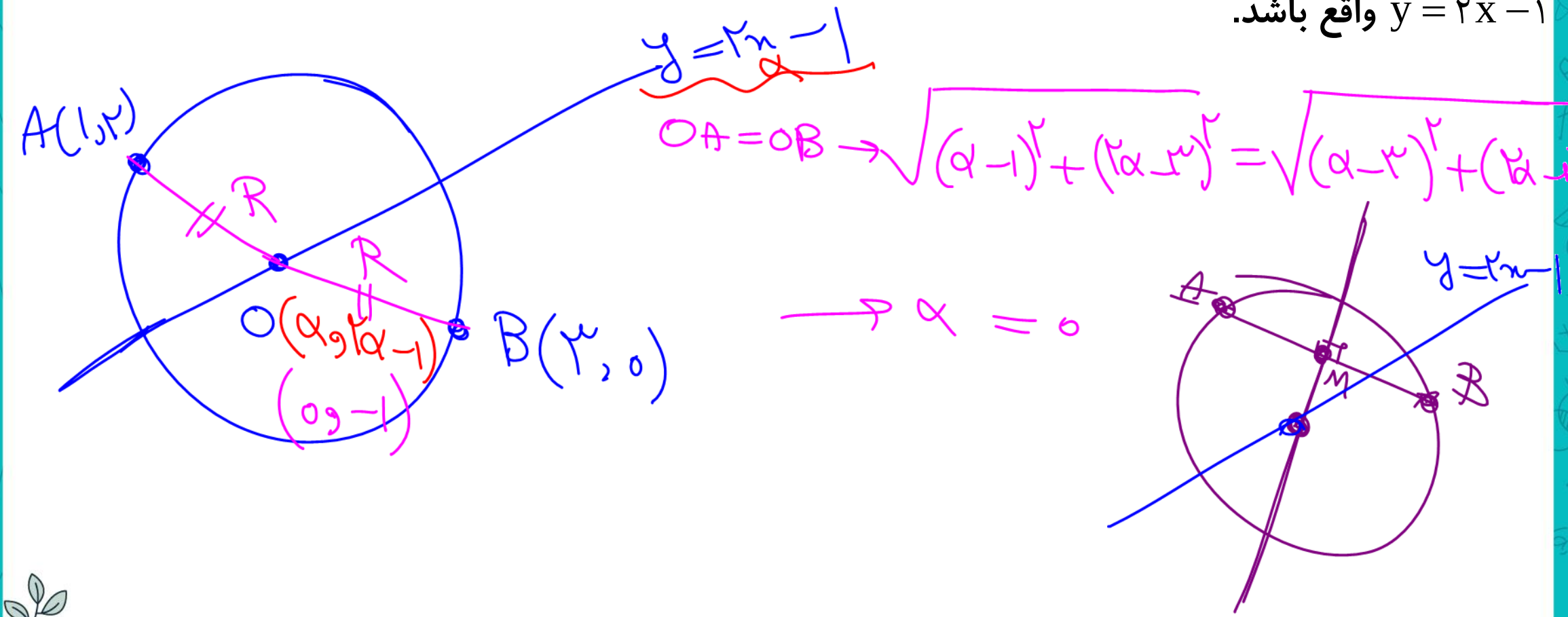


مسئله: معادلـهٔ دایـره‌ای را بنویسـید کـه خطـوط $x+y=1$ و $x-y=3$ دو قطـر از آن بـوده و بـر خـط $4x+3y=6$ مماس باشد.

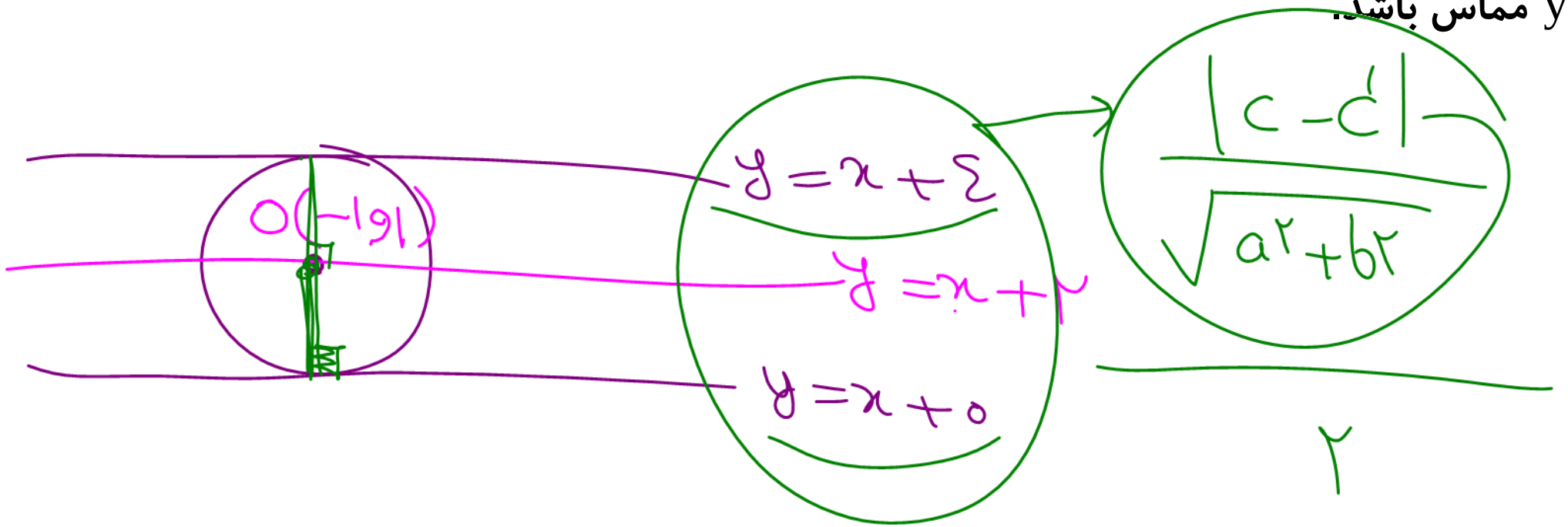


$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases} \longrightarrow O(2,-1)$$

مسئله : معادلهٔ دایره‌ای بنویسید که $A(۱,۲)$ و $B(۳,۰)$ دو نقطه از آن بوده و قطر آن روی خط $y = ۲x - ۱$ واقع باشد.

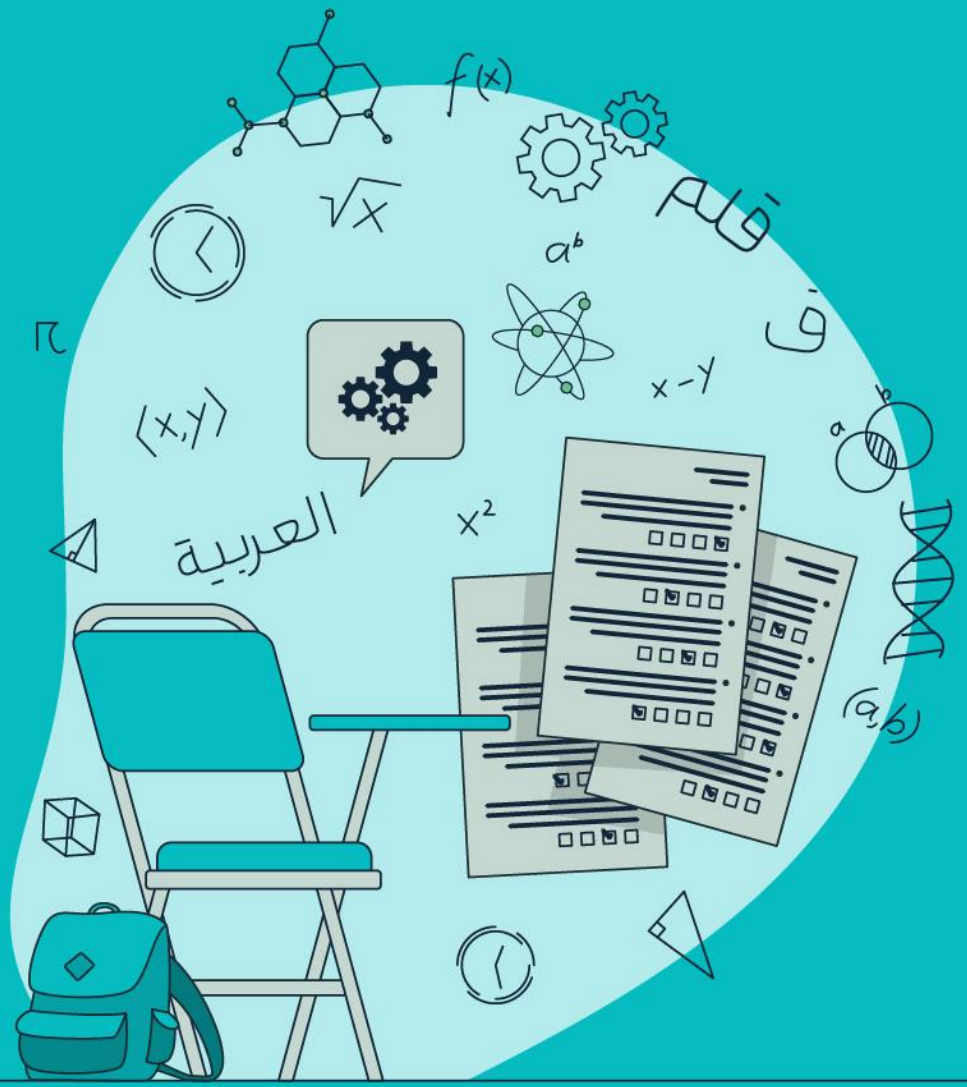


مساله : معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن به طول ۱- بوده و بر دو خط به معادلات $y=|x$ و $y=|x+۴$ مماس باشد.



۶	معادله دایره‌ای را بنویسید که خطوط $x+y=1$ و $x-y=3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x+3y=-5$ بر آن مماس باشد.	۱/۵
۷	معادله دایره‌ای را بنویسید که $O(-1,-1)$ مرکز آن بوده و روی خط $2x+y=2$ وتری به طول ۴ ایجاد کند.	۱/۲۵
۶	معادله دایره ای را بنویسیدکه مرکز آن $O'(2,1)$ بوده وبرخط $3x+4y=-5$ مماس باشد.	۱

نهایی
بندی
جمع
پیشرفت، یعنی موفقیت



جمع بندی نهایی

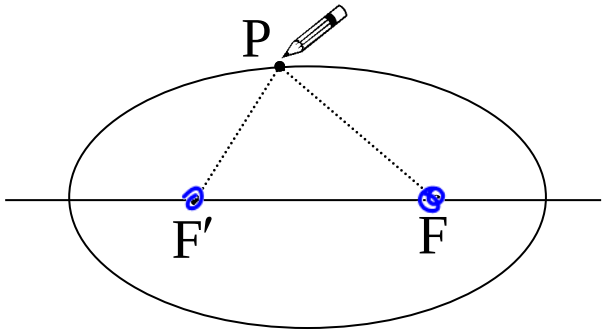
هندسه دوازدهم

بیضی

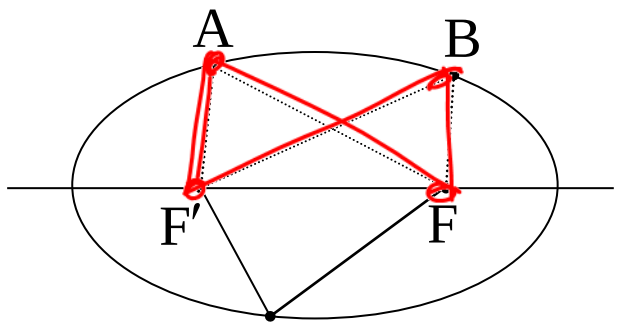
اپیزود ۹ : بیضی

تعریف ترسیمی بیضی : یک تکه نخ به طول ℓ را در نظر گرفته و دو سر آن را مطابق شکل در دو نقطهٔ F', F ثابت کنید بطوریکه $FF' < \ell$.

یک مداد را داخل نخ قرار داده و منحنی بگونه‌ای رسم کنید که در تمام زمان رسم، دو طرف نخ کاملاً بصورت صاف و کشیده باشد. شکل حاصل منحنی بسته‌ای خواهد بود که بیضی نام دارد.

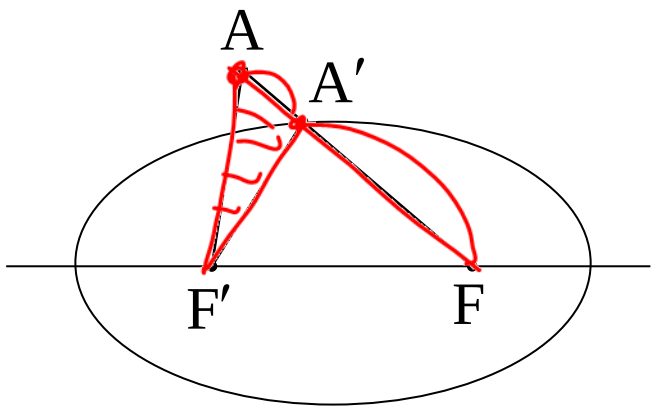


➢ **ویژگی نقاط روی بیضی** : مطابق با ترسیم، همواره مجموع فاصله‌های هر نقطـه روی بیضـی از نقـاط F', F برابر طول نخ (ℓ) است.



$$FA + F'A = \ell$$
$$FB + F'B = \ell$$
$$FC + F'C = \ell$$

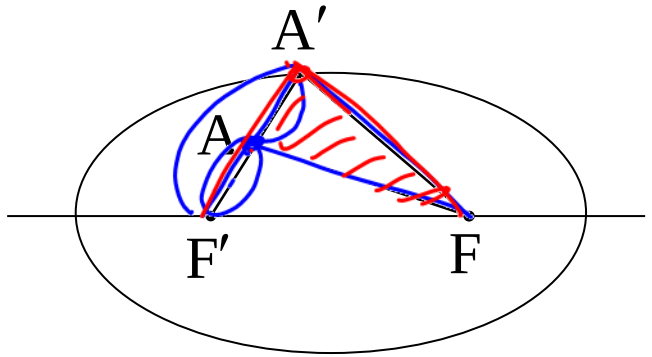
حالت اول : فرض می‌کنیم نقطهٔ A خارج بیضی باشد؛ پس داریم :



$$FA + F'A = FA' + \underbrace{A'A + F'A}_{>F'A'} > FA' + F'A' = \ell$$

نتیجه: مجموع فواصل هر نقطه خارج بیضی از نقاط F', F از طول نخ (ℓ) بیشتر است.

حالت دوم : فرض می‌کنیم نقطهٔ A داخل بیضی باشد؛



$$FA+F'A=FA+F'A'-AA'=F'A'+\underbrace{(FA-AA')}_{<FA'}<F'A'+FA'=\ell$$

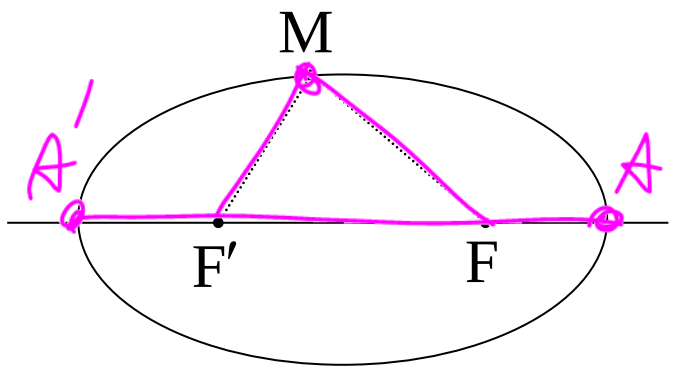
نتیجه: مجموع فواصل هر نقطه داخل بیضی از نقاط F', F از طول نخ (ℓ) کمتر است.

➢ **تعریف مکان هندسی بیضی** : بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصلشان از دو نقطهٔ ثابت در صفحه یک مقدار ثابت است.

➢ دو نقطهٔ ثابت F, F' کانون‌های بیضی و مقدار ثابت، طول قطر بزرگ بیضی است.

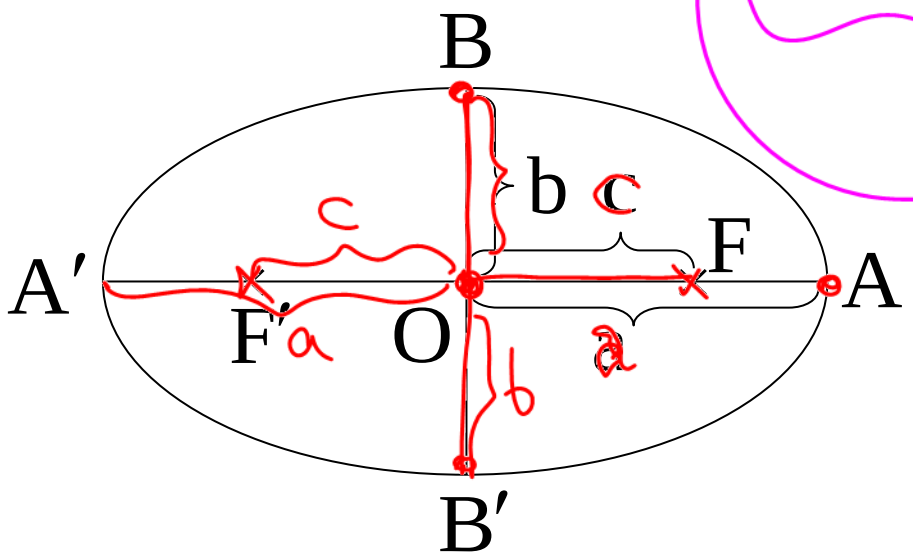
(ℓ) مقدار ثابت $= MF + MF'$

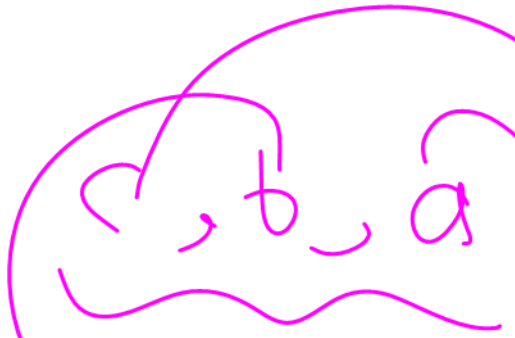
ℓ = طول نخ = طول قطر بزرگ بیضی



پارامترهای بیضی :

$OA = a \ , \ OB = b \ , \ OF = c$





O : مرکز بیضی (وسط FF')

FF' : فاصلهٔ کانونی بیضی $= ۲c$

AA' : قطر بزرگ بیضی $= ۲a$

BB' : قطر کوچک بیضی $= ۲b$

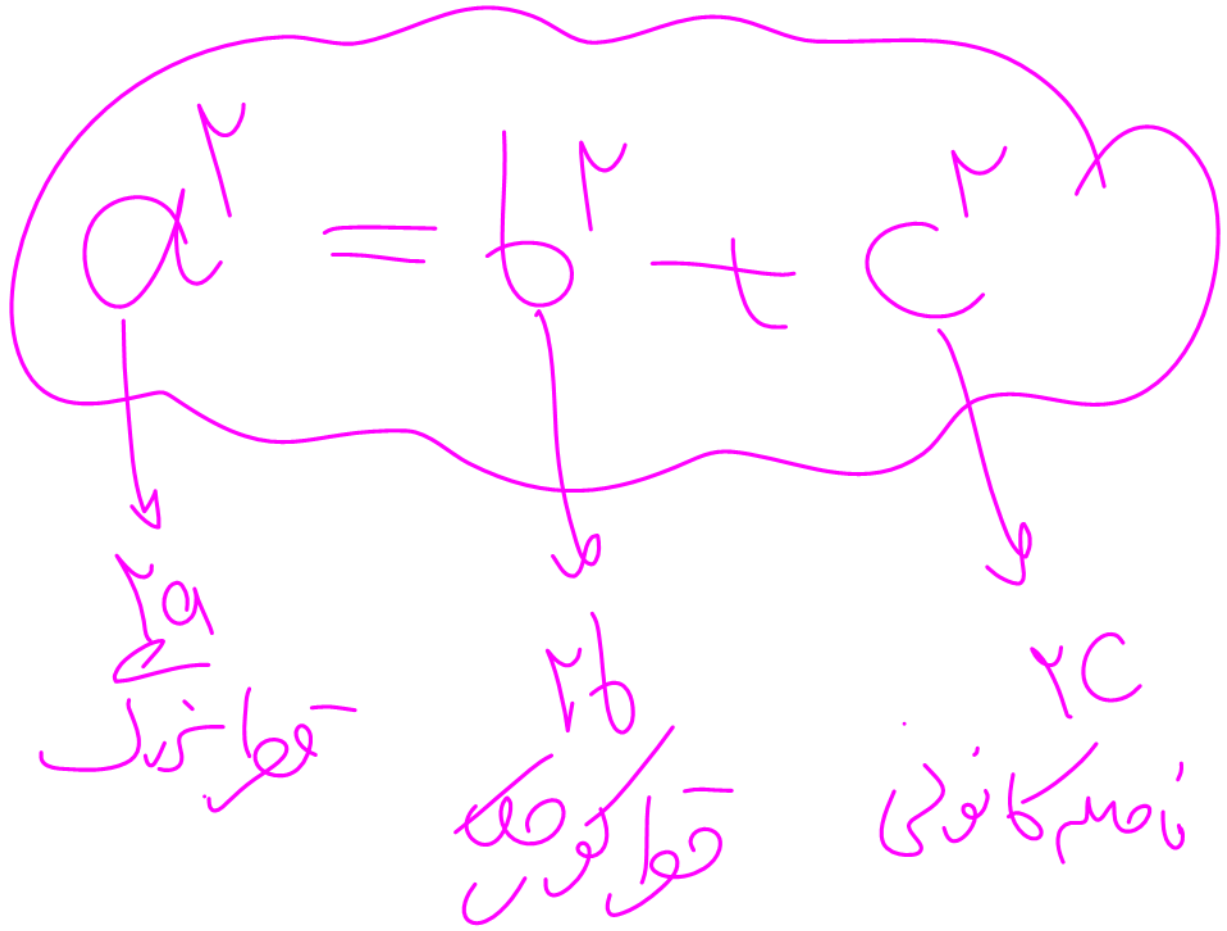
در هر بیضی ثابت کنید :

الف) $AA' = ۲a$

ب) $\ell = ۲a$ طول نخ

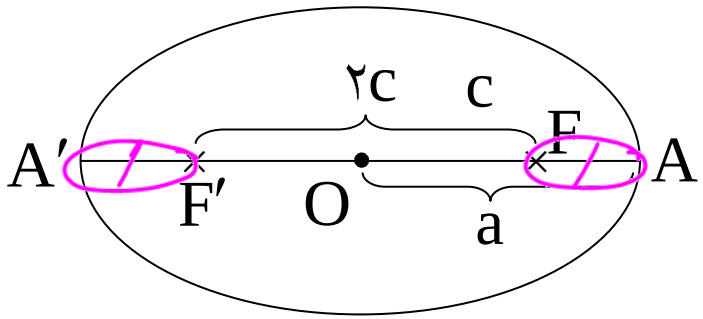
پ) $a^۲ = b^۲ + c^۲$

ت) $BB' = ۲b$



اثبات (الف) : ابتدا ثابت می‌کنیم؛ $FA = F'A'$

اگر مداد در نقطهٔ A باشد داریم :



$$FA + F'A = \ell \Rightarrow FA + F'F + FA = \ell \Rightarrow ۲FA + ۲c = \ell$$

$$\Rightarrow FA = \frac{\ell - ۲c}{۲} \Rightarrow A' \Rightarrow FA = F'A' = \frac{\ell - ۲c}{۲}$$ به دلیل مشابه در نقطهٔ

و اینک داریم :

$$OA' = OF' + F'A' = OF + FA = OA = a$$
$$\Rightarrow AA' = OA + OA' = a + a = ۲a$$

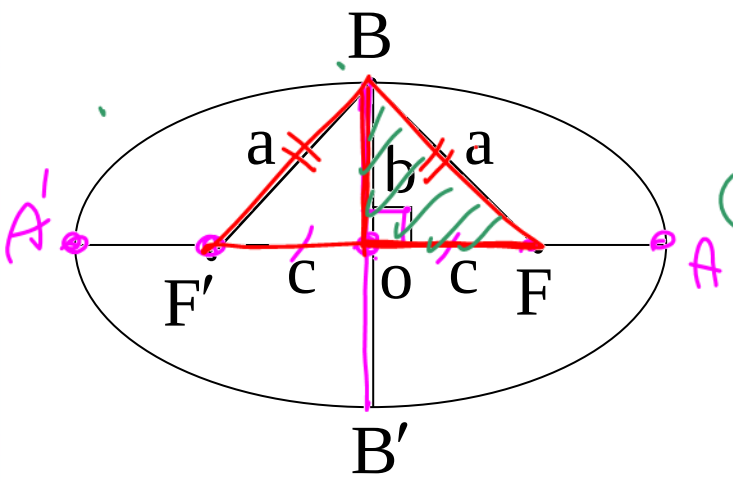
اثبات (ب) :

$$OA = OF + FA = c + \frac{\ell - ۲c}{۲} = \frac{۲c + \ell - ۲c}{۲} = \frac{\ell}{۲}$$

از طرفی : $OA = a \Rightarrow \frac{\ell}{۲} = a \Rightarrow \ell = ۲a$

اثبات (پ) : OB هم میانه است و هم ارتفاع پس مثلث BFF' متساوی‌الساقین است و $BF = BF' = a$ و

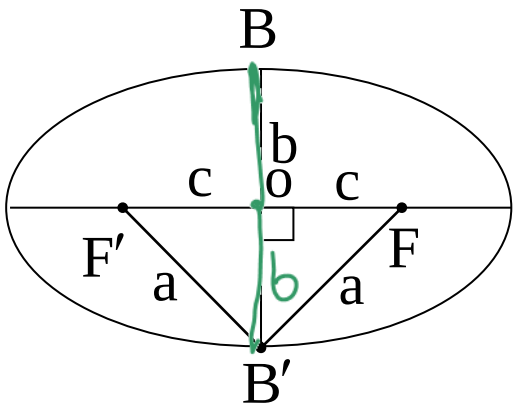
طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم :



$$BF^2 = OB^2 + OF^2$$

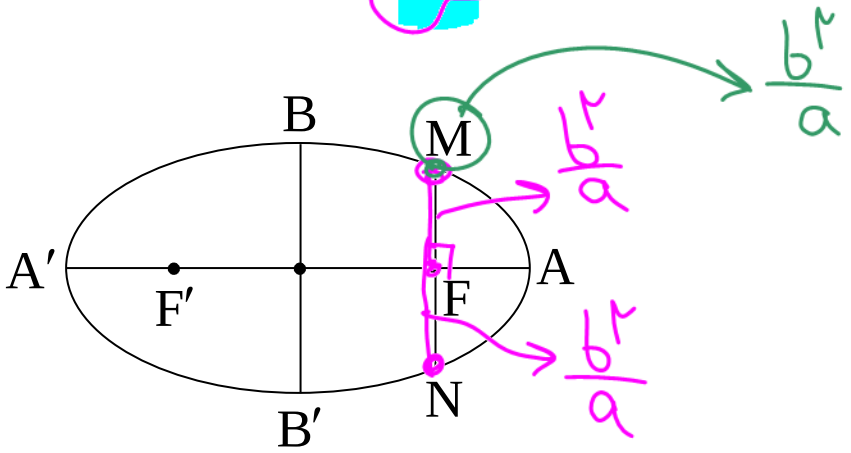
$$a^2 = b^2 + c^2$$

اثبات (ت) : بدلیل مشابه :



$$OB'^{۲} = BF'^{۲} - OF^{۲} = a^{۲} - c^{۲} = OB^{۲}$$
$$\Rightarrow OB = OB' = b$$
$$\Rightarrow BB' = OB + OB' = b + b = ۲b$$

وتر کانونی بیضی: خط عمود بر AA'(قطر کانونی) در نقطهٔ F(کانون)، بیضی را در نقاط M و N قطع می‌کند، MN را وتر کانونی بیضی می‌نامیم. طول وتر کانونی بیضی برابر است با: $\frac{۲b^۲}{a}$



➢ **ثابت کنید طول وتر کانونی بیضی برابر با $\frac{۲b^۲}{a}$ است.**

اثبات : اولاً می‌دانیم

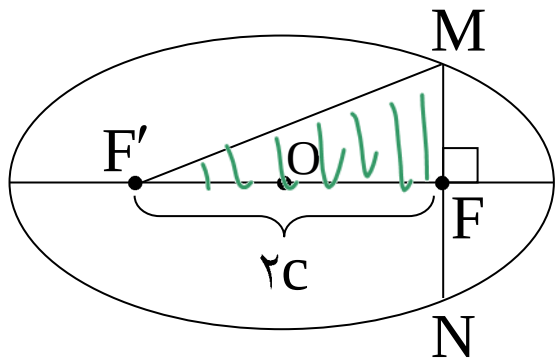
$$\Rightarrow MF'' = ۲a - MF \quad MF + MF' = ۲a$$

ثانیاً طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث MFF' داریم :

$$MF^۲ = MF'^۲ - FF'^۲ \Rightarrow MF^۲ = (۲a - MF)^۲ - (۲c)^۲$$

$$\Rightarrow MF^۲ = ۴a^۲ - ۴a.MF + MF^۲ - ۴c^۲$$

$$\Rightarrow ۴a.MF = ۴a^۲ - ۴c^۲ \Rightarrow MF = \frac{a^۲ - c^۲}{a} \quad (۱)$$

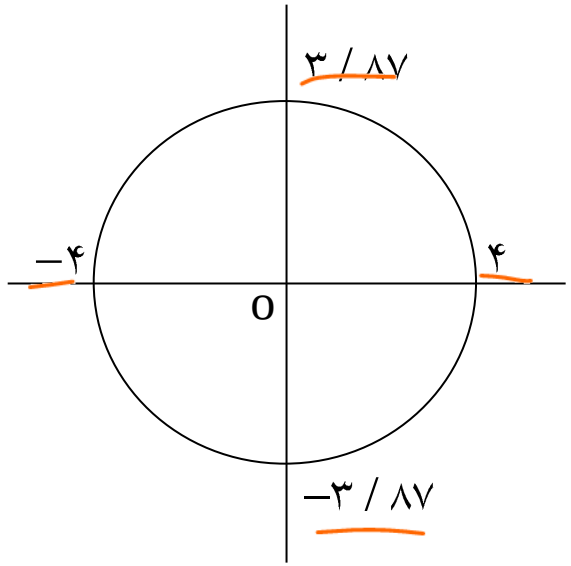


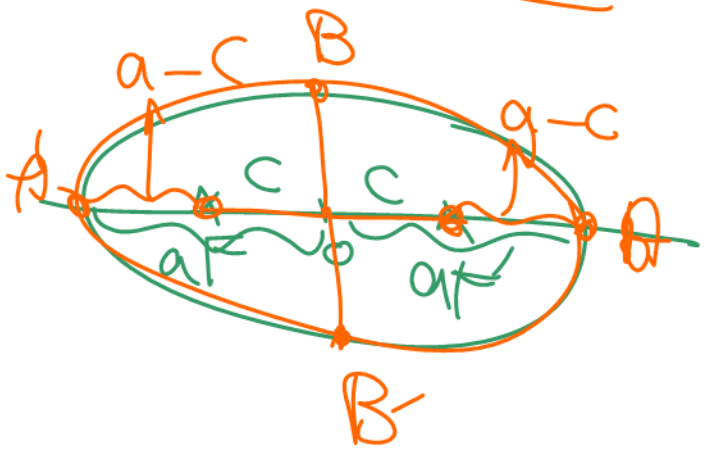
$$\left.\begin{array}{l} \text{از طرفی می‌دانیم} \quad a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow a^۲ - c^۲ = b^۲ \quad (۲) \\ (۲) \to (۱) : MF = \dfrac{b^۲}{a} \\ \text{به دلیل مشابه} : NF = \dfrac{b^۲}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow MN = \frac{۲b^۲}{a}$$

رسم بیضی : با داشتن مقادیر c, a می‌توان بیضی را رسم نمود بدین ترتیب که ابتدا نقاط F', F را به فاصلهٔ $2c$ از یکدیگر رسم می‌کنیم، سپس نقاط A', A را به ترتیب در راستِ F و چپِ F' به فاصلهٔ $a-c$ از آنها رسم می‌کنیم. در انتها با محاسبهٔ مقدار b از رابطهٔ $b^۲ = a^۲ - c^۲$ نقاط B', B را نیز مشخص کرده و بیضی را بطور تقریبی رسم می‌کنیم.

مثال ۱ : $a = ۴$ و $c = ۱$

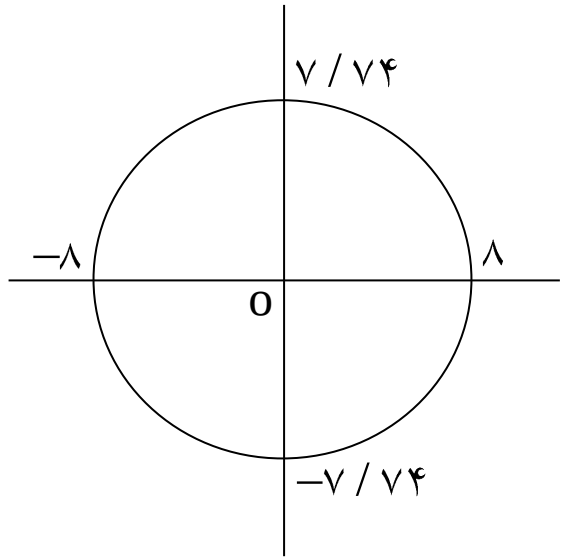
$$b^۲ = a^۲ - c^۲ = ۱۶ - ۱ = ۱۵$$
$$\Rightarrow b = \sqrt{۱۵} \simeq ۳/۸۷$$
$$\frac{c}{a} = \frac{۱}{۴}$$





مثال ۲ : $a = ۸$ و $c = ۲$

$$b^۲ = a^۲ - c^۲ = ۶۴ - ۴ = ۶۰$$
$$\Rightarrow b = \sqrt{۶۰} \simeq ۷/۷۴$$
$$\frac{c}{a} = \frac{۱}{۴}$$

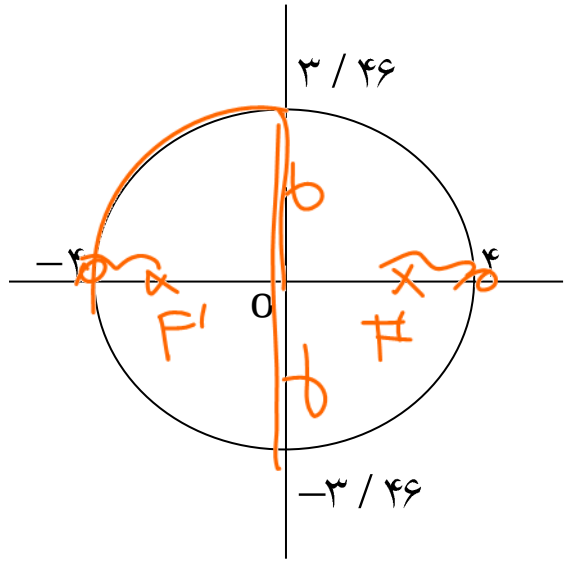


مثال ۳ : $a = ۲$ و $c = ۱$

$$b^۲ = a^۲ - c^۲ = ۴ - ۱ = ۳$$
$$\Rightarrow b = \sqrt{۳} \simeq ۱/۷۳$$
$$\frac{c}{a} = \frac{۱}{۲}$$

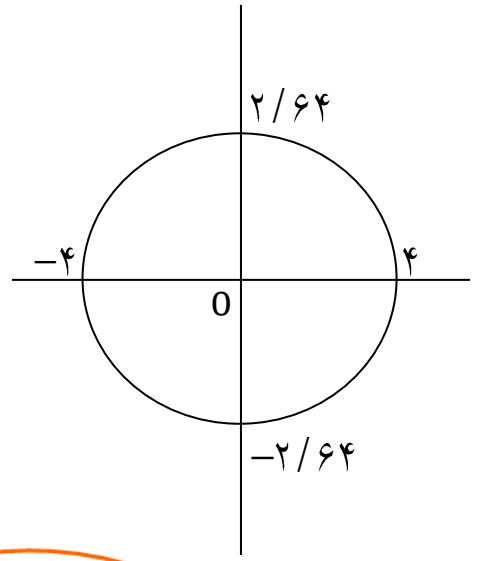
مثال ۴ : $a = ۴$ و $c = ۲$

$$b^۲ = a^۲ - c^۲ = ۱۶ - ۴ = ۱۲$$
$$\Rightarrow b = \sqrt{۱۲} \simeq ۳/۴۶$$
$$\frac{c}{a} = \frac{۱}{۲}$$



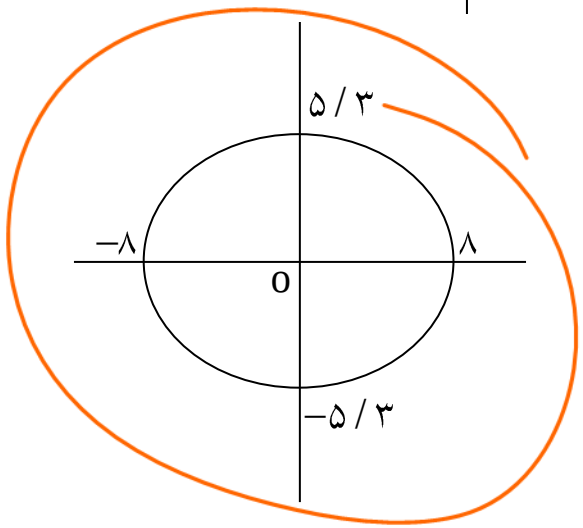
مثال ۵ : $a = ۴$ و $c = ۳$

$$b^۲ = a^۲ - c^۲ = ۱۶ - ۹ = ۷$$
$$\Rightarrow b = \sqrt{۷} \simeq ۲/۶۴$$
$$\frac{c}{a} = \frac{۳}{۴}$$



مثال ۶ : $a = ۸$ و $c = ۶$

$$b^۲ = a^۲ - c^۲ = ۶۴ - ۳۶ = ۲۸$$
$$\Rightarrow b = \sqrt{۲۸} \simeq ۵/۳$$
$$\frac{c}{a} = \frac{۳}{۴}$$



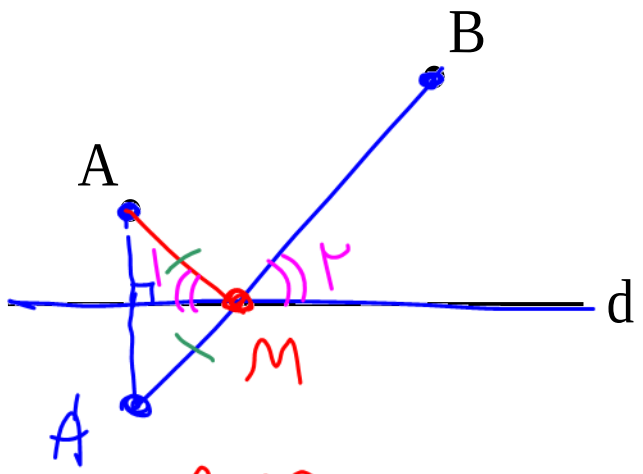
➢ **خروج از مرکز بیضی**: مقدار $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی گوییم که میزان کشیدگی بیضی را نشان می‌دهد. $\left(0 \leq \frac{c}{a} \leq 1\right)$

$\frac{c}{a} \to 1$ شکل بیضی کشیده‌تر شده و به خط نزدیک می‌شود.

$\frac{c}{a} \to 0$ کشیدگی بیضی کمتر شده، به دایره نزدیک‌تر می‌شود.

$\frac{c}{a} = 0$ دایره ، $\frac{c}{a} = 1$ پاره خط

➢ یادآوری مسئلهٔ هرون (پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر) :



$\hat{M}_1 = \hat{M}_2$

$AMB = AM + MB = A'B$

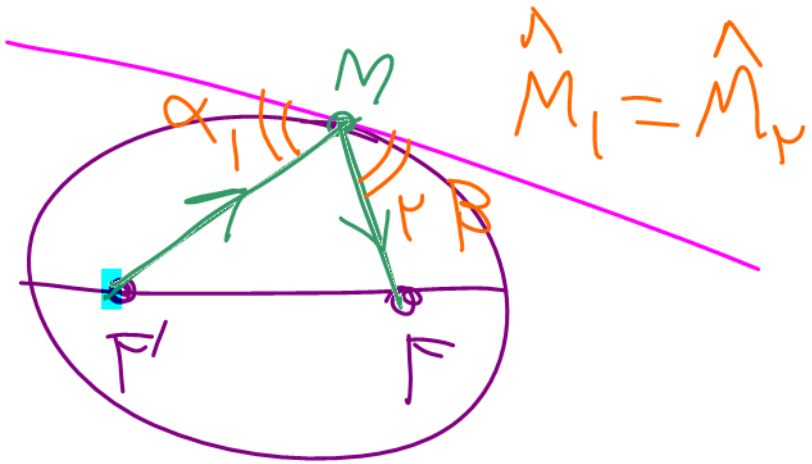
$A'M$

ویژگی بازتابندگی بدنهٔ داخل بیضی :

۱) مجموع فواصل نقطهٔ M (نقطهٔ تماس خط مماس با بیضی) از کانون‌های F , F' کمترین مقدار را دارد. (مسئلهٔ هرون)

۲) $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ (مسئلهٔ هرون)

۳) اگر بدنهٔ داخلی بیضی آینه‌ای باشد، شعاع نوری که از یکی از کانون‌های بیضی بر بدنهٔ داخلی بیضی می‌تابد، انعکاسش از کانون دیگر می‌گذرد. (مسئلهٔ هرون)



۸	اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{۳}{۵}$ و طول قطر کوچک بیضی ۱۶ باشد، طول قطر بزرگ بیضی و فاصله کانونی آن را به دست آورید.	۱/۵

$۲c=?$ $۲a=?$ $۲b=۱۶$ $b=۸$ $\frac{c}{a}=\frac{۳}{۵}$ $a^۲=b^۲+c^۲$

پ) در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد بیضی تبدیل به یک دایره می‌شود.

۱۱	اگر در یک بیضی طول قطرکوچک ۲۴ و فاصله کانون تا مرکز آن برابر ۵ باشد، خروج از مرکز بیضی را به‌دست آورید.	۱

$۲b$ c a $a^۲=b^۲+c^۲$

نهایی
بندی
جمع
پیشرفت، یعنی موفقیت

نهایی جمع بندی

هندسه دوازدهم

حل مسائل بیضی

اپیزود ۱۰ : حل مسایل بیضی

مساله: در یک بیضی، اندازه های قطر بزرگ و فاصله کانونی بترتیب ۸ و ۶ است. طول قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را حساب کنید.

$2b = ?$

$2a \quad 2c$

$a^2 = b^2 + c^2$

$\frac{c}{a}$

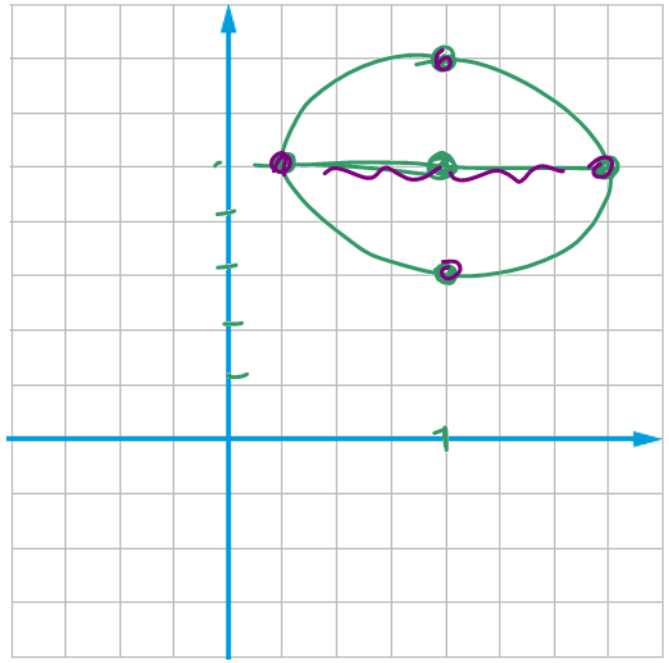
مساله :

در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۶ و قطر کوچک ۴ واحد است.

اگر مرکز این بیضی نقطه‌ای با مختصات (۴،۵) باشد :

الف) فاصلهٔ کانونی بیضی را پیدا کنید.

ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ و قطر کوچک و همچنین کانون‌های بیضی را بنویسید.



مساله : اگر در یک بیضی داشته باشیم؛ $a=۵$ و $b=۳$ آنگاه فاصله کانونی و خروج از مرکز بیضی را حساب کنید.

$a^۲ = b^۲ + c^۲$

$۲c$

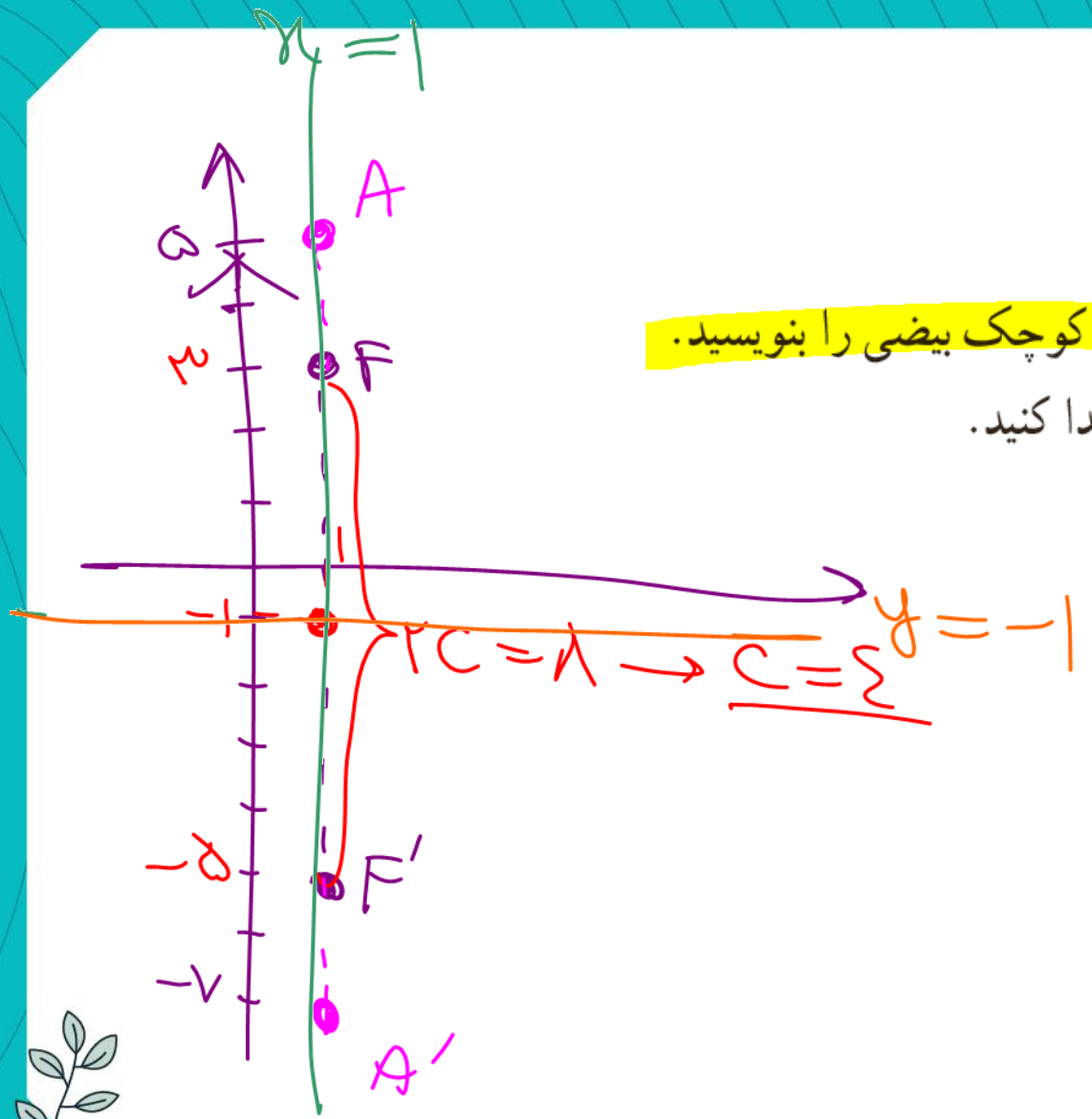
$\frac{c}{a}$

مسالهٔ :

کانون‌های یک بیضی نقاط $(۱, ۳)$ و $(۱, -۵)$ است.

الف) فاصلهٔ کانونی، مختصات مرکز بیضی و معادلهٔ قطرهای بزرگ و کوچک بیضی را بنویسید.

ب) اگر $a=۶$ باشد، اندازهٔ قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.



مساله:

خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{۴}{۵}$، مرکز آن (۱- ، ۴-) و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است.

الف) طول قطر کانونی و فاصلهٔ کانونی را محاسبه کنید.

ب) مختصات نقاط دو سر قطر کوچک و قطر بزرگ و کانون‌های بیضی را پیدا کنید.

$\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵}$ $\quad c=\frac{۴}{۵}a$

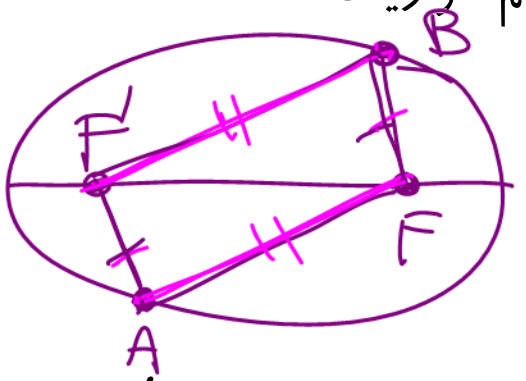
$۲b=۶ \rightarrow b=۳$

$a^۲=b^۲+c^۲$

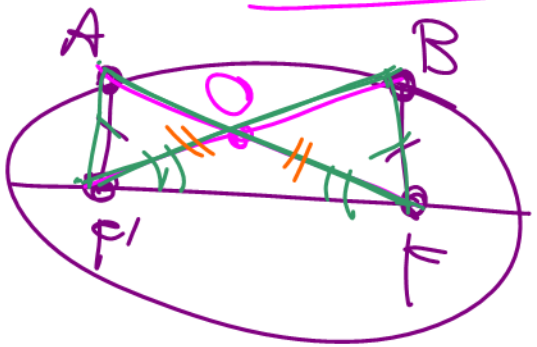
$a^۲=۹+\frac{۱۶}{۲۵}a^۲ \longrightarrow a\surd \rightarrow c\surd$

مساله: دو نقطهٔ B, A روی یک بیضی و F', F کانون‌های بیضی‌اند. A به کانون F' نزدیکتر و B به کانون F نزدیکتر است. اگر $AF' = BF$ باشد، نشان دهید؛

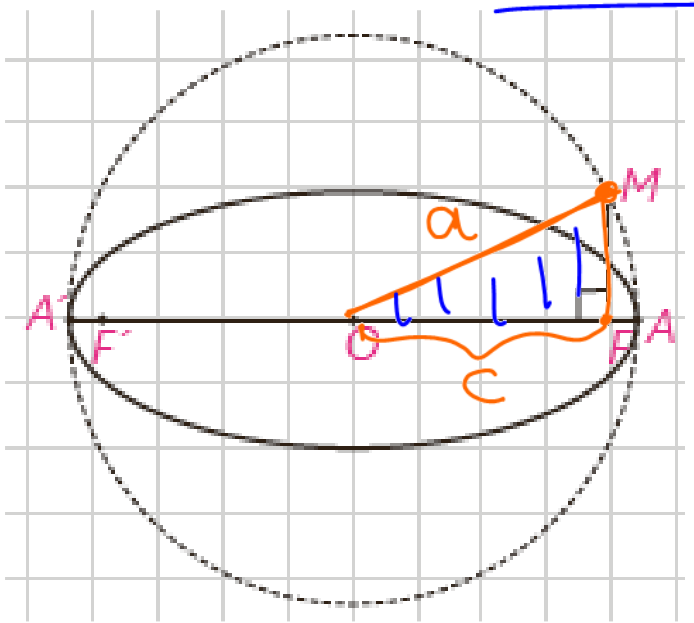
الف) در حالتی که دو پاره‌خط AF و BF' یکدیگر را درون بیضی قطع نکنند، با هم موازیند.



ب) در حالتی که AF و BF' یکدیگر را درون بیضی و در نقطه‌ای مانند O قطع کنند، مثلث FOF' متساوی‌الساقین است.



مساله: قطر دایرهٔ C، مانند شکل، قطر بزرگ بیضی e است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند M قطع کند، ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.



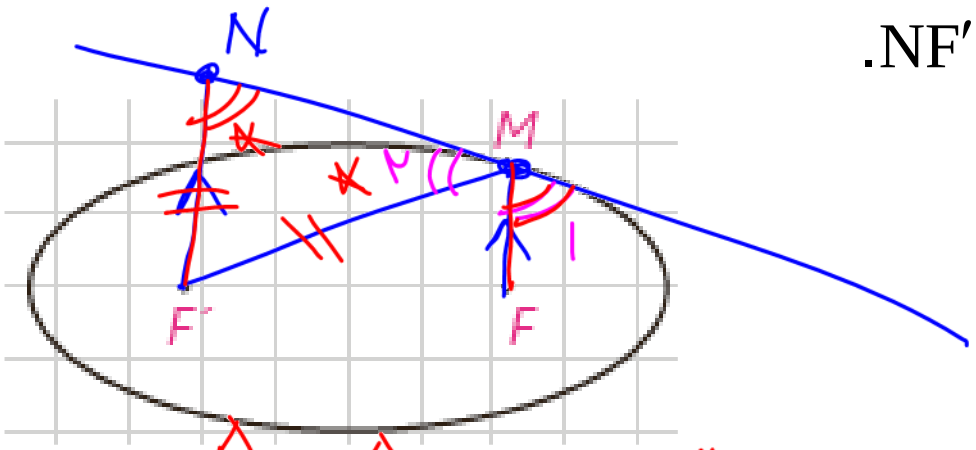
$$2R = 2a$$

$$a = R$$

$$MF^2 = a^2 - c^2 = b^2$$

$$MF = b$$

مساله: در شکل مقابل نقطهٔ M روی بیضی و کانون‌های F , F' مشخص شده‌اند. خط d را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطهٔ M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطهٔ F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. ثابت کنید $NF' = MF'$.

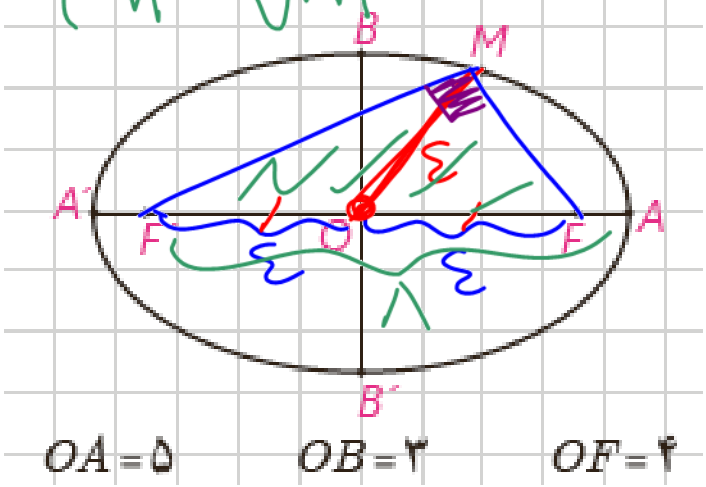


$\hat{N} = \hat{M}_1$

$\hat{M}_1 = \hat{M}_2$

$\rightarrow \hat{N} = \hat{M}_2$

مساله: نقطهٔ M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصلهٔ آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است؛

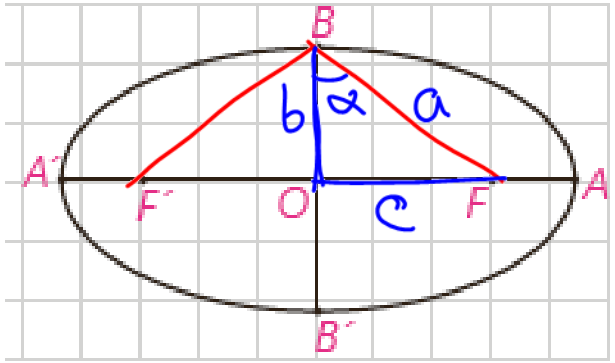


الف) نشان دهید $OM = OF = OF'$.

ب) نشان دهید مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

ج) طول‌های MF و MF' را به دست آورید.

مساله: در بیضی مقابل قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازهٔ زاویهٔ FBF' چند درجه است؟



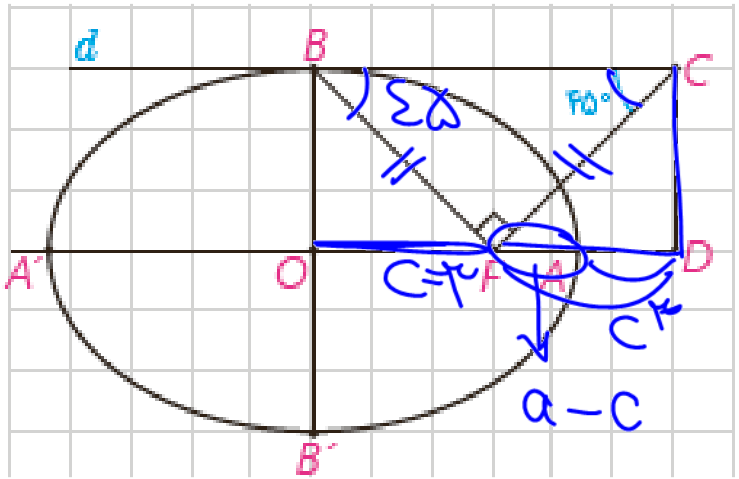
$$2a = 2 \times 2b$$

$$a = 2b$$

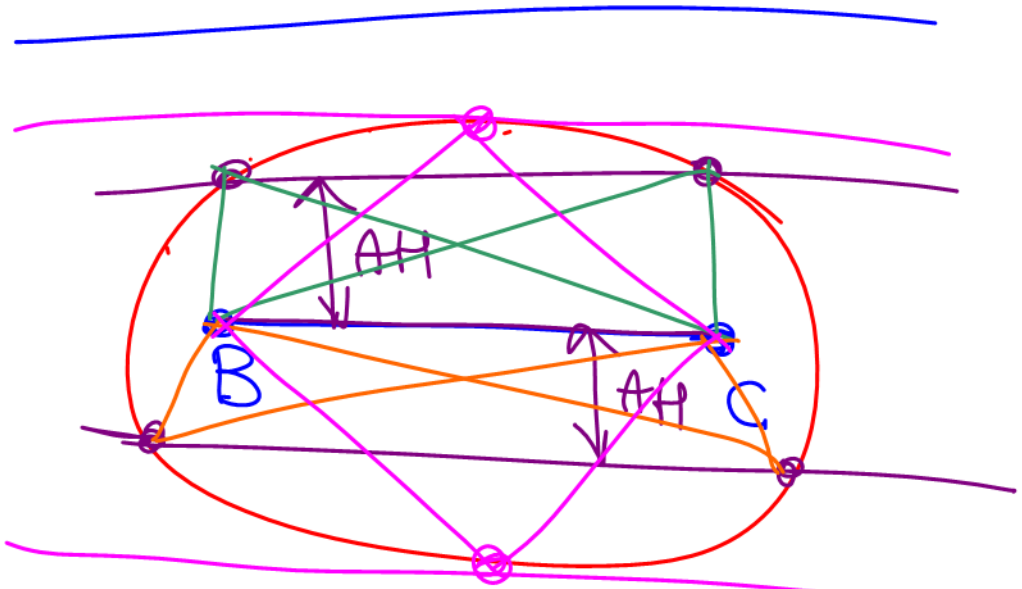
$$\cos\alpha = \frac{b}{a} = \frac{b}{2b} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 60^\circ \rightarrow FBF' = 120^\circ$$

مسئله: در بیضی مقابل AA' و BB' دو قطراند. خط d در نقطهٔ B بر بیضی مماس است. پاره‌خط BF را رسم می‌کنیم و در نقطهٔ F عمودی بر BF رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطهٔ C قطع کند و از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می‌کنیم تا آن را در نقطه‌ای مانند D قطع کند. اگر $B\hat{C}F = ۴۵^\circ$، مقدار $\frac{AD}{AF}$ را به دست آورید.



مساله: فرض کنید از مثلث ABC اندازه ضلع BC و ارتفاع AH و محیط مثلث داده شده باشد. با استفاده از خواص بیضی، روش رسم این مثلث را توضیح دهید.



$AB+AC+BC=2p$ محیط

$AB+AC=2p-BC$ محیط

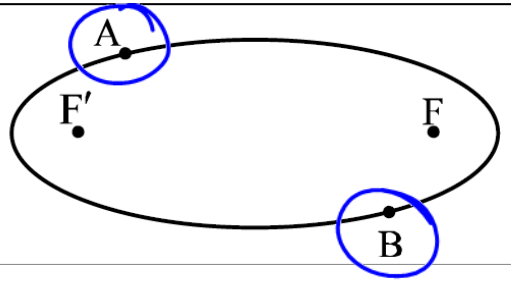
مجموع نزدیک B و C

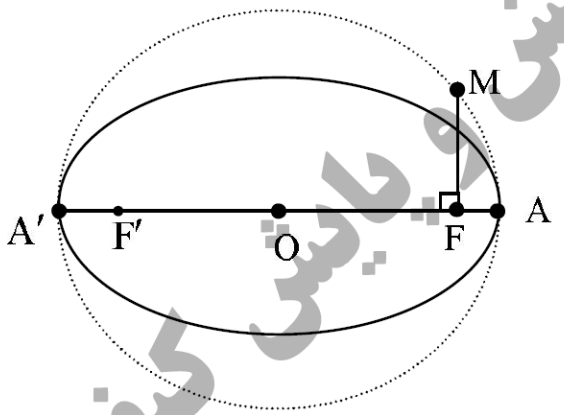
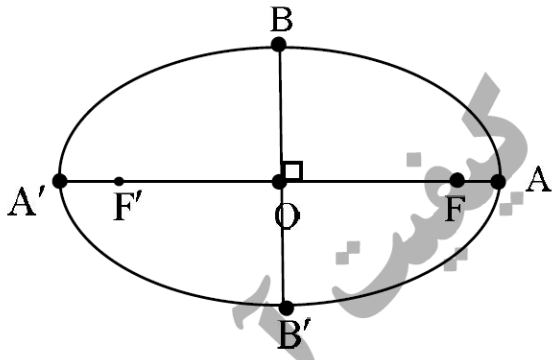
لذا نقطه A مکان ثابت

است ← بیضی

A در یک بیضی با کانون B و C حرکت داشت.

۹	دو نقطه A و B مطابق شکل روی بیضی و نقاط F و F' کانونهای بیضی‌اند. اگر $AF' = BF$ باشد ثابت کنید دو پاره خط AF و BF' موازی‌اند.	۱/۲۵

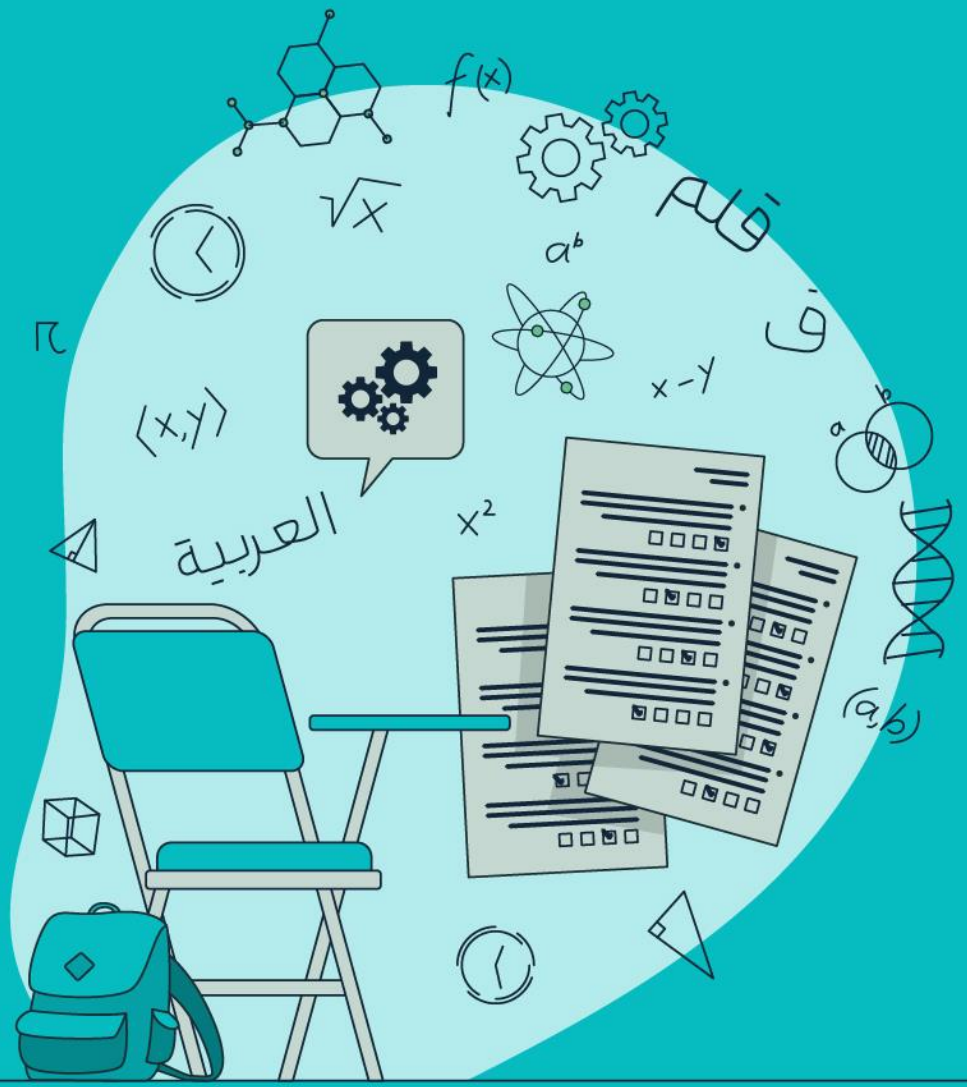


۹	قطردایره C مانند شکل، قطر بزرگ بیضی است واز کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است. 	۱
۱۰	در بیضی مقابل طول قطر بزرگ $\sqrt{۲}$ برابر طول قطر کوچک است. اندازه زاویهٔ $F\hat{B}F'$ چند درجه است؟ 	۱/۵

۲

نهایی
بندی
جمع
پیشرفت، یعنی موفقیت

نهایی بندی جمع

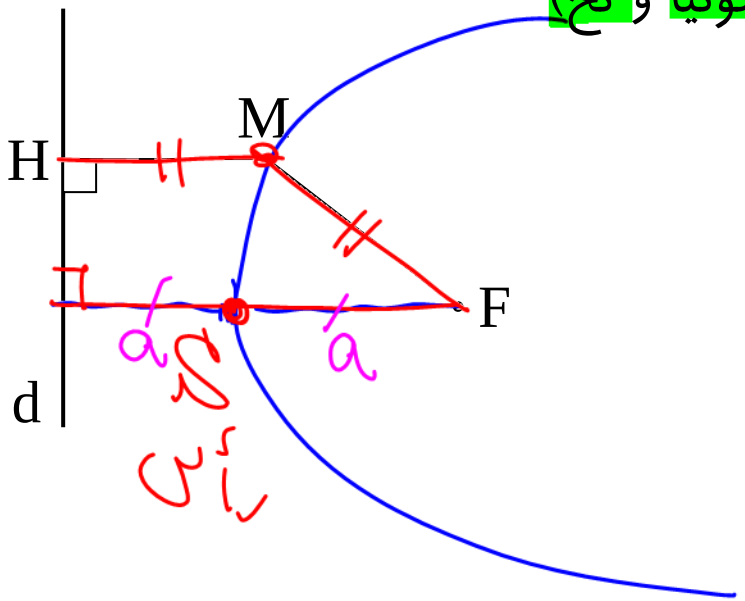


هندسه دوازدهم

سهمی

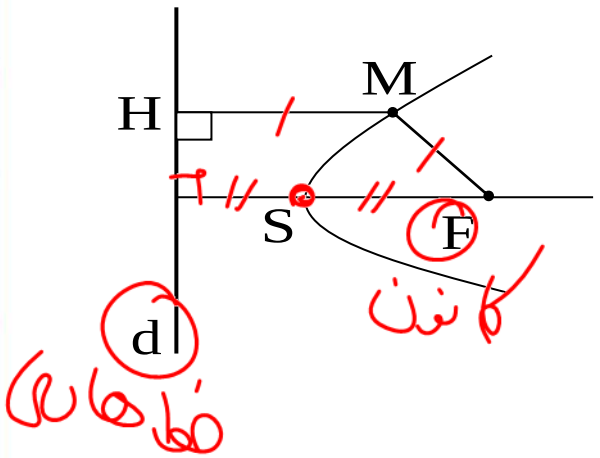
اپیزود ۱۱ : سهمی

➢ **مسئلهٔ ترسیم** : خط d و نقطهٔ F را در نظر بگیرید. مکان هندسی نقاطی از صفحه را تعیین کنید که به فاصلهٔ یکسانی از خط d و نقطهٔ F قرار داشته باشند. (ترسیم با مداد و گونیا و نخ)



سهمی : مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه ثابت غیرواقع بر آن خط، به یک فاصله باشند. خط ثابت را **خط هادی** و نقطهٔ ثابت را **کانون** سهمی می‌نامیم.

اگر از F خطی بر d عمود کنیم، سهمی را در رأس سهمی قطع می‌کند.



➢ **معادلهٔ سهمی به رأس مبدأ مختصات :**

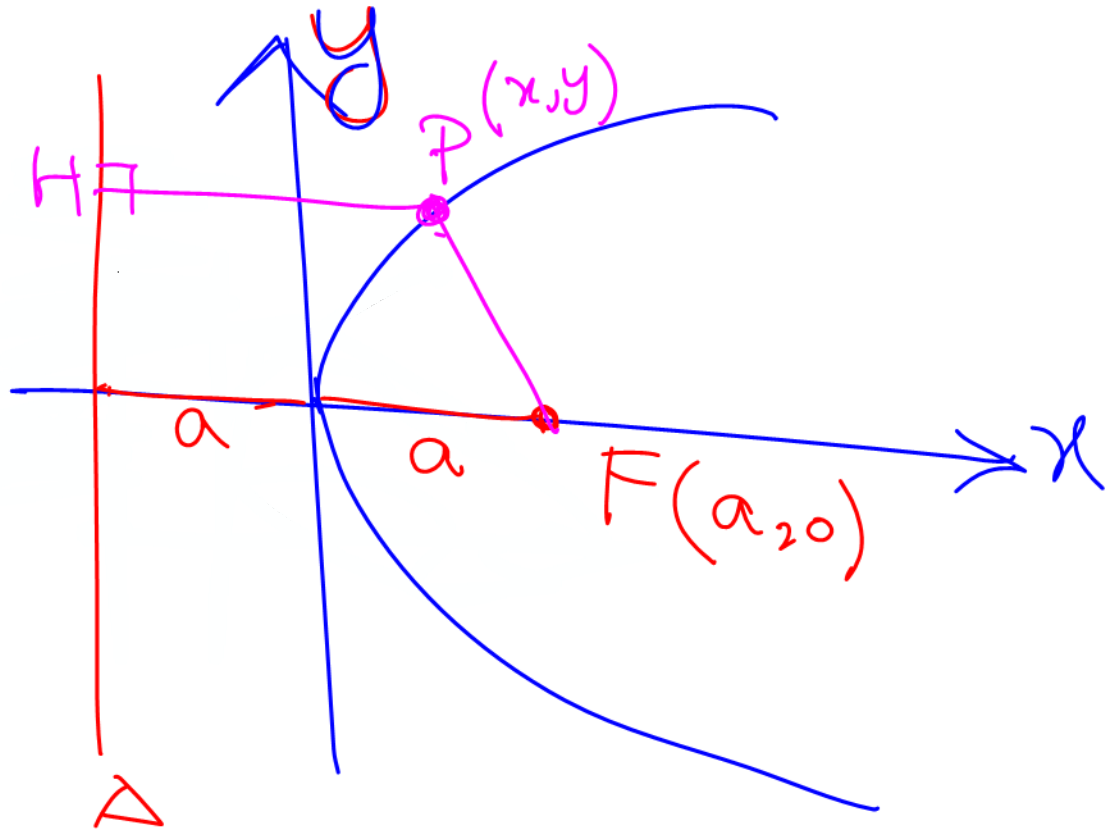
$$H(-a, y)$$

$$PF = PH$$

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{(x+a)^2 + 0}$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$\Rightarrow \boxed{y^2 = 4ax}$$

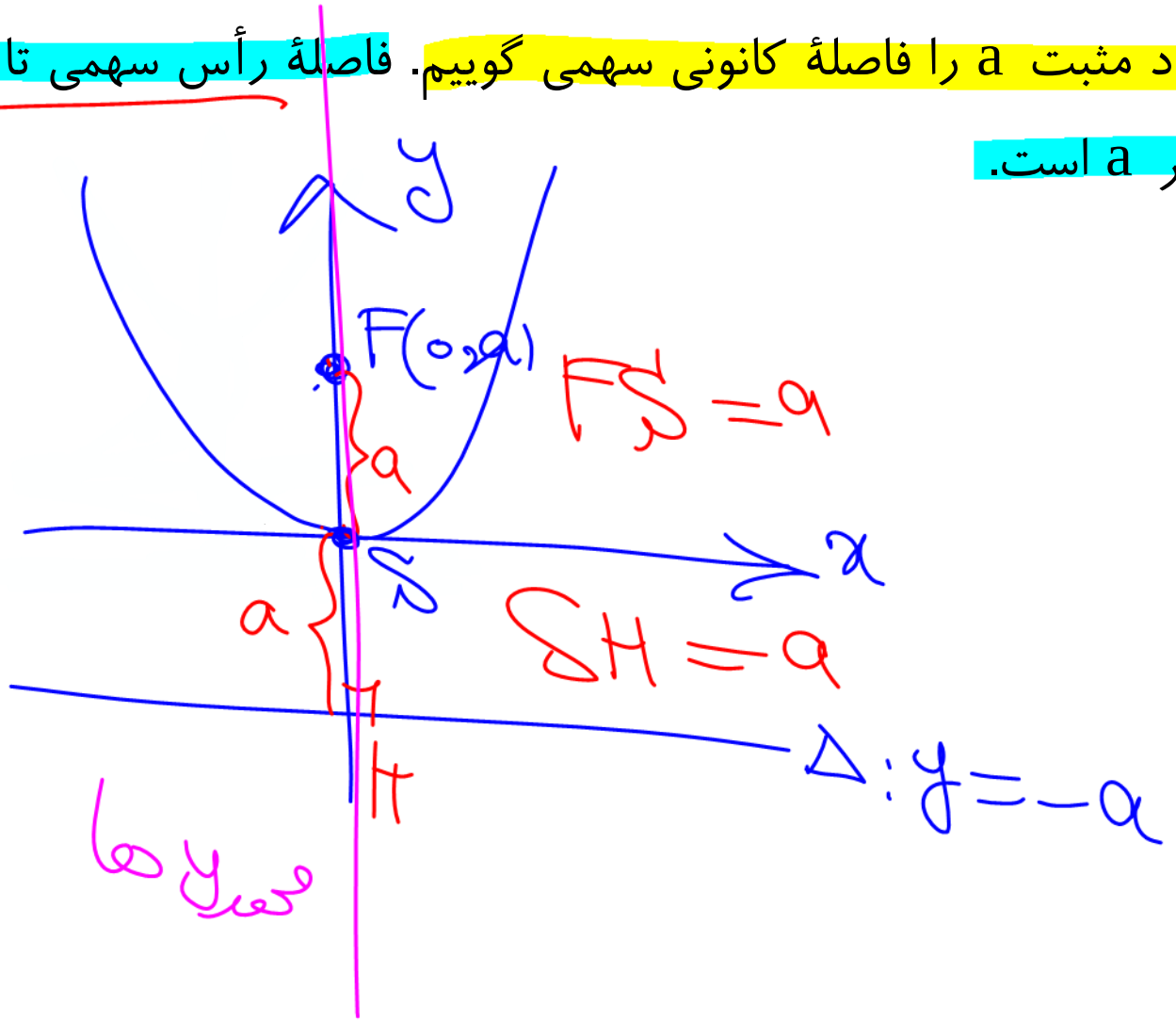


دهانهٔ سهمی	محور سهمی	خط هادی	کانون	معادلهٔ سهمی $(a>0)$
رو به راست	محور x	$x=-a$	$(a,0)$	$y^2=4ax$
رو به چپ	محور x	$x=a$	$(-a,0)$	$y^2=-4ax$
رو به بالا	محور y	$y=-a$	$(0,a)$	$x^2=4ay$
رو به پایین	محور y	$y=a$	$(0,-a)$	$x^2=-4ay$

فاصلهٔ کانونی سهمی: عدد مثبت a را فاصلهٔ کانونی سهمی گوییم. فاصلهٔ رأس سهمی تا کانون و همچنین رأس سهمی تا خط هادی برابر a است.

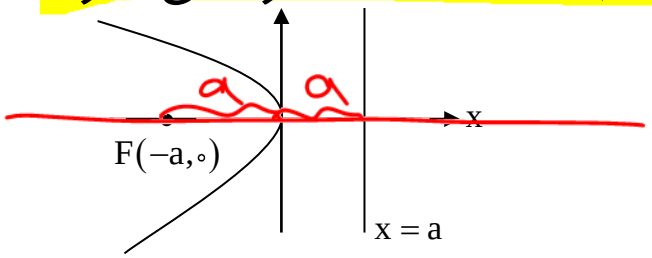
$F(0,a)$

$x^2 = 4ay$



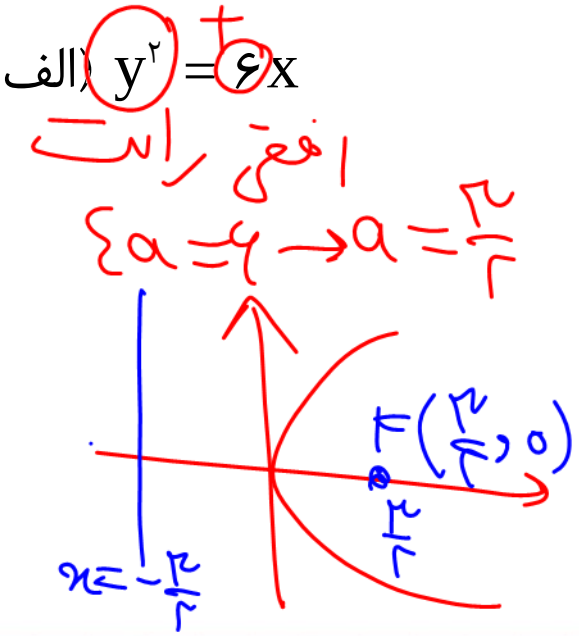
محور تقارن سهمی (محور کانونی سهمی - محور سهمی) : خطی که از کانون به خط هادی عمود می‌شود را محور تقارن سهمی یا محور کانونی و یا به اختصار محور سهمی می‌گوییم.

(محور xها «سهمی افقی» یا محور yها «سهمی قائم»)



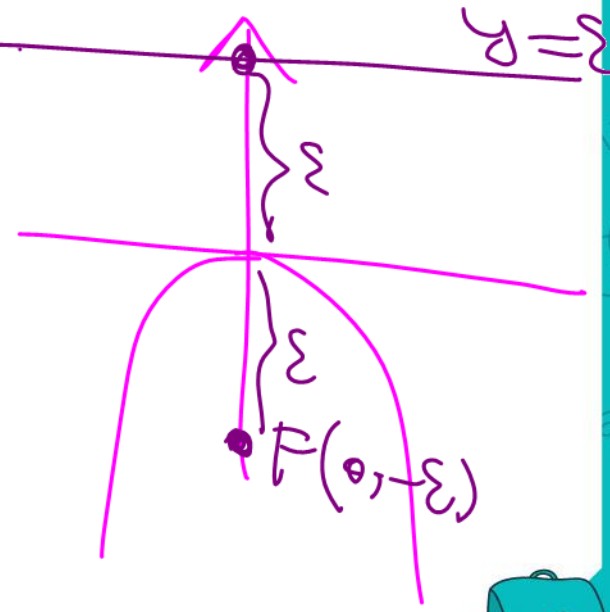
مساله : معادله‌های زیر هرکدام چه نوع سهمی هستند؟ تشریح کنید.

الف) $y^2 = 6x$

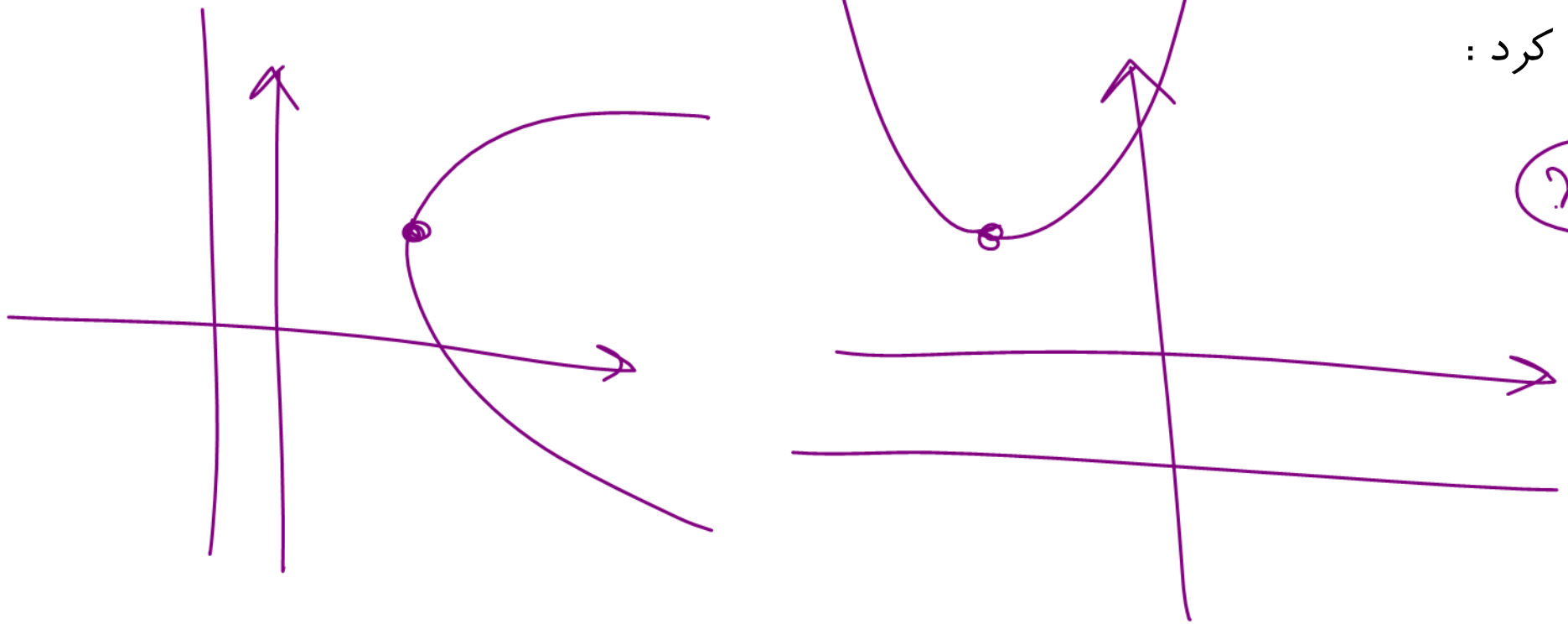


ب) $x^2 = -16y$

قائم رو به پایین
۴a = ۱۶ → a = ۴



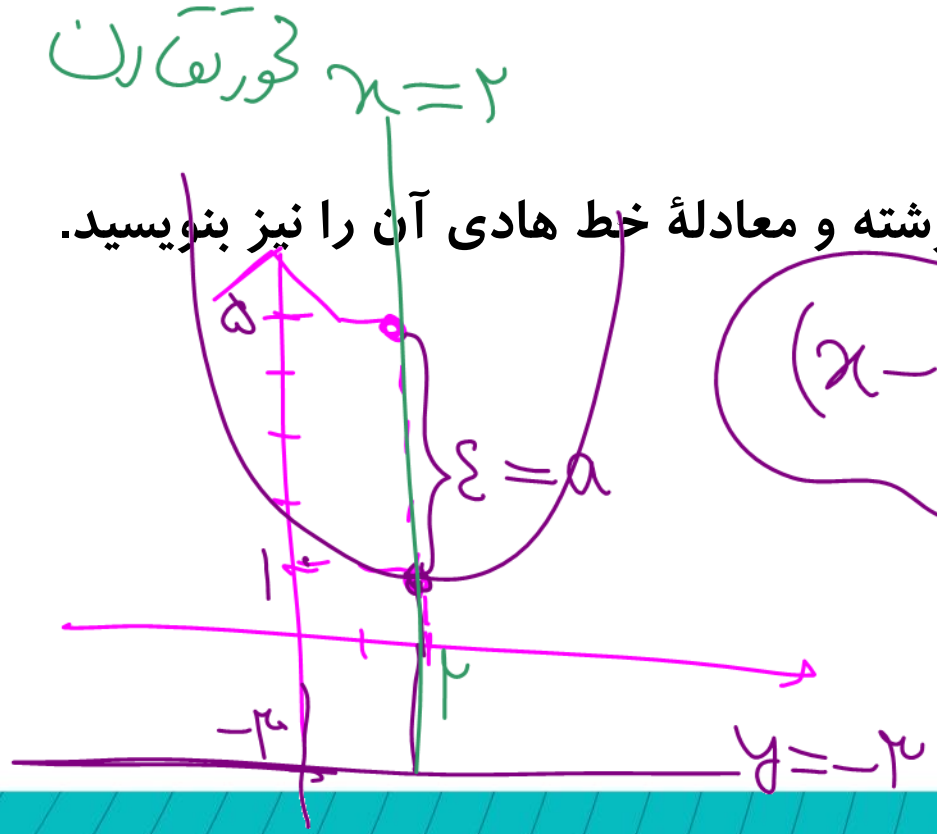
➢ **انتقال سهمی با انتقال مبدأ مختصات با محورهای موازی** : اگـر رأس سـهمی را از نقطـهٔ $(0,0)$ بـه نقطـهٔ (h,k) منتقل کنیم، x به $x-h$ و y به $y-k$ تبدیل می‌شود که در اینصورت معادلات سهمی بصورت زیر تغییر خواهد کرد :



دهانهٔ سهمی	محور سهمی	خط هادی	کانون	معادلهٔ سهمی
رو به راست	خط $y=k$	$x=-a+h$	$(a+h,k)$	$(y-k)^2=4a(x-h)$
رو به چپ	خط $y=k$	$x=a+h$	$(-a+h,k)$	$(y-k)^2=-4a(x-h)$
رو به بالا	خط $x=h$	$y=-a+k$	$(h,a+k)$	$(x-h)^2=4a(y-k)$
رو به پایین	خط $x=h$	$y=a+k$	$(h,-a+k)$	$(x-h)^2=-4a(y-k)$

مثلاً معادلهٔ $(y-k)^2=4a(x-h)$ معادلهٔ یک سهمی است که به اندازهٔ h به سمت راست و بـه انـدازهٔ k به سمت بالا $(k>0\ ,\ h>0)$ انتقال یافته است.

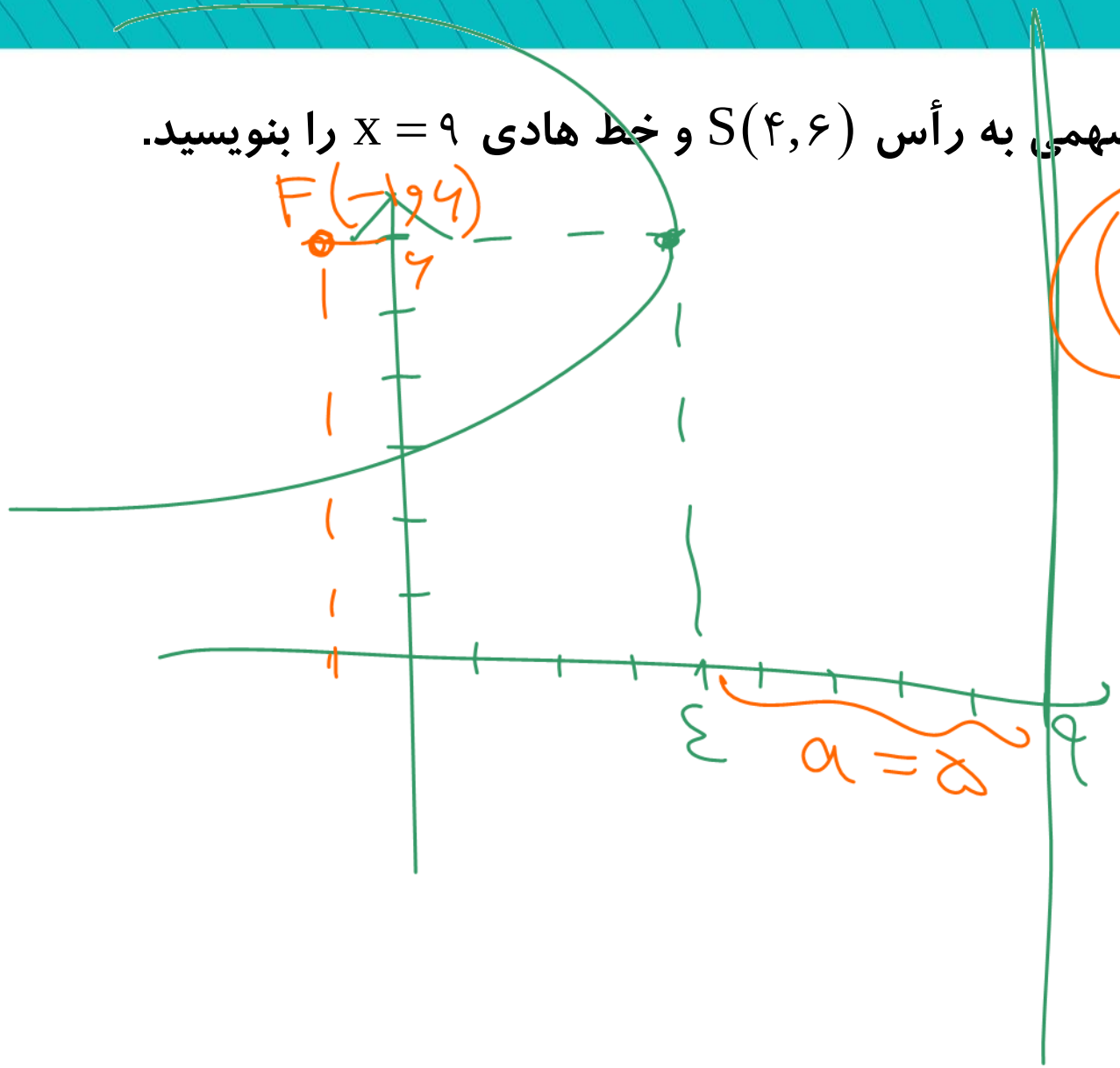
بدیهی است در اینصورت کانون سهمی نقطهٔ $F(a+h\ ,\ k)$، خط هـادی سـهمی خـط $x=-a+h$ و محـور تقارن سهمی خط $y=k$ خواهد بود.



$$(x-2)^2=16(y-1)$$

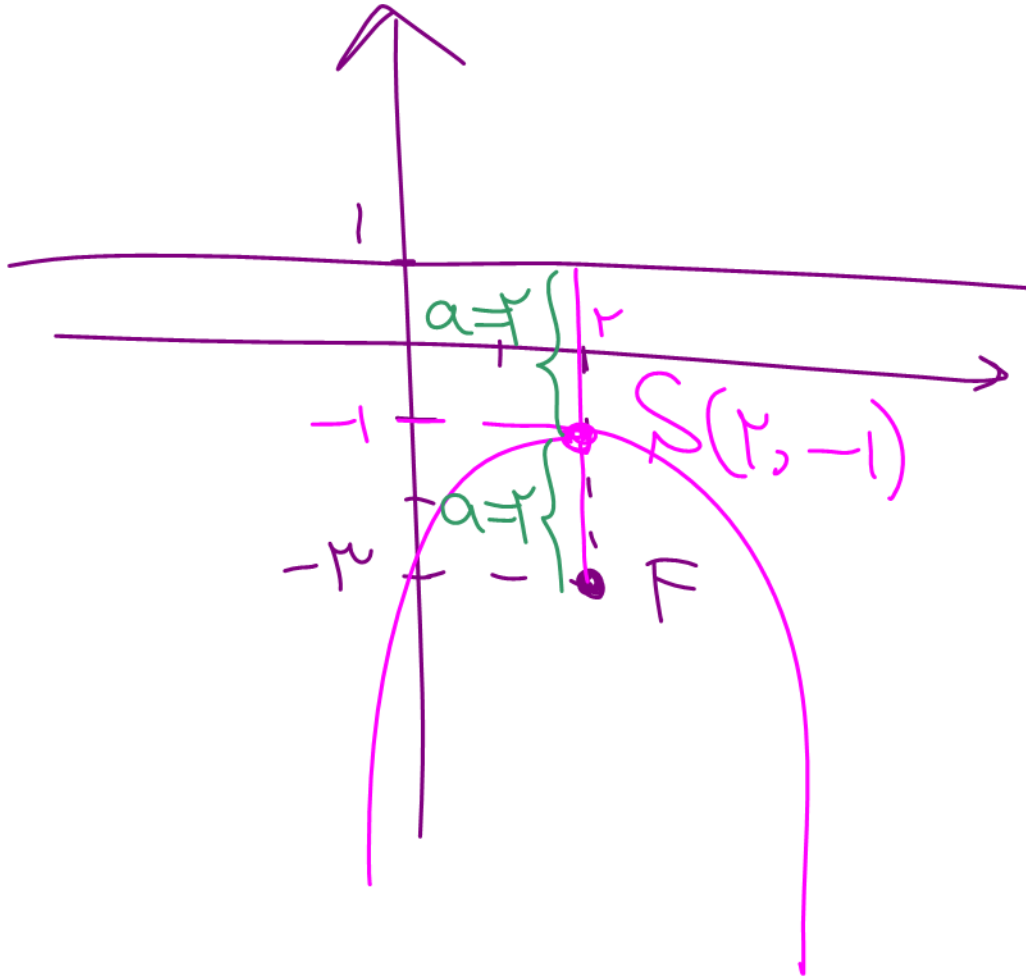
مثال: معادلهٔ سهمی به رأس $S(2,1)$ و کانون $F(2,5)$ را نوشته و معادلهٔ خط هادی آن را نیز بنویسید.

مثال: مختصات کانون و همچنین معادلهٔ سهمی به رأس $S(۴,۶)$ و خط هادی $x = ۹$ را بنویسید.



$$(y-۶)^۲ = -۲۰(x-۴)$$

مثال: معادلهٔ سهمی بنویسید که کانون آن $F(۲,-۳)$ و خط هادی آن $y=۱$ باشد.



$$(x-۲)^۲=-۸(y+۱)$$

مثال: معادلهٔ سهمی بنویسید که $S(۱,۲)$ رأس و $F(۱,-۲)$ کانون آن باشد.

تبدیل معادلات غیراستاندارد سهمی به معادلات استاندارد : متغیری را که از درجه ۲ است مربع کامل کرده و سمت چپ معادله نگه می‌داریم و اعداد ثابت و متغیر درجه ۱ را به سمت راست می‌بریم و از ضریب متغیر درجه ۱ فاکتور می‌گیریم. معادلهٔ استاندارد شده است.

$$y = x^{۲} + ۳x + ۵$$

$$x^{۲} + ۳x = y - ۵$$

$$x^{۲} + ۳x + \frac{۹}{۴} = y - ۵ + \frac{۹}{۴}$$

$$\left(x + \frac{۳}{۲}\right)^{۲} = ۱\left(y - \frac{۱۱}{۴}\right)$$

$$S\left(-\frac{۳}{۲}, \frac{۱۱}{۴}\right)$$

مسئله : مختصات رأس، کانون و معادلات خط هادی و محور تقارن سهمی زیر را تعیین کنید.

$y^2 - 2y + 8x + 9 = 0$

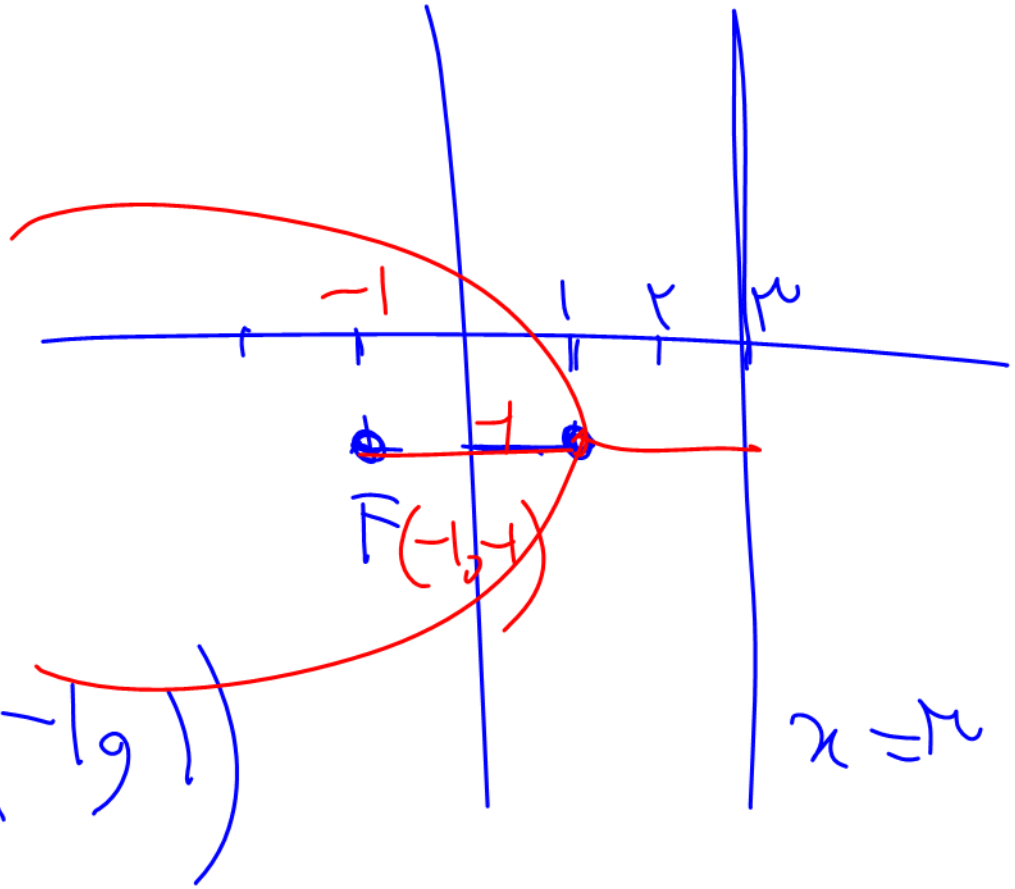
$y^2 - 2y = -8x - 9$

$y^2 - 2y + 1 = -8x - 9 + 1$

$(y-1)^2 = -8(x+1)$

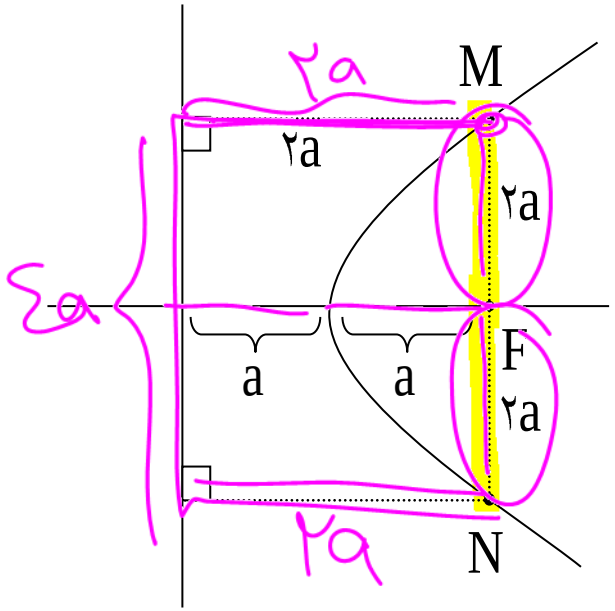
$4a = 8$

$a = 2$



وتر کانونی سهمی : خط عمود بر محور تقارن در کانونی سهمی، سهمی را در نقاط N, M قطع می‌کند.

MN را وتر کانونی سهمی گوییم.



$$MN = |۴a|$$

رسم سهمی به کمک معادلهٔ استاندارد : ابتدا رأس و کانون سهمی را در محور مختصات مشخص می کنیم سپس طبق ویژگی وتر کانونی سهمی، روی خطی عمود بر محور تقارن سهمی در F دو نقطه بـه فاصـلهٔ ۲a در طرفین F مشخص می کنیم و نقاط B', B می‌نامیم. نقاط B', B, A شکل تقریبی سهمی را نشان می‌دهند.

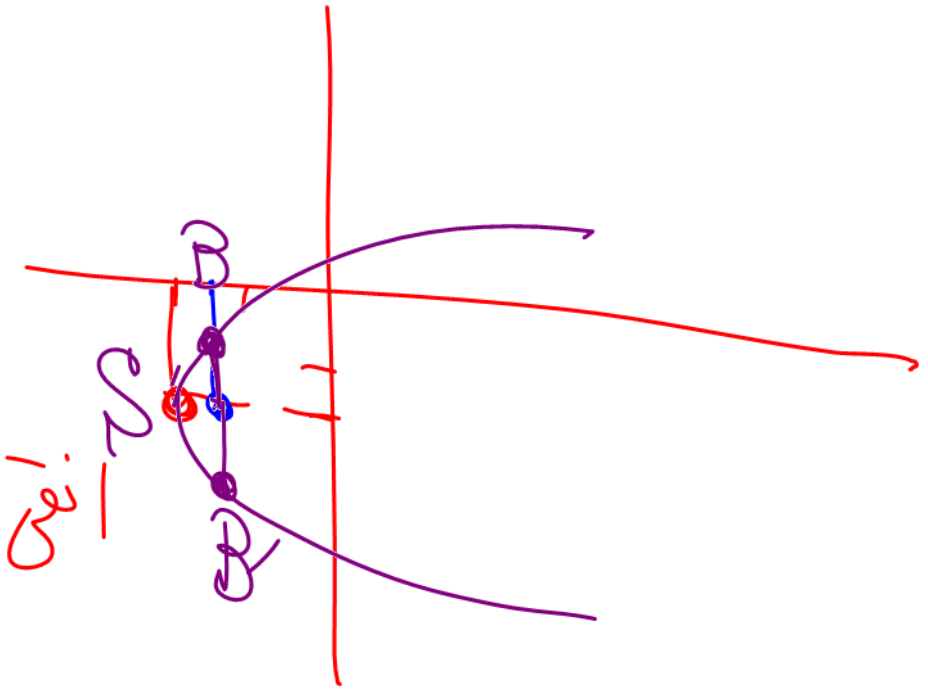
$$y^2 = 2x - 4y$$

$y^2 + 4y + 4 = 2x + 4$

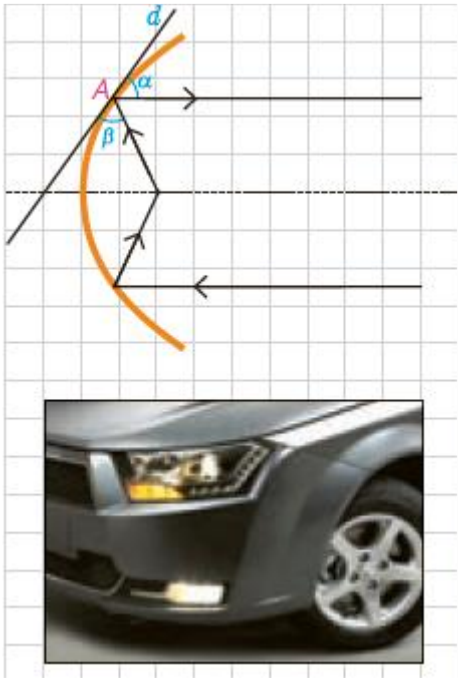
$(y+2)^2 = 2(x+2)$

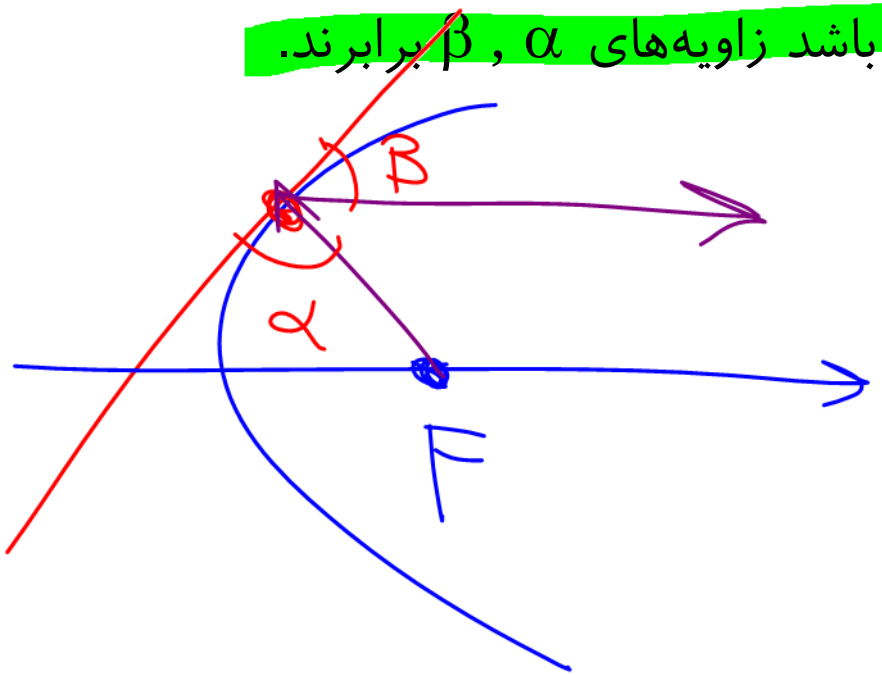
$S(-2,-2)$

$4a = 2 \rightarrow a = \frac{1}{2}$



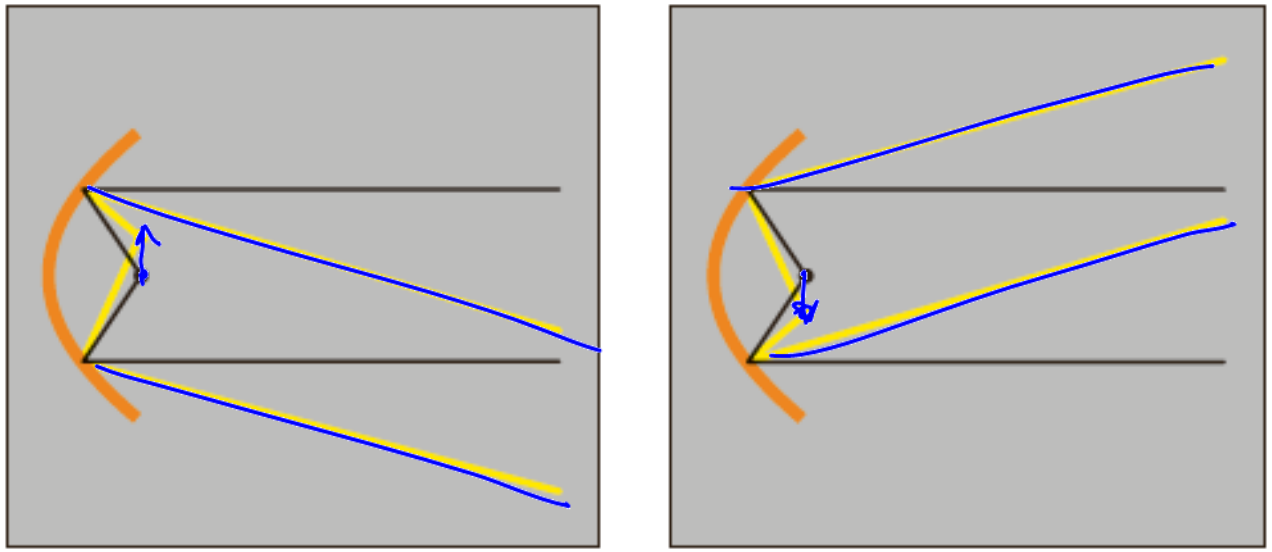
➢ **ویژگی بازتابندگی سهمی و کاربردهای آن** : یکی از ویژگی‌های مهم سهمی این است که هر شعاع نوری که از کانون آن به بدنهٔ سهمی بتابد بازتاب آن موازی با محور سهمی بازخواهد گشت و برعکس هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنهٔ سهمی بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت. درواقع اگر خط d بر سهمی مماس و نقطهٔ A نقطهٔ تماس آن باشد زاویه‌های α , β برابرند.



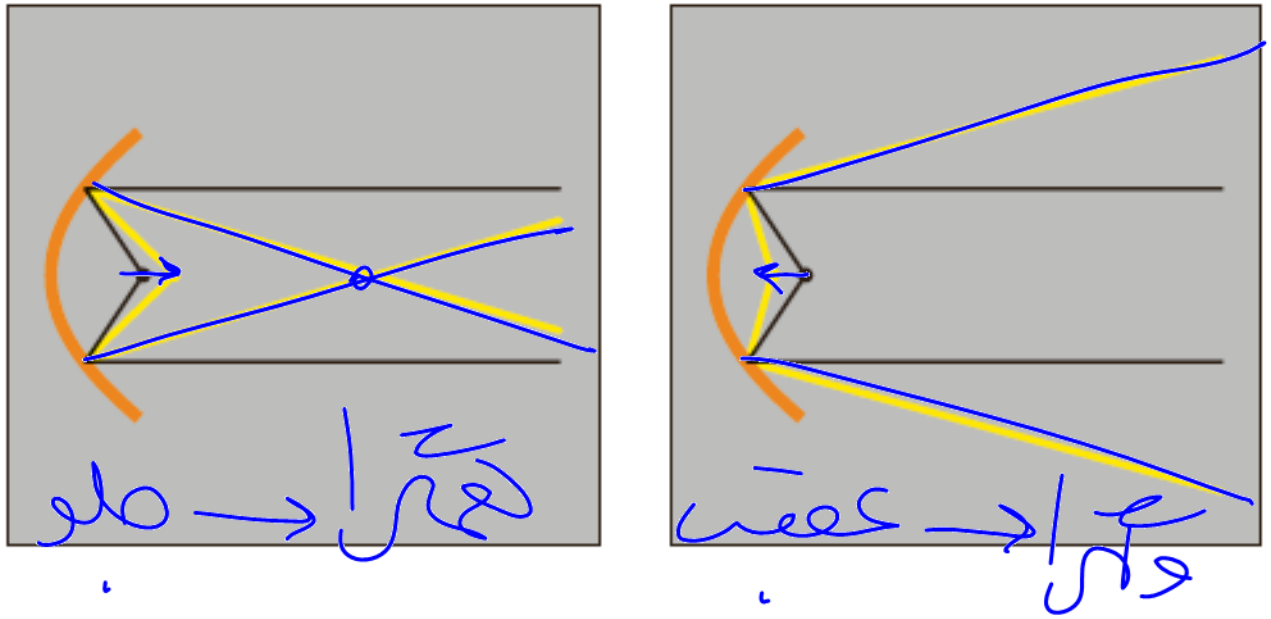


از این ویژگی در ساخت بسیاری از وسایل استفاده شده است. به طور مثال چراغ جلوی اتومبیل‌ها را معمولاً به گونه‌ای می‌سازند که جداره پشت لامپ به حالت سهمی باشد و جنس آینه‌ای داشته باشد و لامپ را در کانون این سهمی قرار می‌دهند. در این صورت حتی شعاع‌های نوری که به عقب تابیده می‌شوند پس از برخورد به جداره سهموی پشت لامپ به صورت شعاع‌هایی موازی با محور سهمی به جلو بازتاب می‌یابند و روشنایی بیشتری به وجود می‌آورند.

با قرارگرفتن لامپ در راستای عمودی یکسان با کانون سهمی اما کمی بالاتر یا پایین‌تر، شعاع‌های نور کماکان موازی با هم (نه موازی با محور) اما رو به بالا یا پایین خارج می‌شوند که اصطلاحاً نور بالا یا نور پایین ایجاد می کنند.



اگر لامپ در راستای افق کانون قرار گیرد و کمی جلوتر یا کمی عقب‌تر قرار گیرد شعاع‌های نور با هم موازی خارج نمی‌شوند.



۱۰	سهمی $y^۲ - ۲y + ۸x + ۹ = ۰$ مفروض است. الف) مختصات رأس، کانون و خط هادی سهمی را به‌دست آورید. ب) نمودار آن را رسم کنید.	۲

۱۲	الف) مختصات رأس، کانون و معادله خط هادی سهمی $x^۲ - ۴y + ۸x = ۰$ را به‌دست آورید. ب) نمودار سهمی را با استفاده از نقاط کمکی رسم کنید.	۲/۵

نهایی
بندی
جمع
پیشرفت، یعنی موفقیت

جمع بندی نهایی

هندسه دوازدهم

حل مسائل سهمی

اپیزود ۱۲ : حل مسایل سهمی

مساله: مختصات رأس و کانون سهمی به معادلهٔ $y = ax^2 + bx + c$ را بدست آورید.

$$ax^2 + bx = y - c$$

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) = y - c$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{1}{a}(y - c) + \frac{b^2}{4a^2}$$

مساله: سهمی به معادلهٔ $y^2 = 4x - 4$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم. مختصات نقاط برخورد سهمی و دایره را بیابید.

$y^2 = 4(x-1)$

راس سهمی

$S(1,0)$

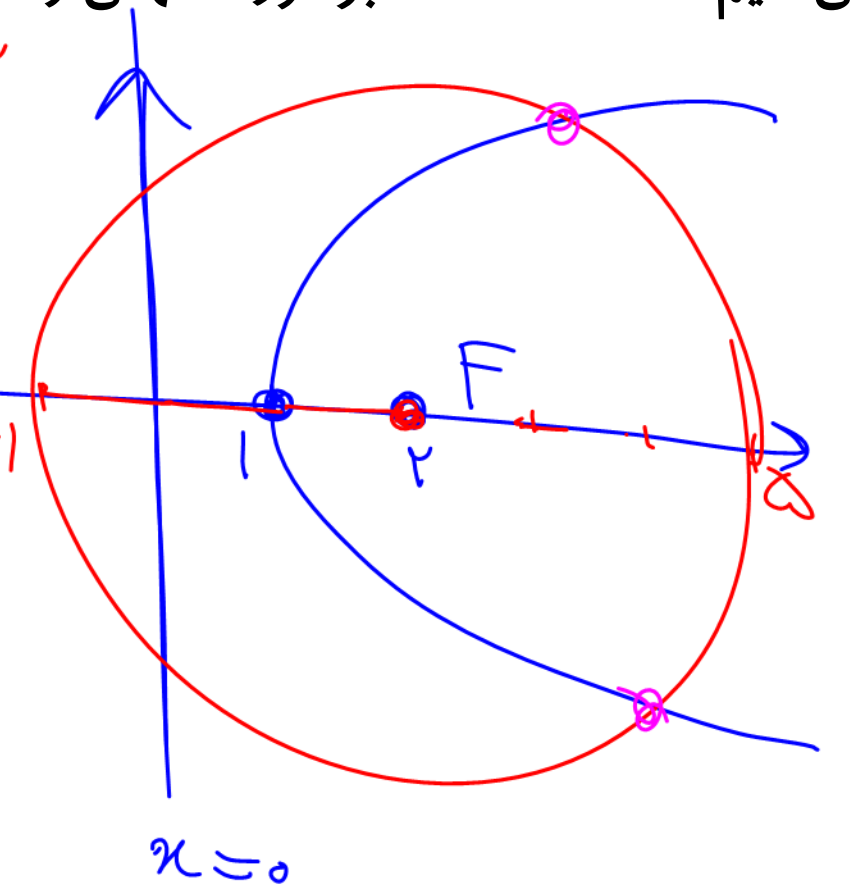
$4a = 4 \rightarrow a = 1$

$F(2,0)$ ، $R = 3$

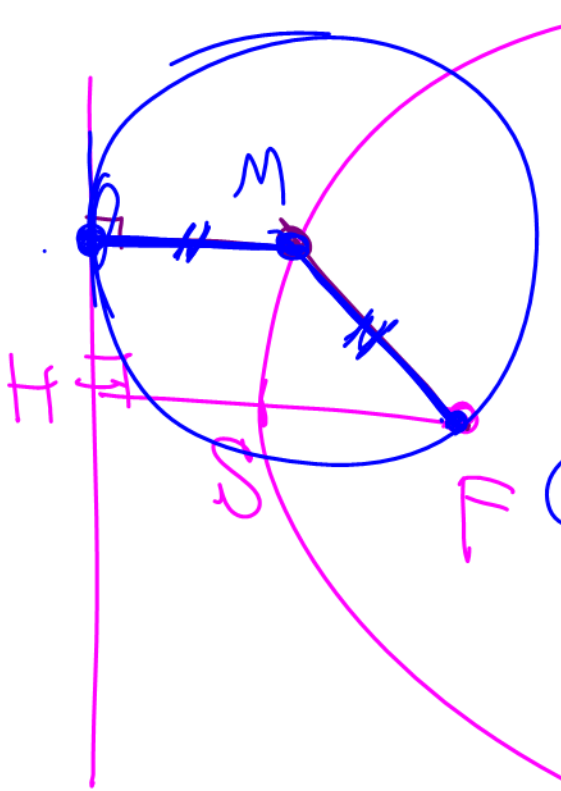
$(x-2)^2 + y^2 = 9$

$\begin{cases} y^2 = 9 - (x-2)^2 \\ y^2 = 4x - 4 \end{cases}$

$x = 1$



مساله: سهمی با کانون F و خط هادی d مفروض است. ثابت کنید مرکز هر دایره که از F بگذرد و بر d مماس باشد، روی سهمی قرار دارد.



مرکز دایره‌ای که از F بگذرد و بر d مماس باشد، از F و d به یک فاصله است و چون هر نقطه‌ای که از F و d به یک فاصله باشد، بر سهمی است پس مرکز این دایره بر سهمی است.

مساله: مقدار k را طوری تعیین کنید که فاصلهٔ کانون تا رأس سهمی $۳(y-۱)^۲ = kx+۲$ برابر ۱ باشد.

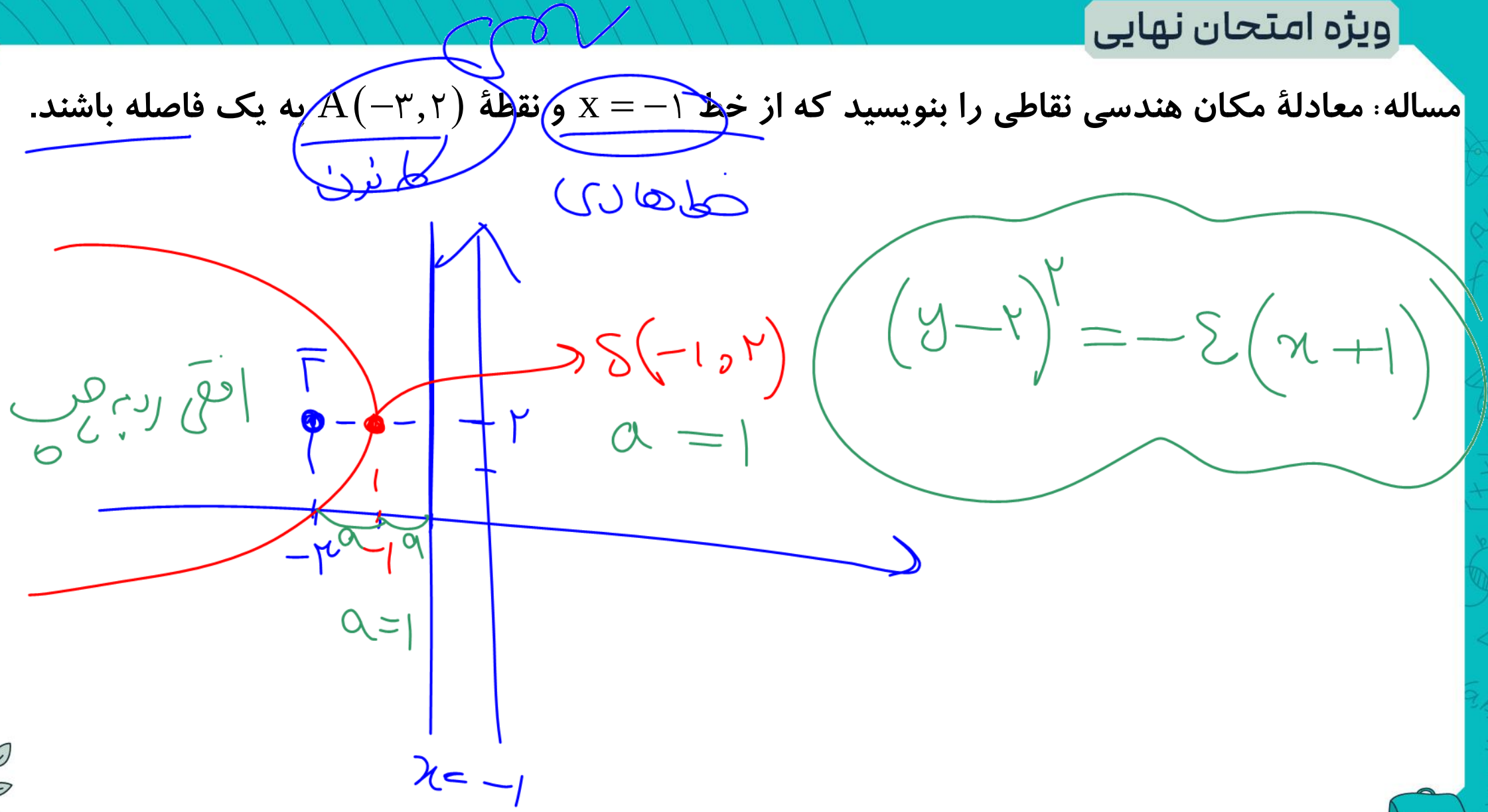
$a=1$

$$(y-۱)^۲ = \frac{k}{۳}\left(x+\frac{۳}{k}\right)$$

$$\frac{k}{۱۲} = ۱$$

$$k = ۱۲$$

مساله: معادلهٔ مکان هندسی نقاطی را بنویسید که از خط $x=-1$ و نقطهٔ $A(-3,2)$ به یک فاصله باشند.



مساله: اگر $S(۰,۰)$ رأس و $F(-۲,۰)$ کانون یک سهمی باشد، معادلهٔ سهمی را بنویسید.

مساله: مختصات کانون و معادلهٔ خط هادی سهمی $x^2 - 2x + 4y + 5 = 0$ را تعیین کنید.

$x^2 - 2x + 1 = -4y - 5 + 1$

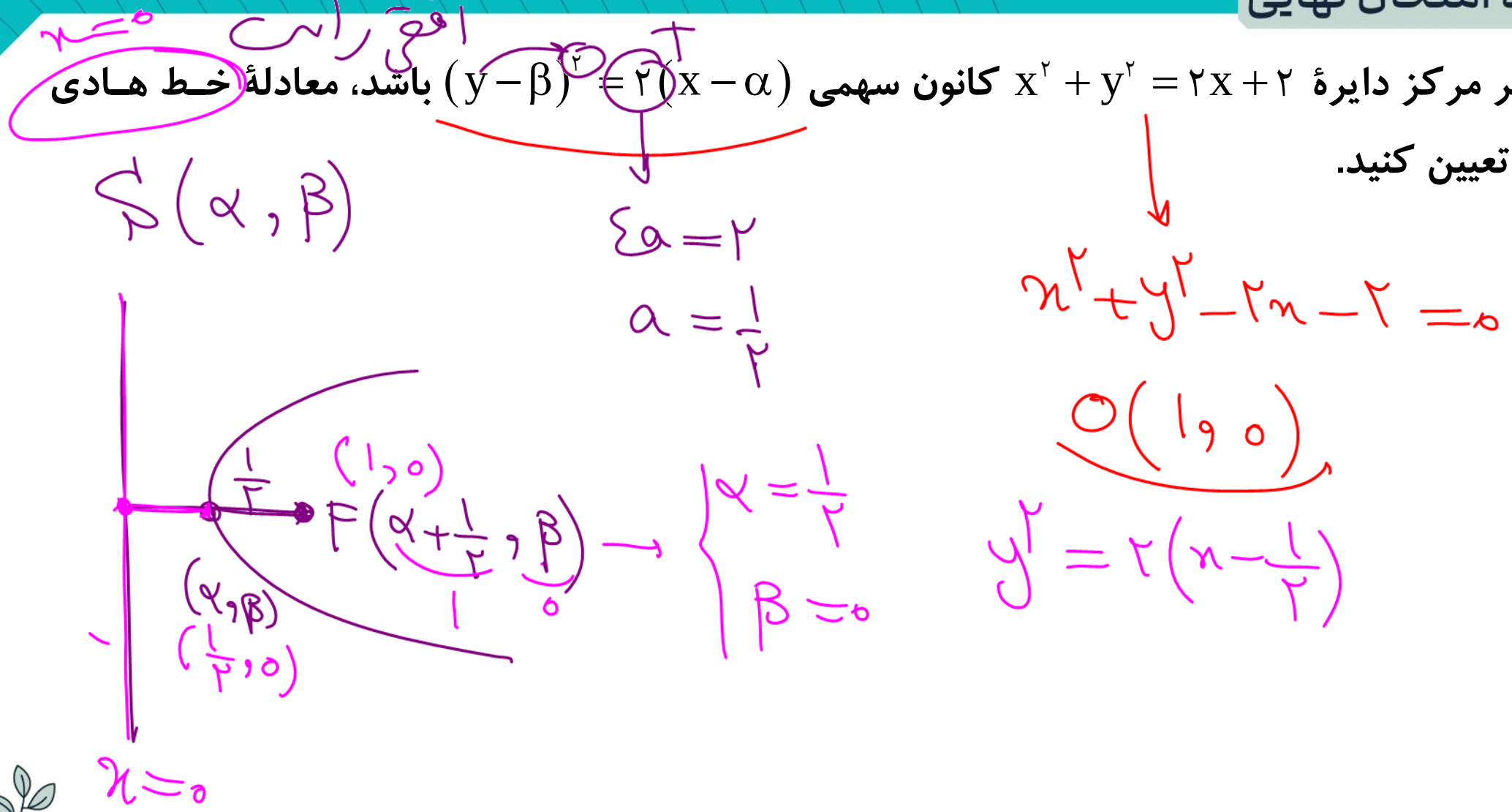
$(x-1)^2 = -4(y+1)$

$4a = 4$

$a = 1$

کانون: $(1, -1)$

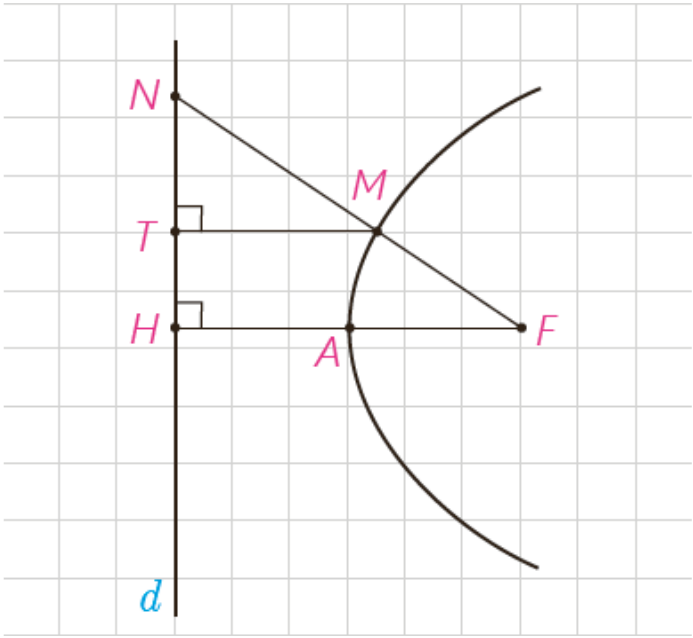
مساله: اگر مرکز دایرهٔ $x^2+y^2=2x+2$ کانون سهمی $(y-\beta)^2=2(x-\alpha)$ باشد، معادلهٔ خط هادی سهمی را تعیین کنید.



مساله: سهمی P با کانون F و خط هادی d مفروض است. ثابت کنید مرکز هر دایره که از F بگذرد و بر خط d مماس باشد روی سهمی است و برعکس هر نقطه روی سهمی، مرکز یک دایره است که از F گذشته و بر d مماس است. در پایان با توجه به این موضوع، تعریف دیگری از سهمی ارائه کنید.

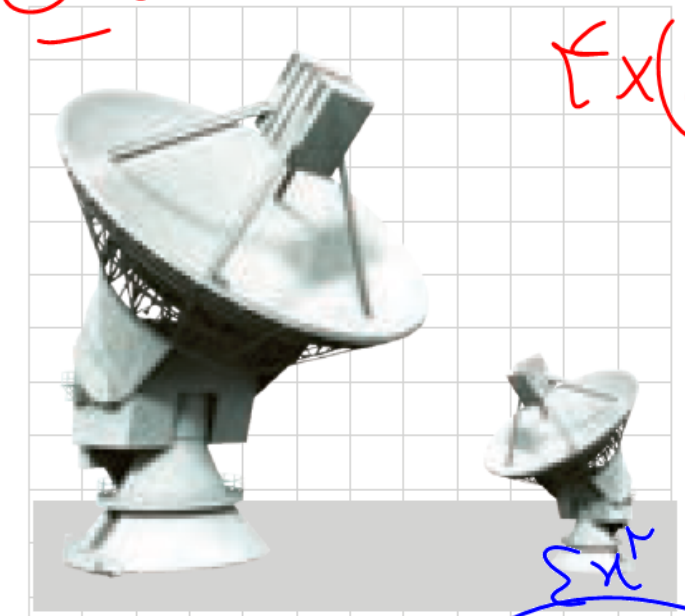
سهمی مکان هندسی مراکز دایره‌هایی است که از یک نقطه ثابت گذشته و بر یک خط ثابت مماس‌اند

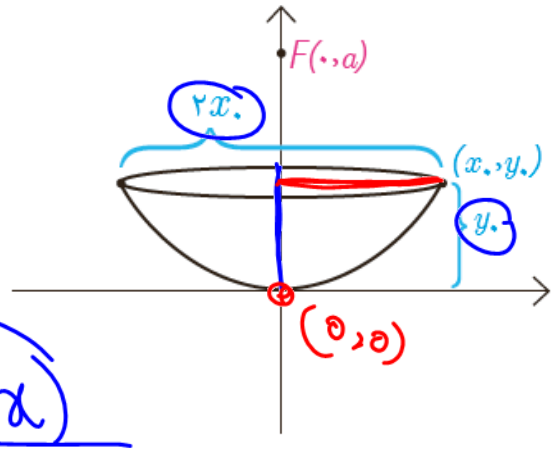
مساله: در شکل زیر، سهمی به راس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطه دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا d را در N قطع کند و سپس از M خط MT را بر d عمود می‌کنیم. ثابت کنید: $\frac{FN}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$



مساله:

یک دانش‌آموز با دیدن دو دیش مخابراتی با ابعاد متفاوت و مشاهدهٔ فاصلهٔ کانونی متفاوت آنها به این فکر افتاد که چگونه می‌توان با داشتن یک دیش فاصلهٔ کانونی آن را به‌دست آورد. او از معلمش خواست که فرمولی برای محاسبهٔ فاصلهٔ کانونی یک دیش به او بگوید. معلم به او گفت: باید قطر دهانهٔ دیش را در خودش ضرب کرد و حاصل‌ضرب را بر اندازهٔ گودی (عمق) دیش تقسیم کرد و عدد حاصل را بر ۱۶ تقسیم کرد. حاصل فاصلهٔ کانونی دیش است. دلیل درستی این دستور را با توجه به سهمی رسم شده در شکل مقابل و فرمول سهمی توضیح دهید.





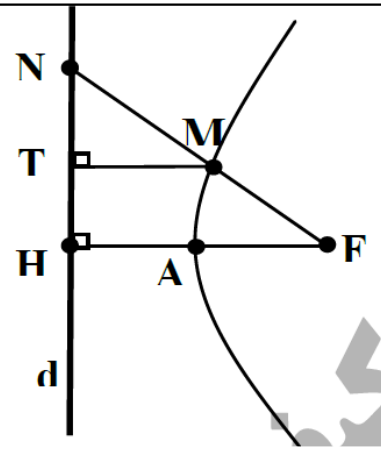
$$a = \frac{(2x)(2x)}{16} = \frac{4x^2}{16y} \rightarrow a = \frac{x^2}{4y} \rightarrow x^2 = 4ay$$

۱۱	در یک دیش مخابراتی به شکل سهموی با دهانه دایره ای به قطر ۶۰ واحد وگودی (عمق) ۹واحد مفروض است فاصله کانونی این دیش را به دست آورید.	۰/۷۵

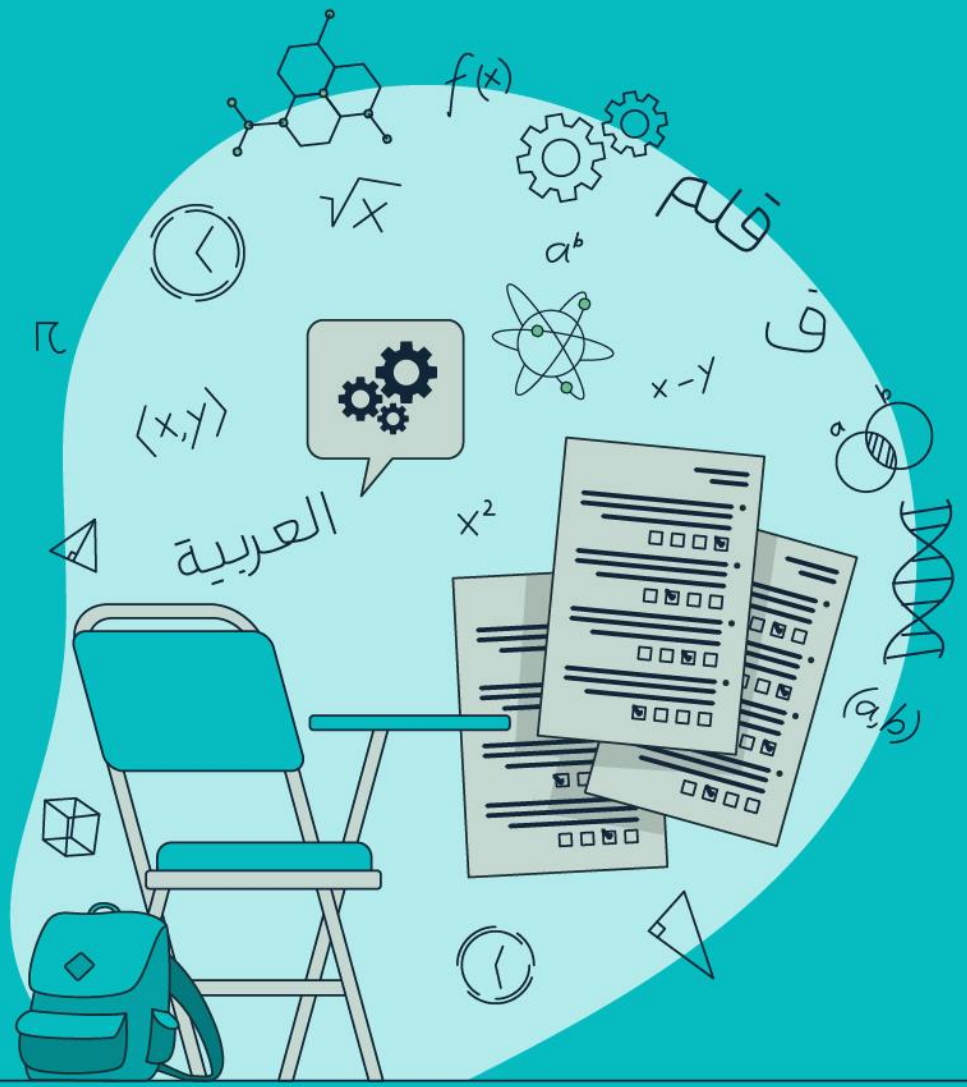
$y=9 \quad x=30=\frac{60}{2}$

$a=\frac{x^2}{4y}=\frac{900}{4\times 9}=25$

۱۰	در شکل روبرو سهمی با رأس A وکانون F وخط هادی d رسم شده است،از کانون F به نقطهٔ دلخواه M روی سهمی وصل کرده وامتداد داده ایم تا خط d را در N قطع کند وازنقطهٔ M ، MT را بر d عمود کرده ایم. ثابت کنید : $\frac{FN}{FA}=\frac{2NT}{TH}$	۱/۲۵



نهایی
بندی
جمع
پیشرفت، یعنی موفقیت



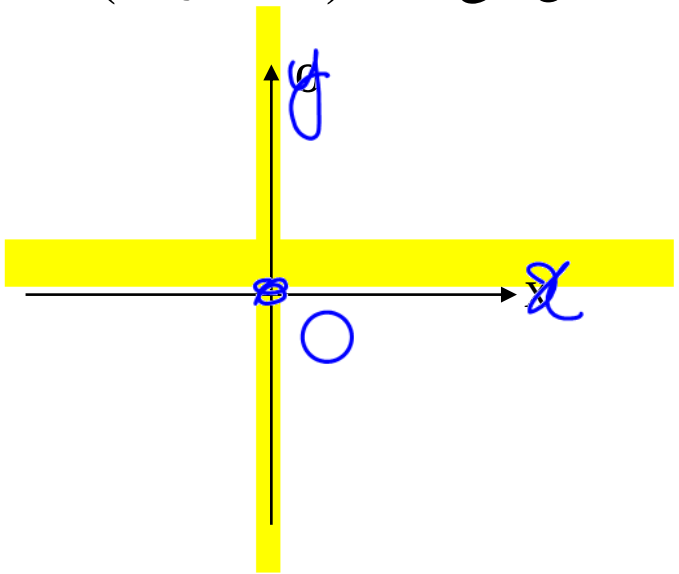
نهایی جمع بندی

هندسه دوازدهم

فضای سه بعدی R^3

اپیزود ۱۳ : فضای سه بعدی $\mathbb{R}^3$

➢ **صفحهٔ $\mathbb{R}^2$** : صفحه و دستگاه مختصات دوبعدی را گویند که در آن هر نقطه دقیقاً توسط یک زوج مرتب مانند (x, y) مشخص می‌شود و هر زوج مرتب دقیقاً یک نقطه از صفحه را مشخص می‌کند. $(x, y \in \mathbb{R})$



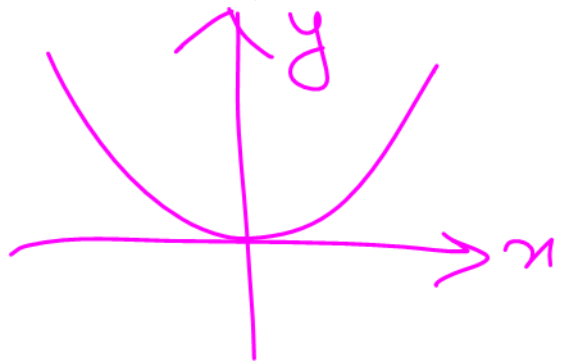
صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ در حقیقت مجموعه‌ای شامل همه نقاطی از صفحه است که مؤلفه‌های x, y آنها عددی حقیقی است.

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$$

➢ **معادلهٔ خط در صفحه** : هر معادله به صورت $ax + by = c$ که در آن مقادیر $a, b, c \in \mathbb{R}$ هستند، معادلهٔ خط در صفحه را نشان می‌دهد.

➢ **معادله یا رابطه بر حسب y, x در صفحه :** رابطه یا معادله‌ای نمودار G را در صفحه مشخص می‌کند اگر و فقط اگر هر نقطه از نمودار G در آن رابطه یا معادله صدق کند.

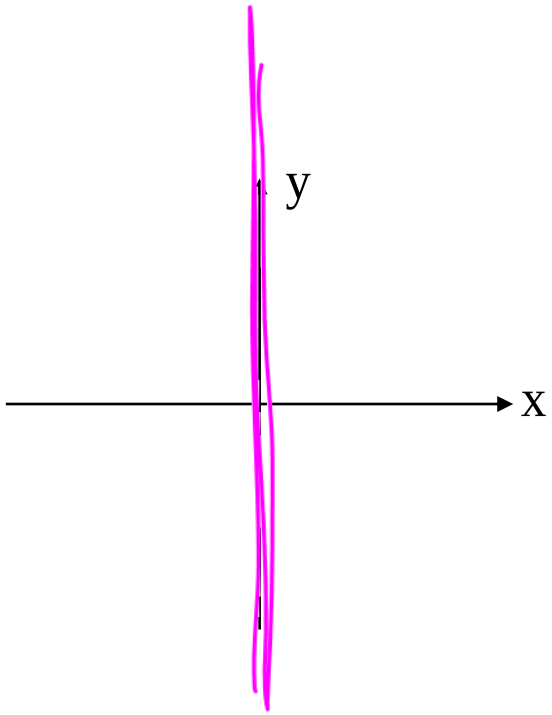
مثال : $y = x^{۲}$ نمودار سهمی

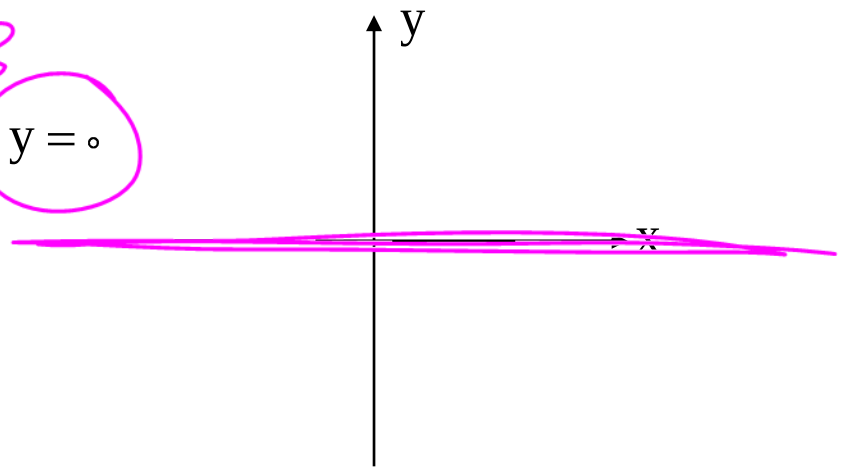


این معادله به ازای $x = ۲$ مقدار $y = ۴$ می‌دهد یعنی نقطهٔ $(۲,۴)$ روی این معادله است و برعکس هر نقطه روی این سهمی، در معادلهٔ فوق صدق می‌کند.

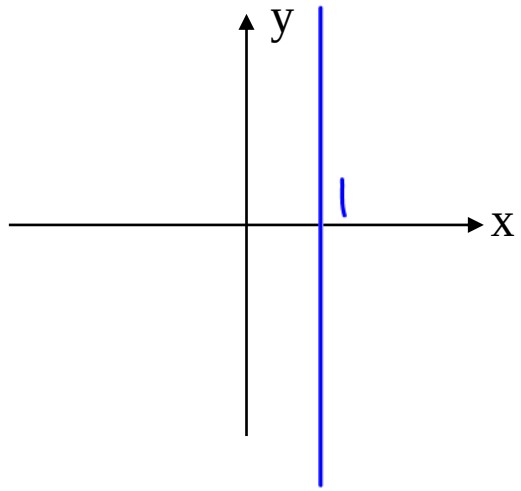
➢ **رسم نمودار رابطه‌ها و معادلات در صفحهٔ $\mathbb{R}^2$:**

الف) اگر رابطه یا معادله، یک تساوی بود که به راحتی قابل رسم است و با نمایش چند نقطه از آن در صفحه، شکل کیفی (تقریبی) معادله یا رابطه به دست می‌آید.



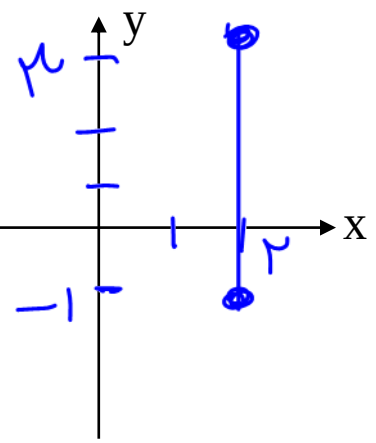


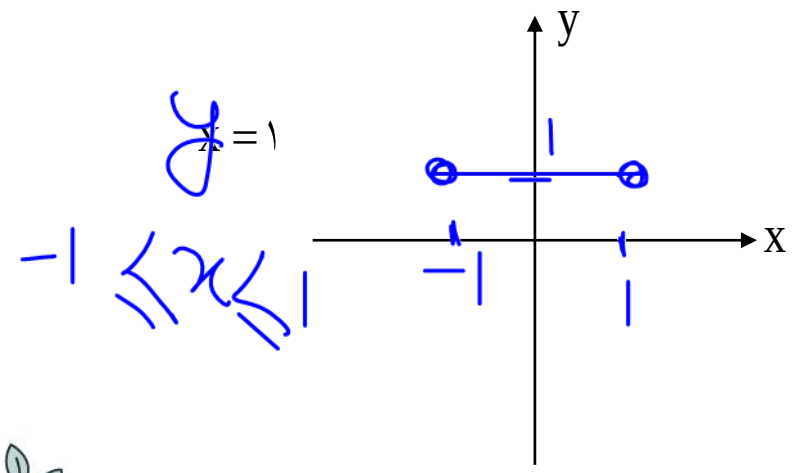
$x = ۱$



$x = ۲$

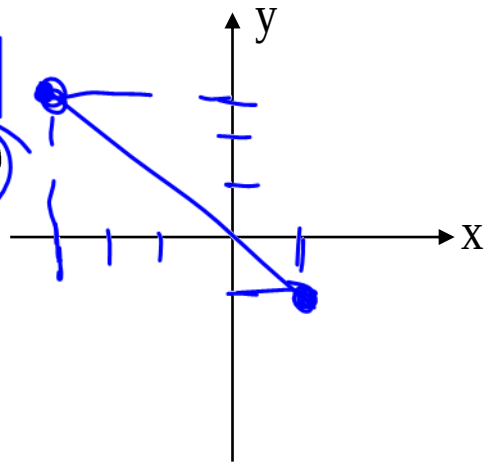
$-۱ \le y \le ۳$



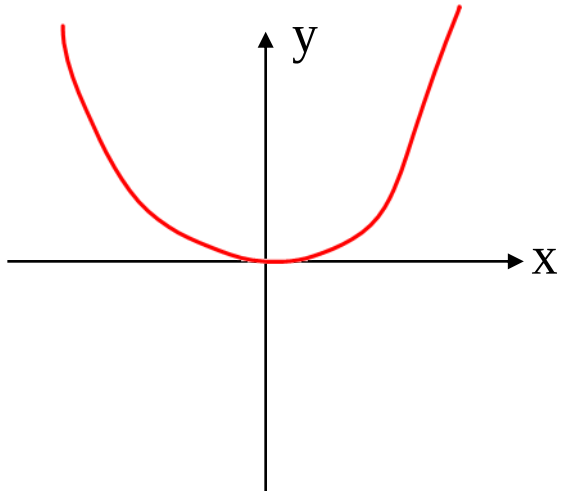


$y = -x$

$-۳ \le x \le ۱$

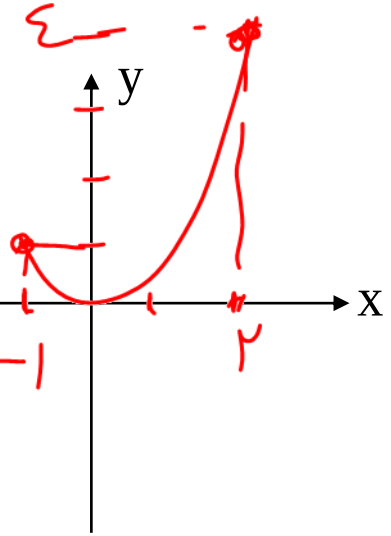


$y = x^2$

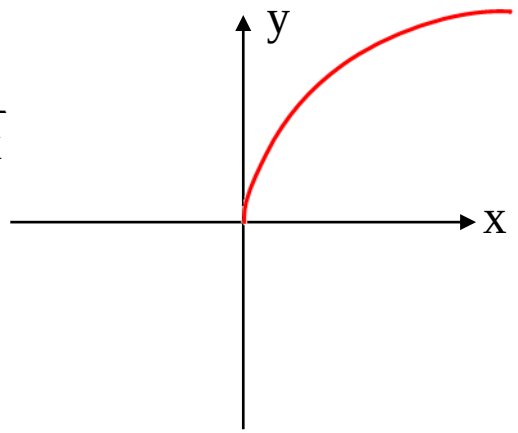


$y = x^2$

$-1 \le x \le 2$

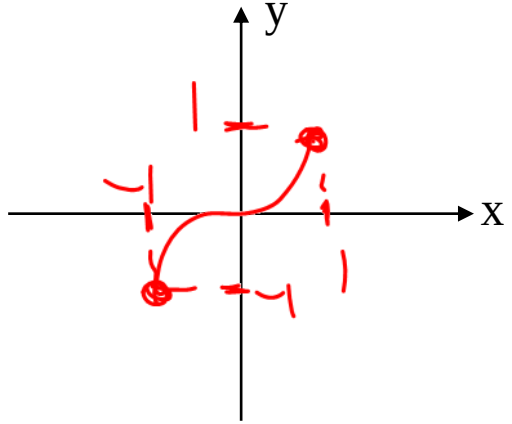


$y = \sqrt{x}$



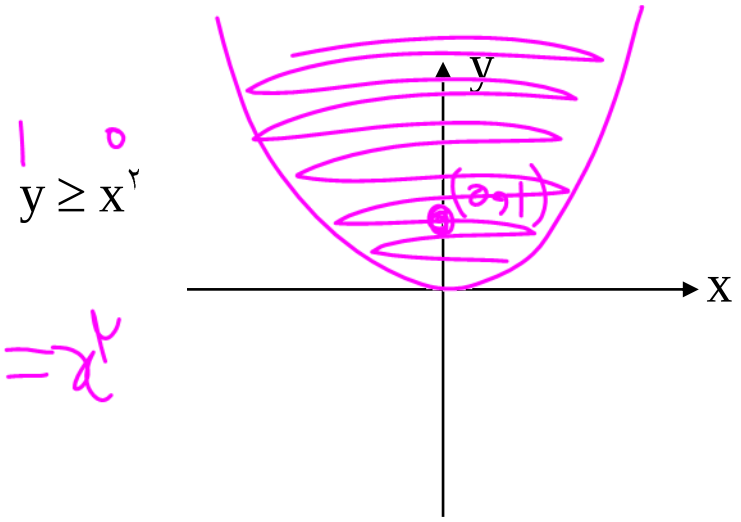
$y = x^3$

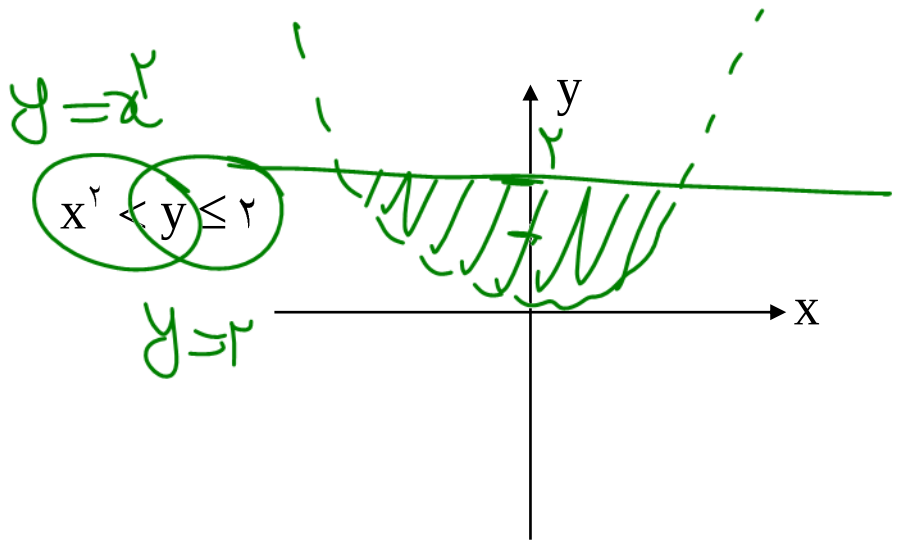
$-1 \le x \le 1$



ب) اگر رابطه بصورت نامعادله و نامساوی باشد، ابتدا آن را به تساوی تبدیل کرده و رسم می‌کنیم، سپس با نقطه‌یابی در طرفین معادله، سمت قابل قبول را هاشور می‌زنیم.

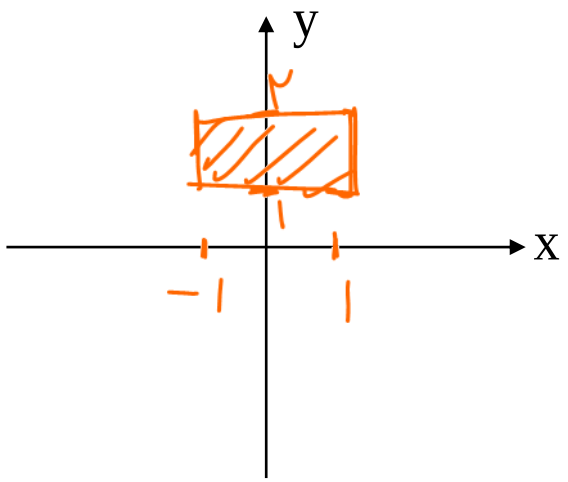
➢ **توجه** : رابطه‌های کوچکتر یا مساوی و بزرگتر یا مساوی با خط و رابطه‌های بزرگتر یا کوچکتر با خط‌چین مشخص می‌شوند.





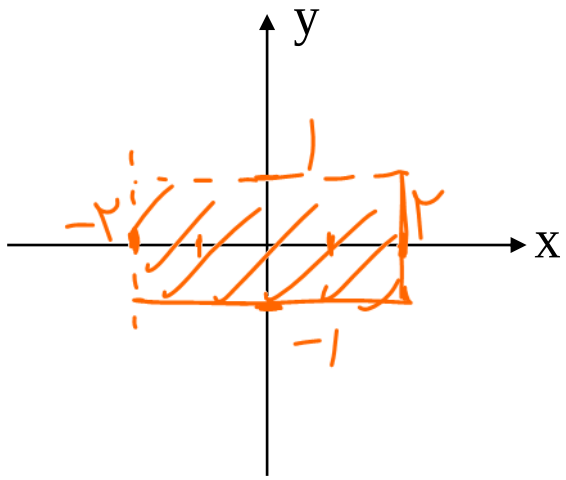
$-۱ \leq x \leq ۱$

$۱ \leq y \leq ۲$

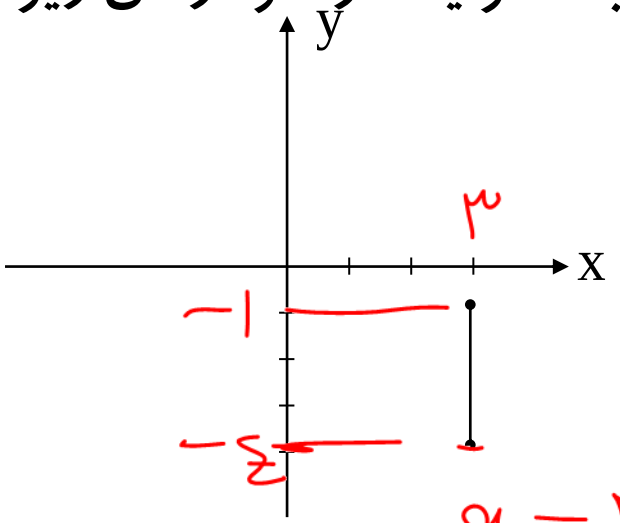


$-۲ < x \leq ۲$

$-۱ \leq y < ۱$

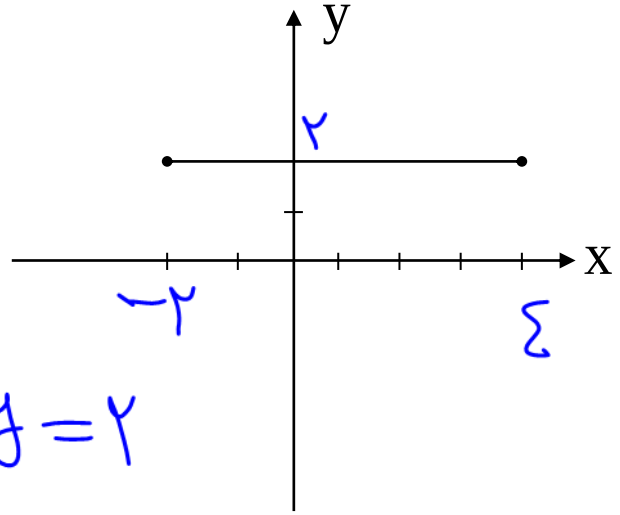


مثال : معادله یا رابطهٔ هر یک از نمودارهای زیر را بنویسید.



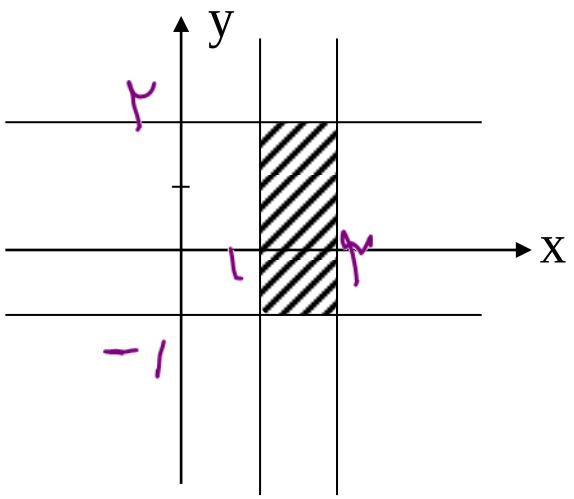
$x = ۳$

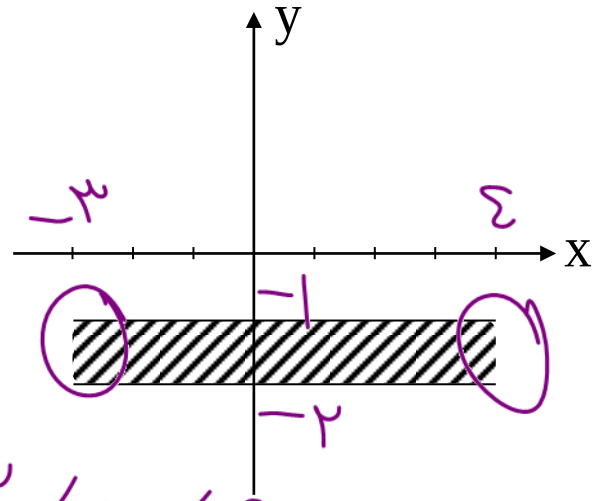
$-۴ \leq y \leq -۱$



$y = ۲$

$-۲ \leq x \leq ۴$


y
x
۲
۱
۳
-۱


y
x
-۳
٤
-۱
-۲

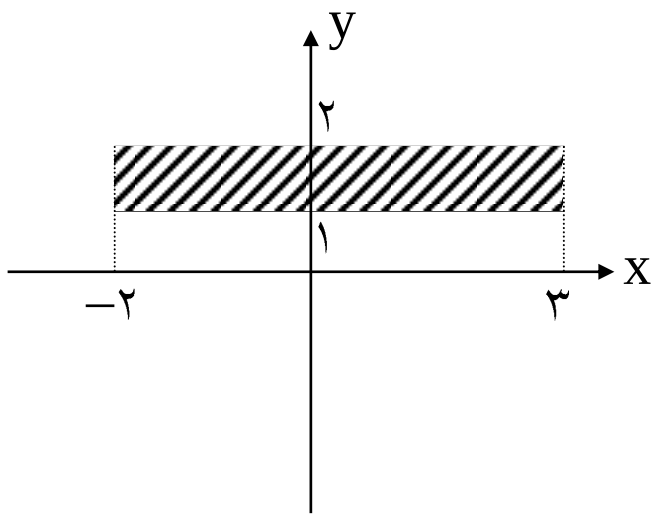
مثال : نمودار رابطه‌های زیر را رسم کنید.

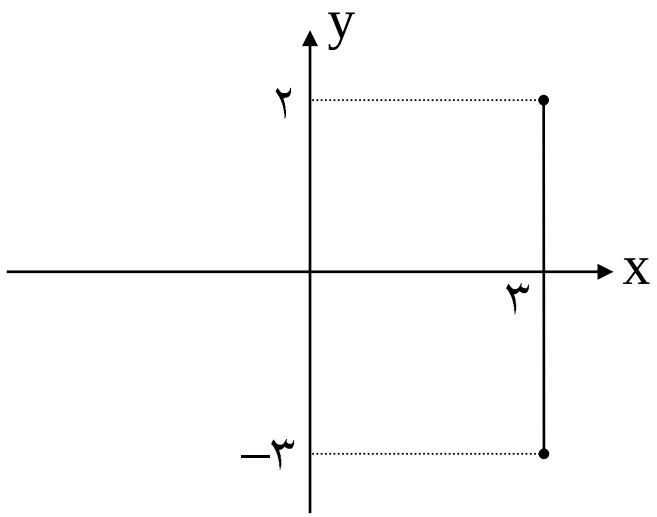
الف) $-۱ \leq x < ۱$ و $-۲ \leq y \leq ۳$

ب) $۰ \leq y \leq x^۲$

پ) $y = ۲$ و $-۲ \leq x < ۲$

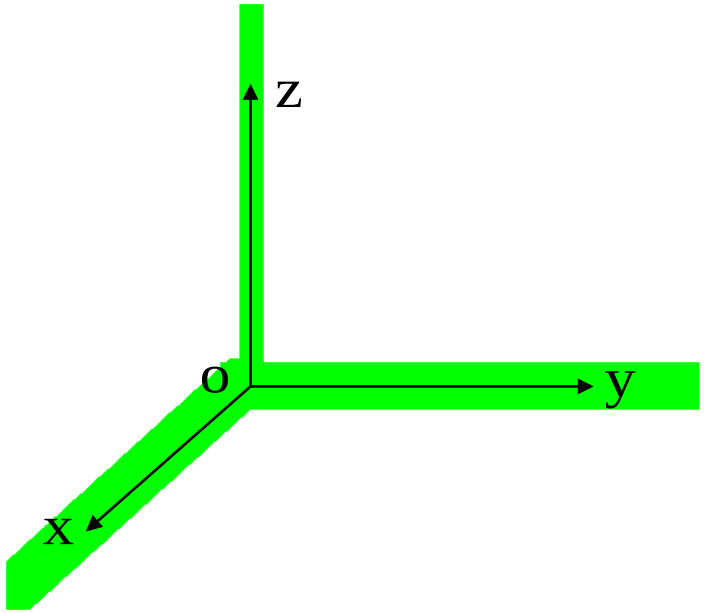
مثال : معادلات روابط زیر را بنویسید.





فضای $\mathbb{R}^3$: مجموعه تمام سه‌تایی‌های مرتب به صورت (x,y,z) که در آن‌ها x,y,z اعداد حقیقی هستند، تشکیل فضای $\mathbb{R}^3$ می‌دهند.

$$\mathbb{R}^3=\{(x,y,z)|x,y,z\in\mathbb{R}\}$$

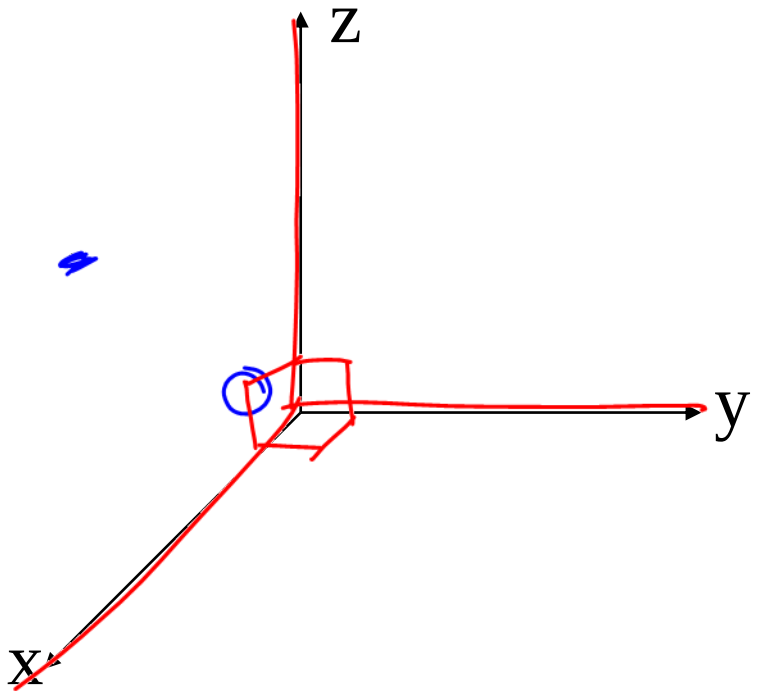


➢ **محورهای مختصات در فضای** $\mathbb{R}^3$: دستگاه مختصات فضای $\mathbb{R}^3$ از سه محور دوبه‌دو عمود بر هم تشکیل شده است که در مبدأ مختصات (o) همرسند.

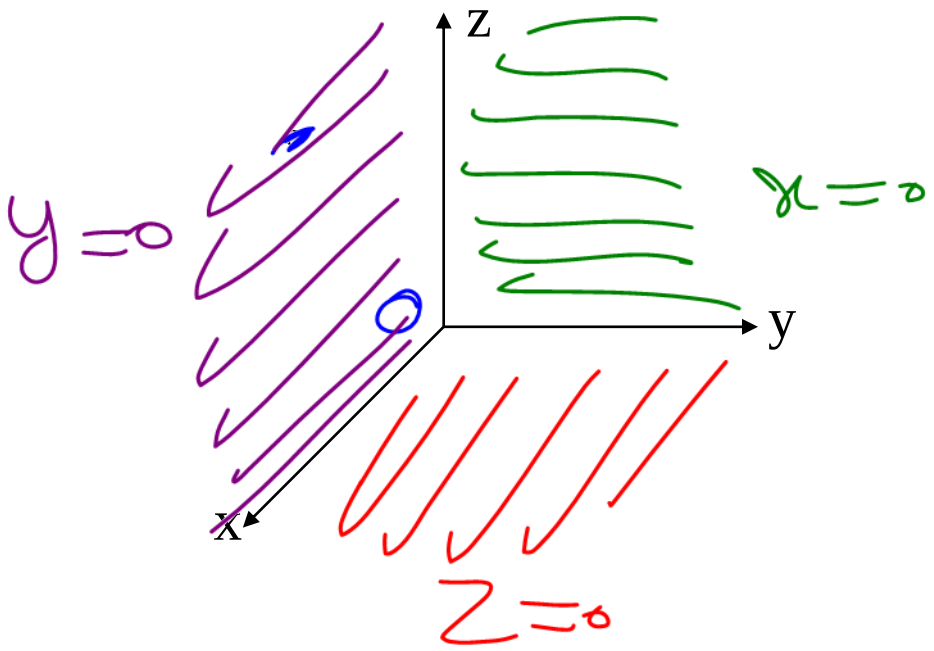
محور x ها (ox)

محور y ها (oy)

محور z ها (oz)



➢ **صفحات مختصات در فضای** $\mathbb{R}^3$: در دستگاه مختصات فضای $\mathbb{R}^3$، هر دو محور، تشکیل یک صفحه می‌دهند که دوبه‌دو بر هم عمودند.

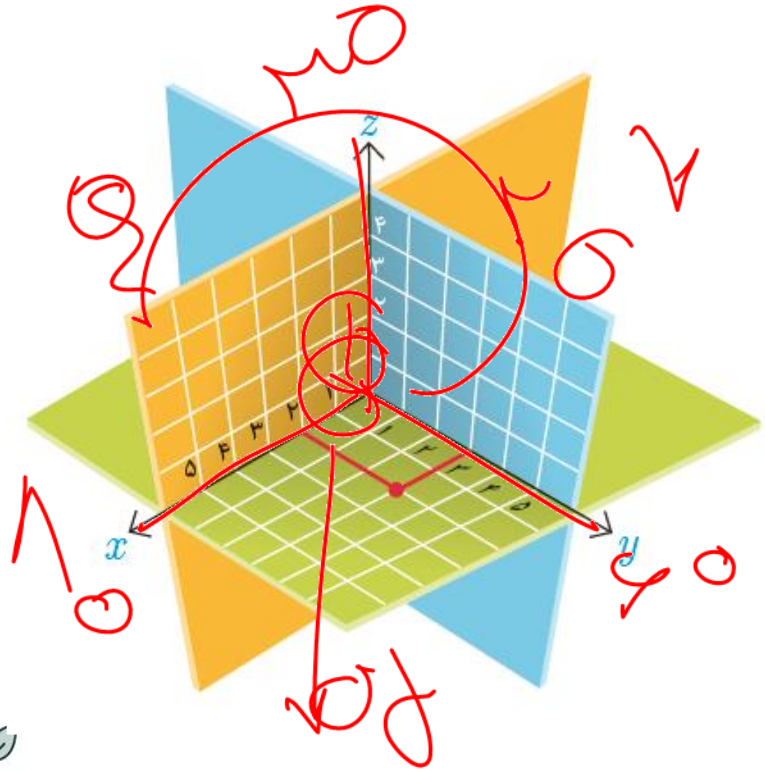


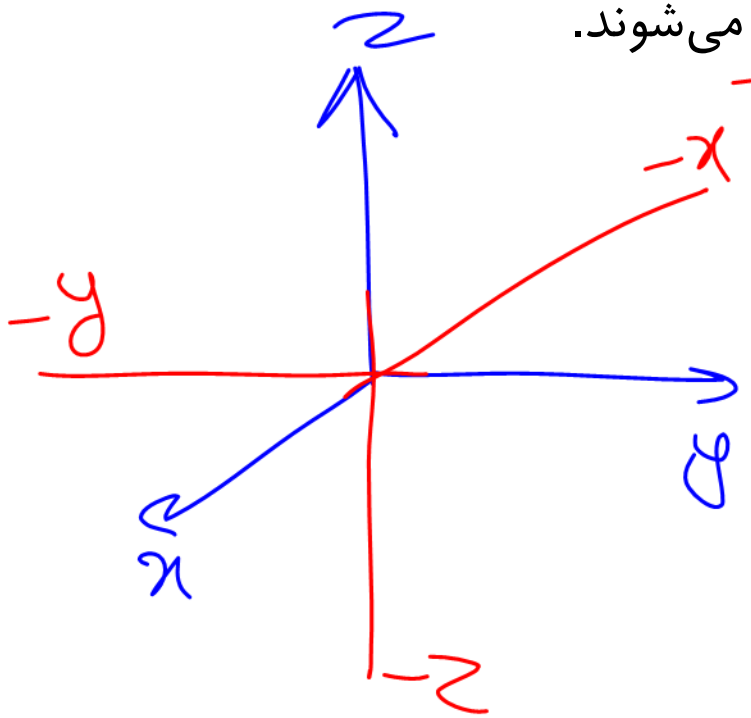
صفحهٔ xy (شامل محور ox و oy) $(z=0)$

صفحهٔ xz (شامل محور ox و oz) $(y=0)$

صفحهٔ yz (شامل محور oy و oz) $(x=0)$

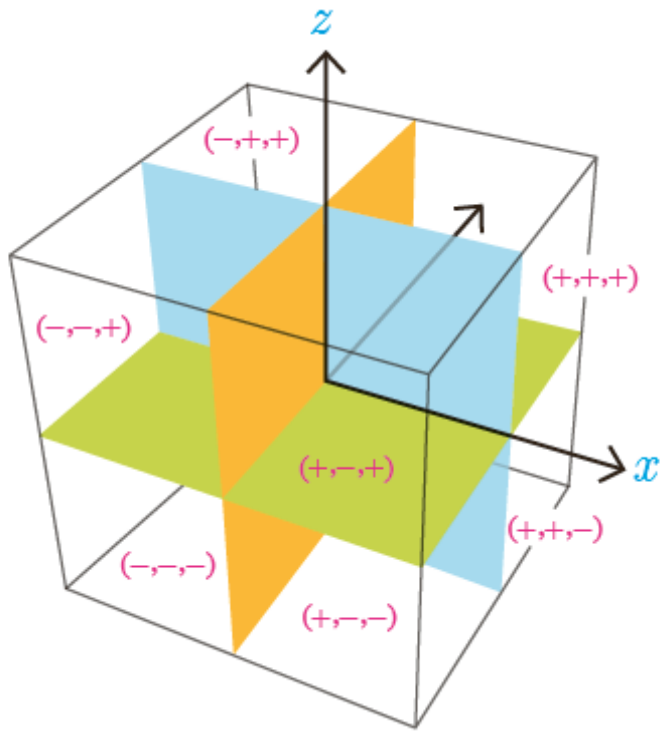
- اگر محورها را از مبدأ مختصات (0) در خلاف جهت ادامه دهیم (در سوی منفی) تا مقادیر منفی محورها ظاهر شوند، آنگاه دستگاه مختصات فضای $\mathbb{R}^3$ به ۸ ناحیه تقسیم می‌شود که ۴ ناحیهٔ آن بالای صفحهٔ xy و ۴ ناحیهٔ دیگر زیر صفحهٔ xy واقع می‌شوند.





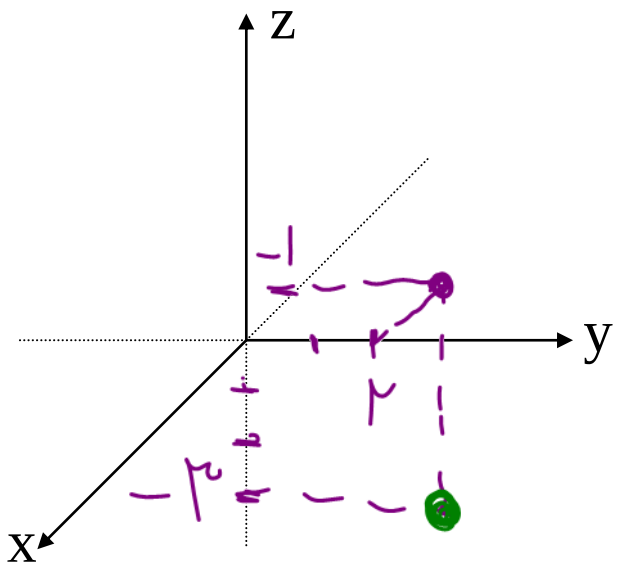
➢ علامت z, y, x در این ۸ ناحیه به صورت زیر است :

شماره ناحیه	علامت محورها		
	x	y	z
۱	+	+	+
۲	−	+	+
۳	−	−	+
۴	+	−	+
۵	+	+	−
۶	−	+	−
۷	−	−	−
۸	+	−	−



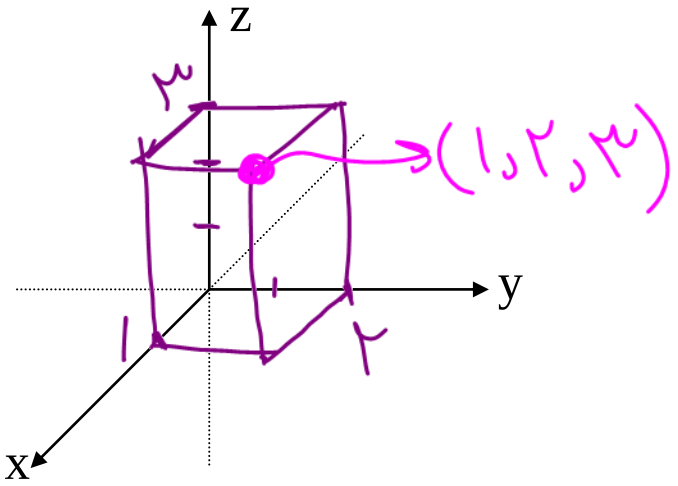
➢ **نمایش نقطهٔ (x_0, y_0, z_0) در فضای $\mathbb{R}^3$** : ابتدا نقطهٔ (x_0, y_0) را در صفحهٔ xy مشخص می‌کنیم. سپس به ارتفاع z_0 از این نقطه عمودی خارج می‌کنیم. انتهای عمود خارج شده نقطهٔ (x_0, y_0, z_0) را نمایش می‌دهد.

(روش اول) $(-1, 2, -3)$



روش دوم : سه نقطه به طول‌های x_0, y_0, z_0 روی محورهای ox, oy, oz مشخص کرده و با آنها یک مکعب مستطیل تشکیل می‌دهیم. نقطهٔ مقابل مبدأ مختصات، نقطهٔ (x_0, y_0, z_0) است.

$(۱,۲,۳)$



مثال : نقطهٔ $M(-۲,۱,۳)$ را روی $\mathbb{R}^۳$ نمایش دهید.

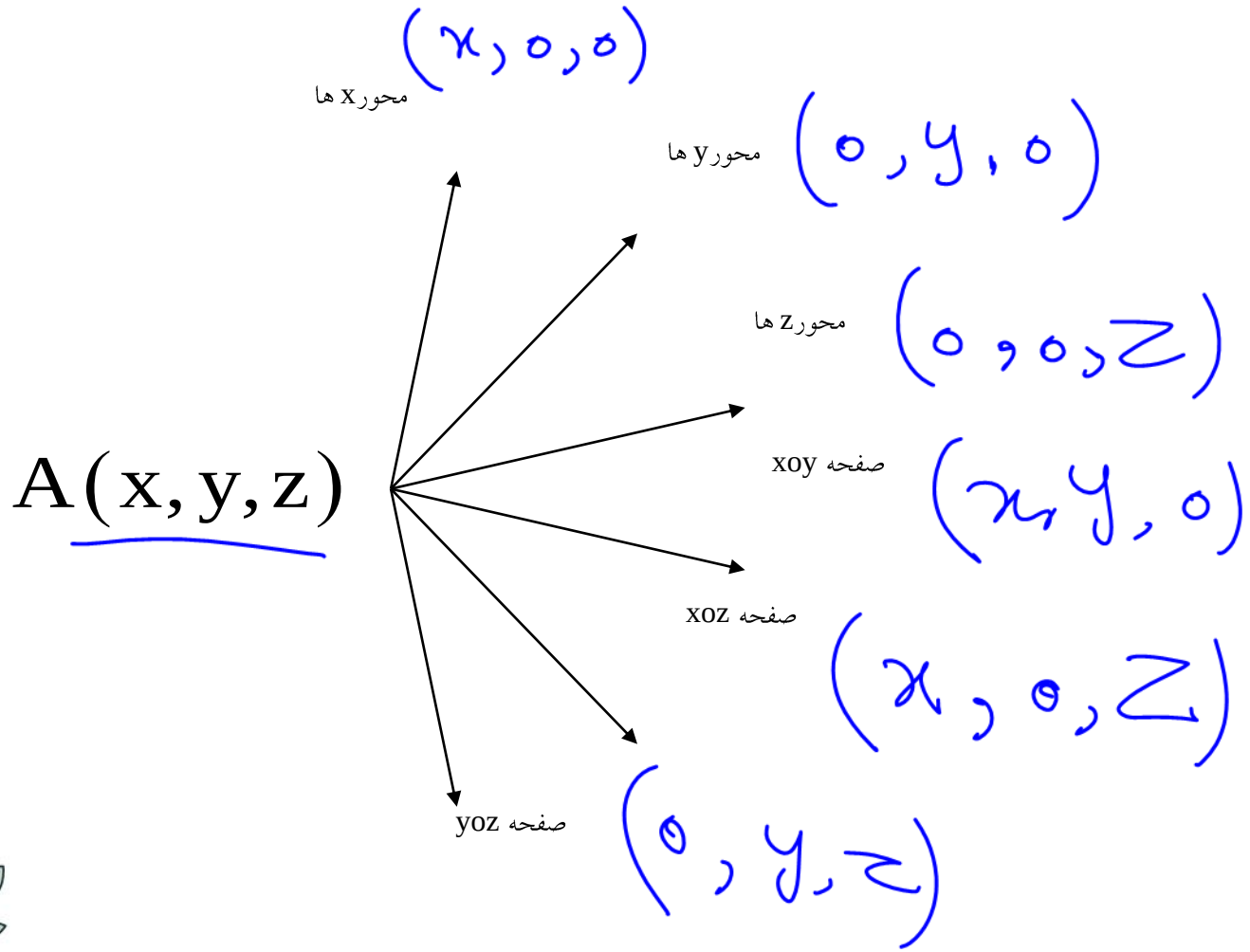
➢ مختصات نقاط روی محورها و صفحات مختصات در فضای $\mathbb{R}^3$:

مختصات	صفحات
$(x, y, 0)$	xy
$(x, 0, z)$	xz
$(0, y, z)$	yz

مختصات	محورها
$(x, 0, 0)$	ox
$(0, y, 0)$	oy
$(0, 0, z)$	oz

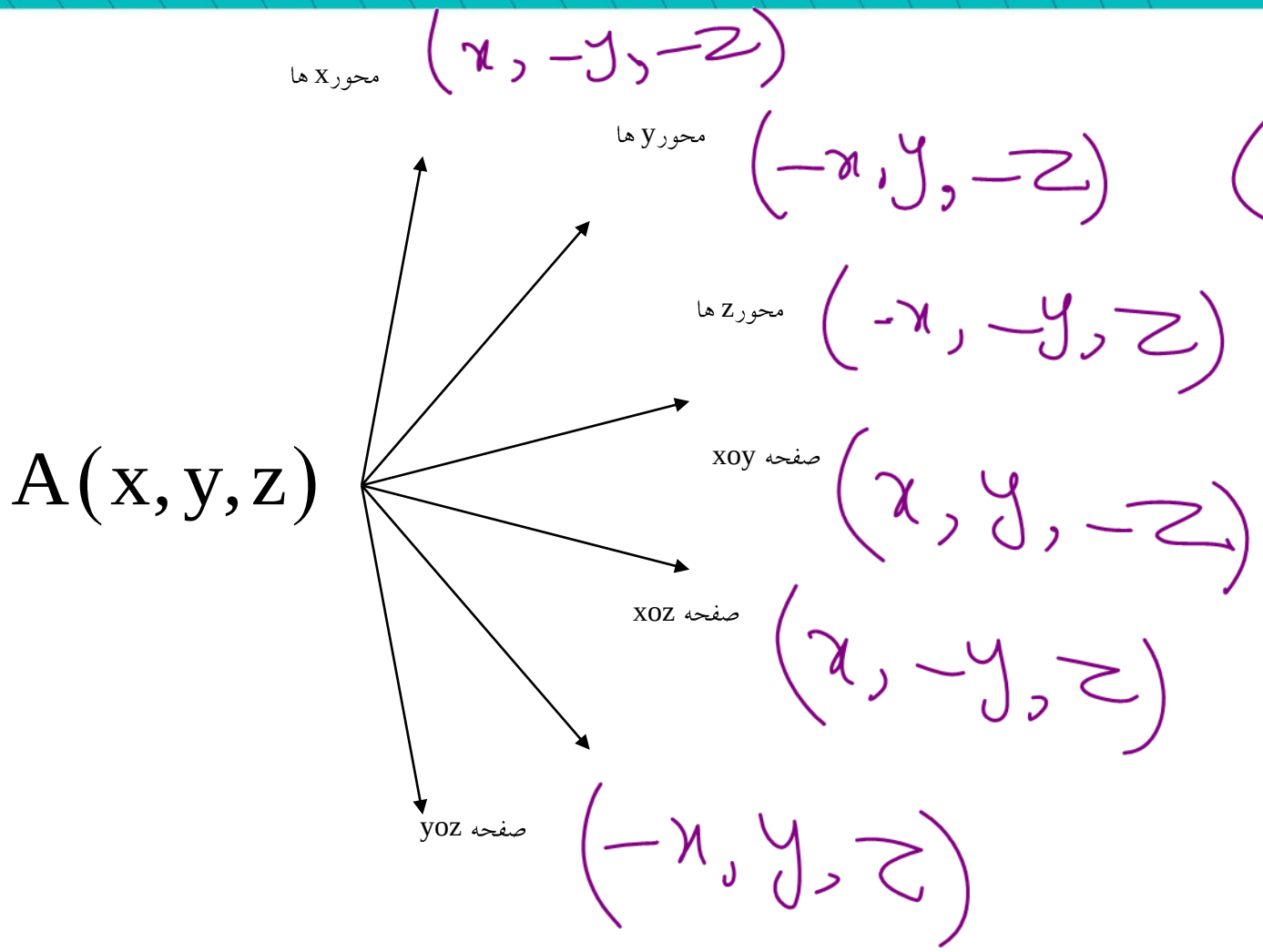
➢ **قرینه، تصویر و فاصلهٔ نقطهٔ دلخواه $A(x,y,z)$ نسبت به محورها و صفحات مختصات :**

الف) تصویر : یعنی $=0$

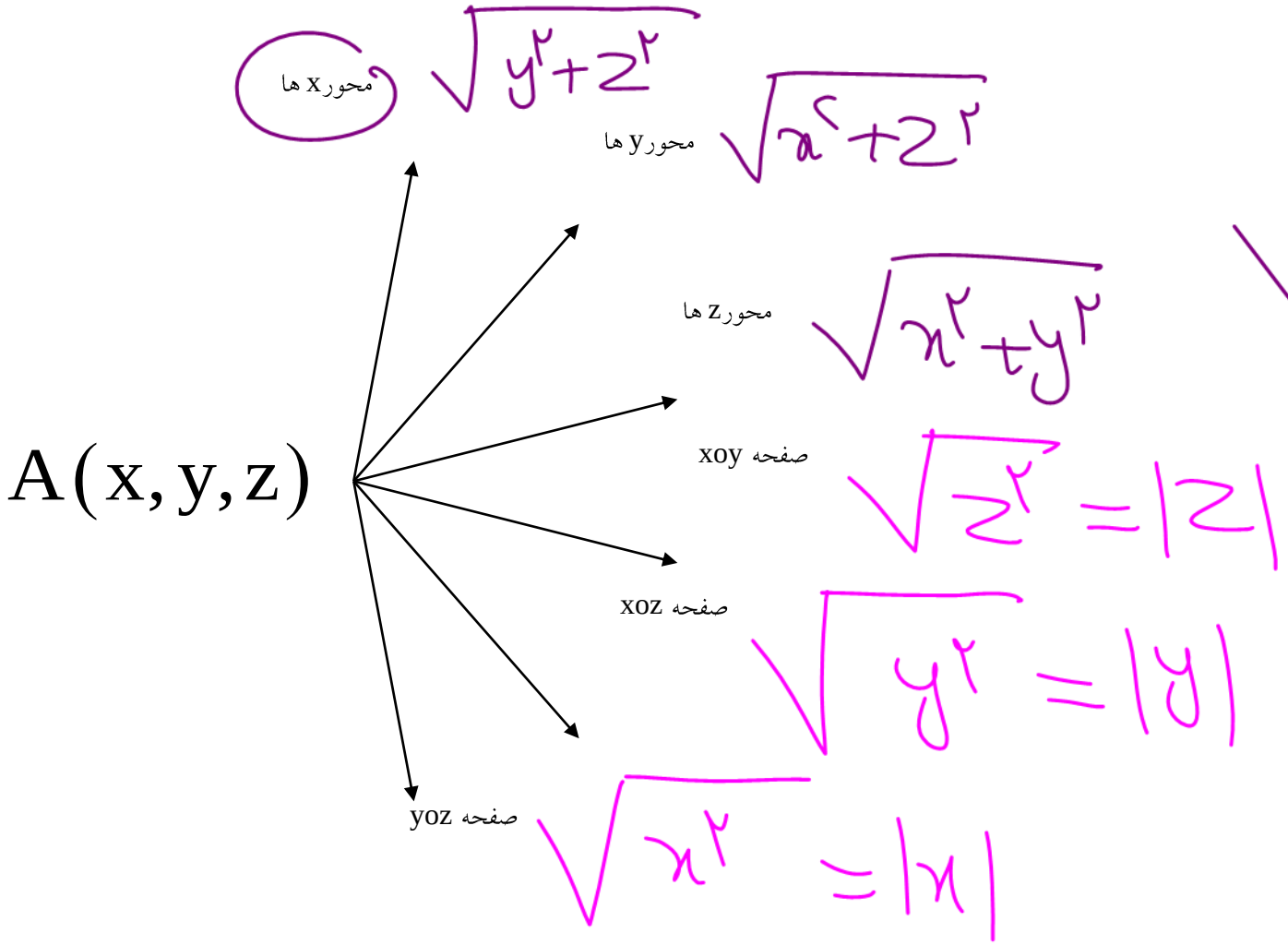


ب) قرینه:

اعضام = قرینه



پ) فاصله :



$\sqrt{y^2+z^2}$

$\sqrt{x^2+z^2}$

$\sqrt{x^2+y^2}$

$\sqrt{\text{مجموع توان‌های همنام}}$

$\sqrt{z^2}=|z|$

$\sqrt{y^2}=|y|$

$\sqrt{x^2}=|x|$

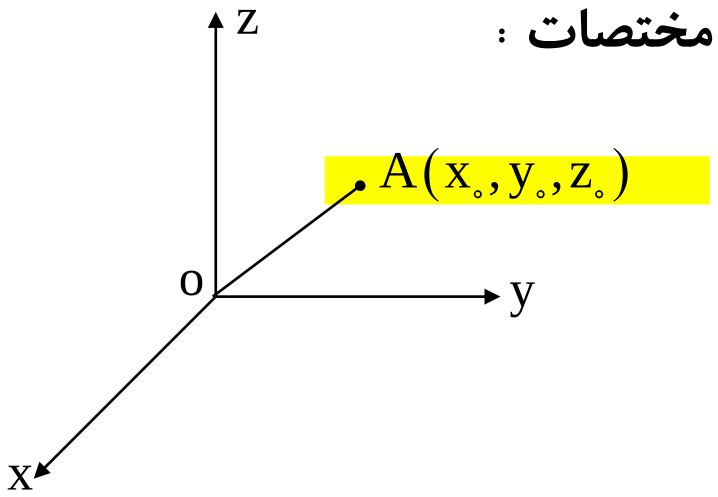
مثال : مقادیر m ، n و p را طوری تعیین کنید که؛

الف) نقطهٔ $(m+۲, n-۱, ۵)$ روی محور oz باشد.

ب) نقطهٔ $(۳, p^۲-p, ۴)$ روی صفحهٔ xz باشد.

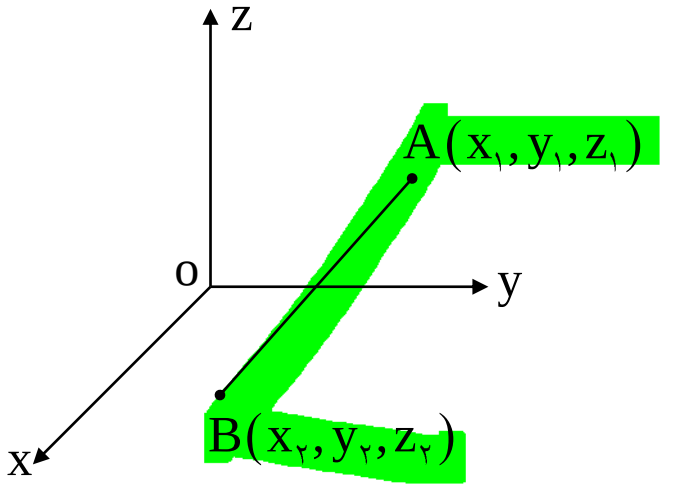
➢ فاصلهٔ نقطهٔ (x_0, y_0, z_0) از مبدأ مختصات :

$$OA = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$$

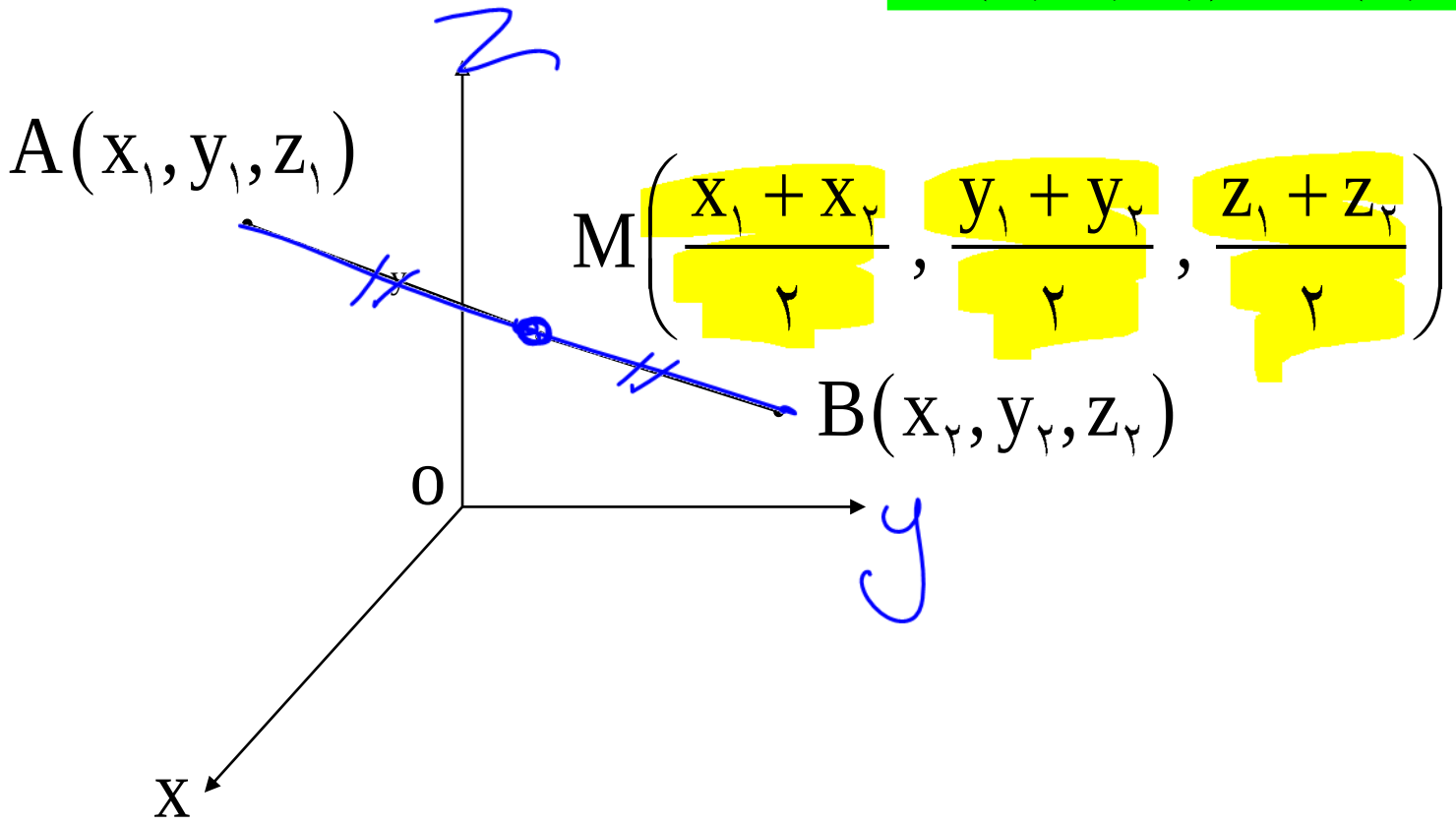


➢ فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ (طول پاره‌خط AB) :

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



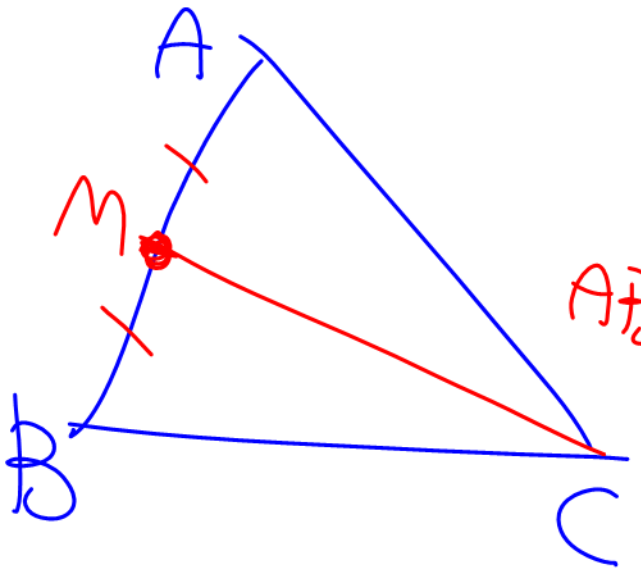
➢ **مختصات وسط پاره‌خط** $A(x_1, y_1, z_1)$ **و** $B(x_2, y_2, z_2)$:



مثال : نقاط $A(-۱,۲,۱)$ **و** $B(۰,۳,۲)$ **و** $C(۲,-۱,۴)$ **سه رأس مثلث** ABC **هستند؛**

الف) طول ضلع BC را تعیین کنید.

$$BC=\sqrt{\qquad\qquad}$$



ب) طول میانهٔ وارد بر ضلع AB را تعیین کنید.

$$M_{AB}\left(\frac{-۱}{۲}\text{ و }\frac{۵}{۲}\text{ و }\frac{۳}{۲}\right)$$

$$C(۲,-۱,۴)$$

$$CM=\sqrt{\qquad\qquad}$$

مثال : مقدار m را طوری بیابید که فاصلهٔ نقطهٔ $A(۱۲, m, m-۱)$ از مبدأ مختصات برابر ۱۳ باشد.

$$\sqrt{۱۴۴ + m^۲ + (m-۱)^۲} = ۱۳$$

$$۱۴۴ + m^۲ + m^۲ - ۲m + ۱ = ۱۶۹$$

$$\longrightarrow \cdots m = ?$$

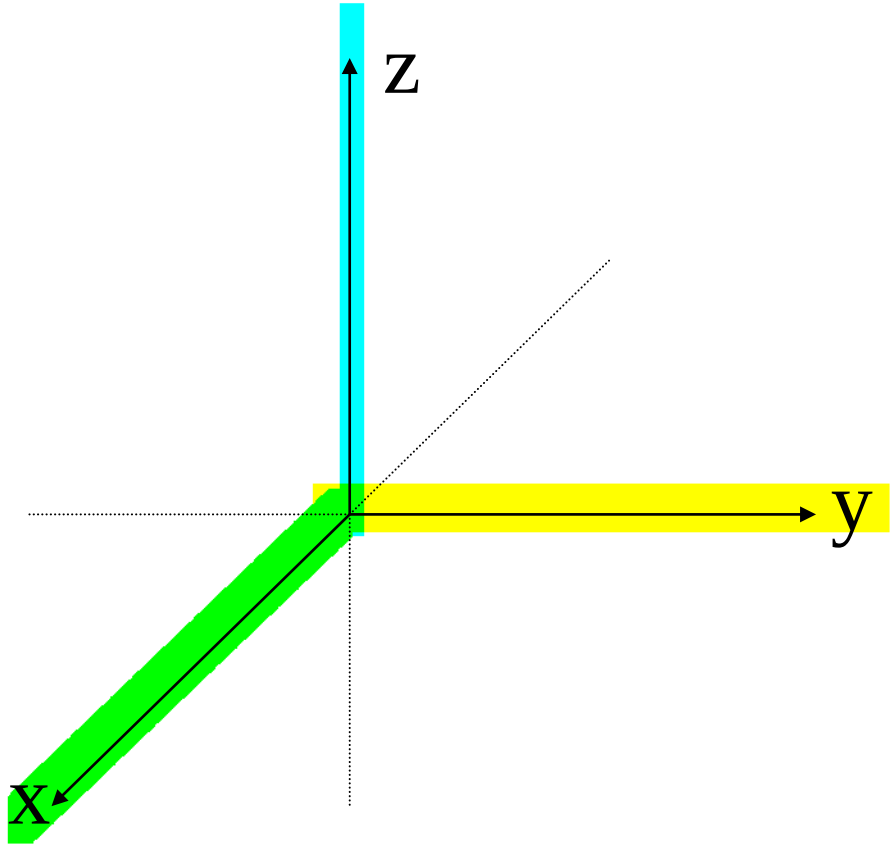
مثـــال : نقـــاط $A(۱,۰,۲)$ و $B(۲,۰,۰)$ و $C(۰,-۱,-۲)$ و $D(۰,-۱,۰)$ و $E(۱,۲,۳)$ و $F(-۳,۴,-۵)$ **را در نظر بگیرید؛**

الف) هر یک از نقاط D, C, B, A چه ویژگی دارند؟

ب) فاصلهٔ نقطهٔ E را از مبدأ مختصات حساب کنید.

پ) طول پاره‌خط EF و مختصات وسط آن را به دست آورید.

معادلات محورهای مختصات :



محور ox :
$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

محور oy :
$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

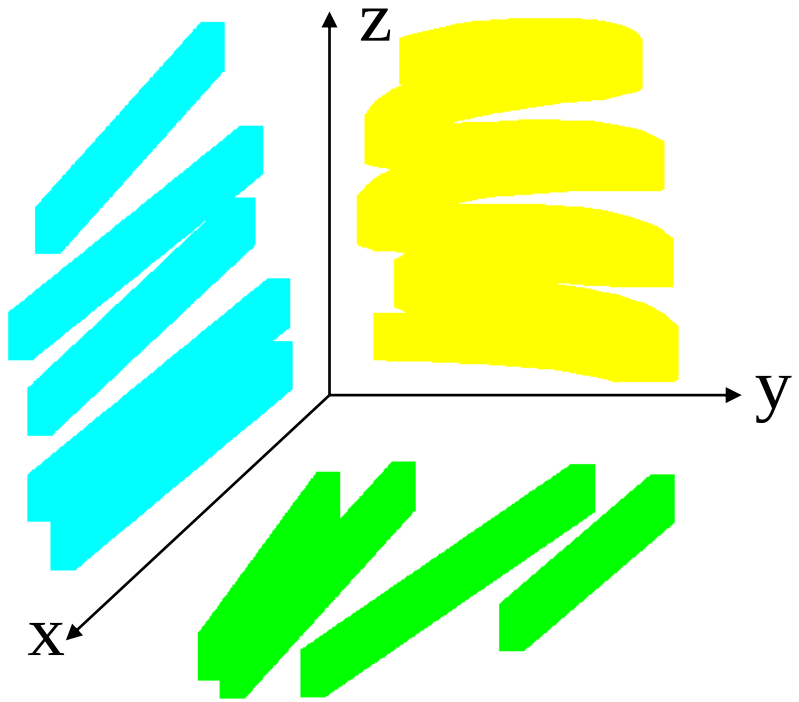
محور oz :
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

معادلات صفحات مختصات :

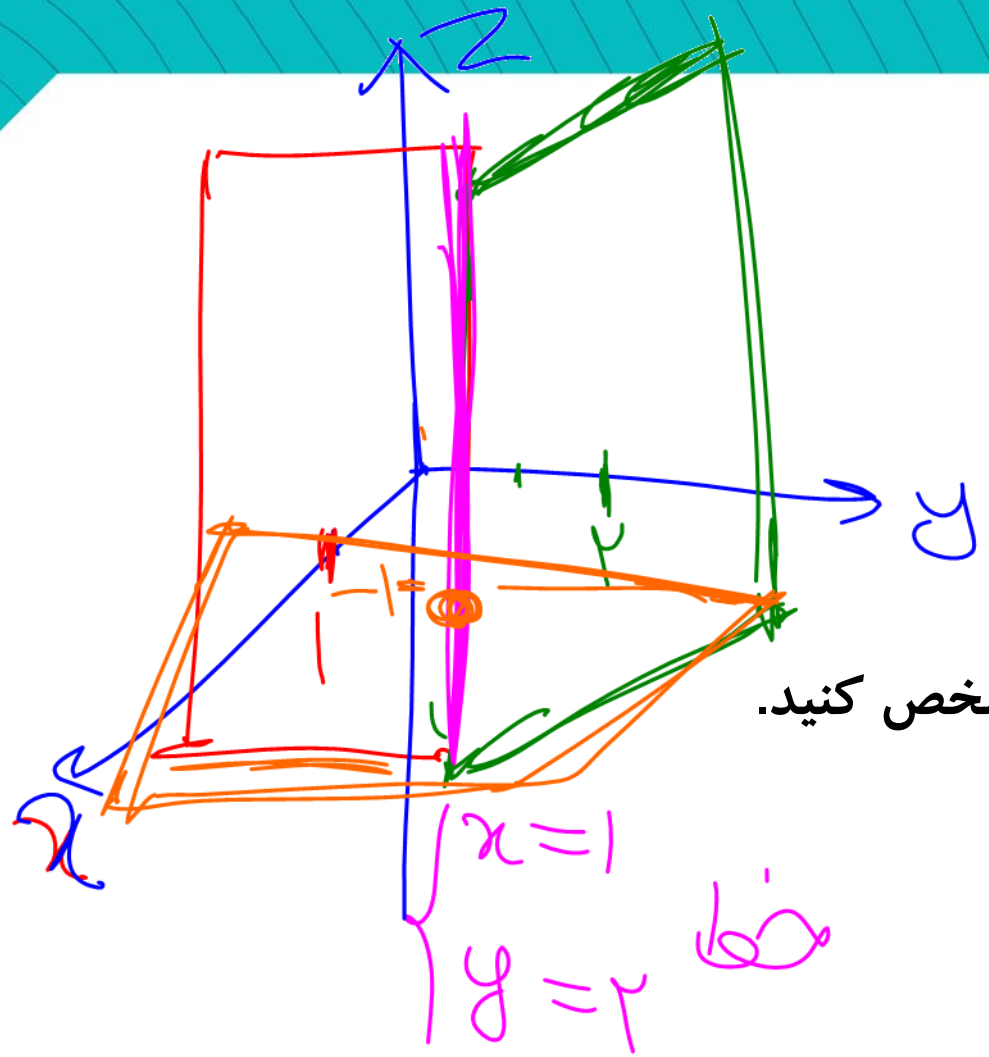
صفحهٔ xy : $z = ۰$

صفحهٔ xz : $y = ۰$

صفحهٔ yz : $x = ۰$



مثال : الف) صفحهٔ $x=1$ را نمایش دهید.



ب) بر روی صفحهٔ $x=1$ نقاطی را که در آنها $y=2$ است مشخص کنید.

پ) بر روی صفحه $x=1$ نقاطی را که در آنها $z=-1$ است مشخص کنید. نقطه

$$\begin{cases} x=1 \\ z=-1 \end{cases}$$

ت) از تلاقی سه صفحهٔ $x=1$ و $y=2$ و $z=-1$ چه شکلی پدید می‌آید؟ نقطه

$(1, 2, -1)$

نتیجه :

۱) از تلاقی هر دو صفحه که موازی دو محور هستند، خطی موازی محور سوم پدید می‌آید.

$\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ خطی موازی محور oz

$\begin{cases} y = b \\ z = c \end{cases}$ خطی موازی محور ox

$\begin{cases} x = a \\ z = c \end{cases}$ خطی موازی محور oy

۲) از تلاقی هر سه صفحه که هر کدام موازی دو محور هستند، یک نقطه در فضا پدید می‌آید.

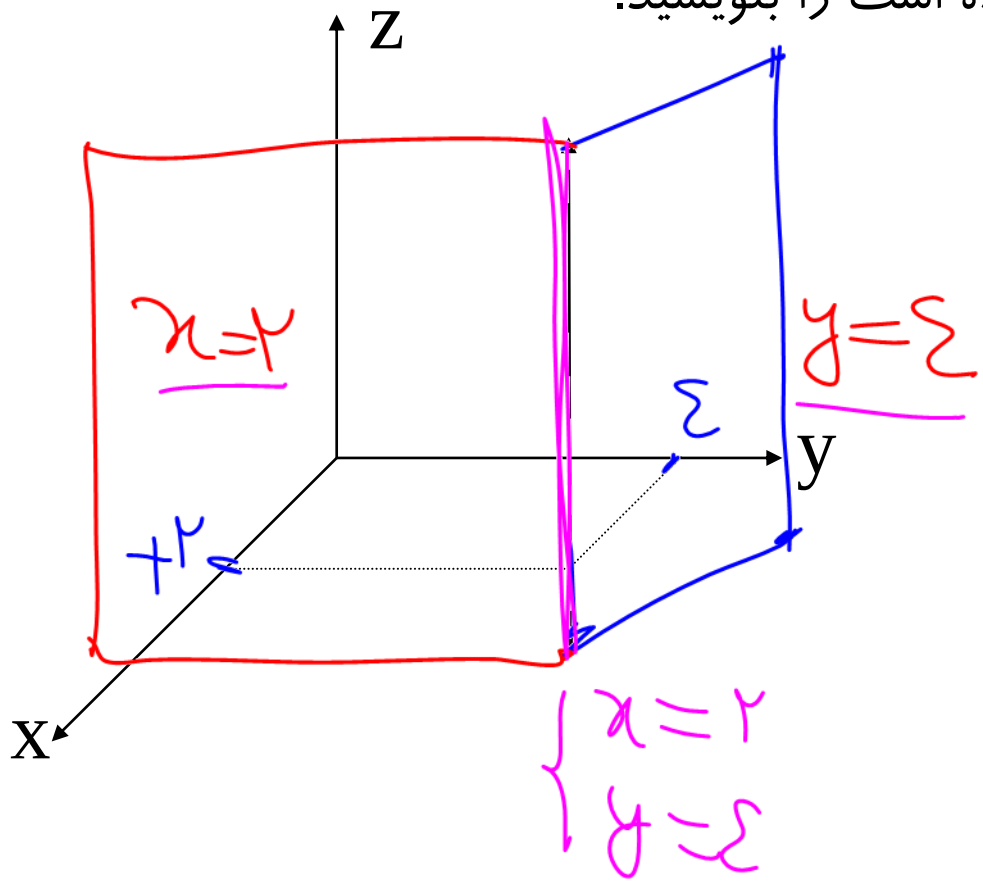
$$\begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = c \end{cases}$$

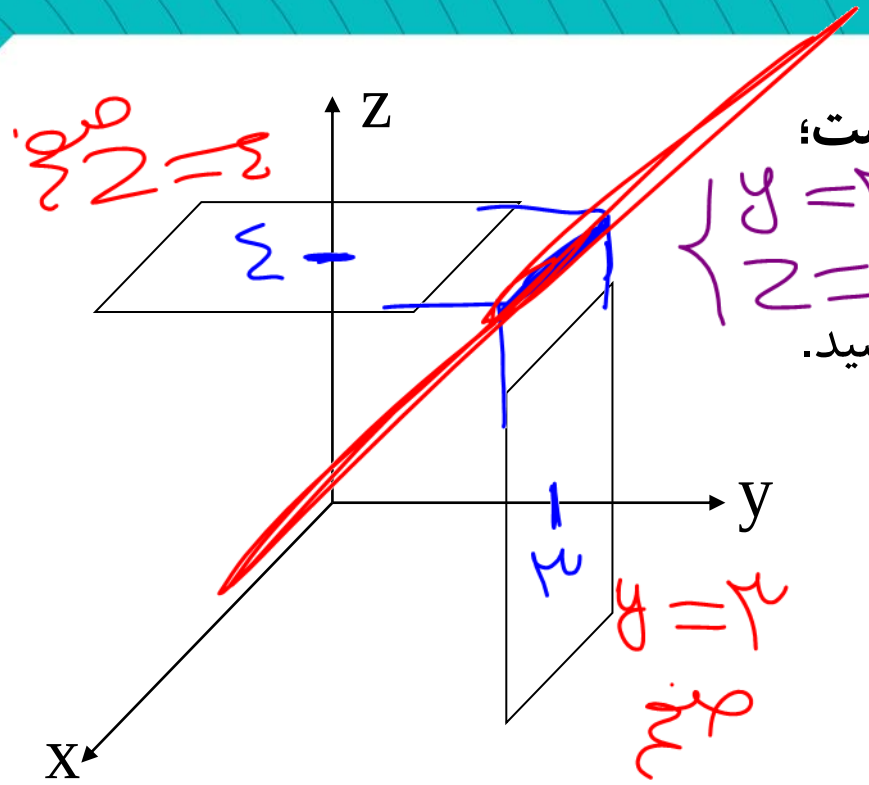
نقطهٔ (a, b, c) در فضا

مثال : در شکل زیر نمودار یک خط در فضا رسم شده است؛

الف) معادلهٔ صفحاتی که از تلاقی آنها این خط بدست آمده است را بنویسید.

ب) معادلهٔ خط را بنویسید.





مثال : در شکل زیر نمودار دو صفحه در فضا نمایش داده شده است؛

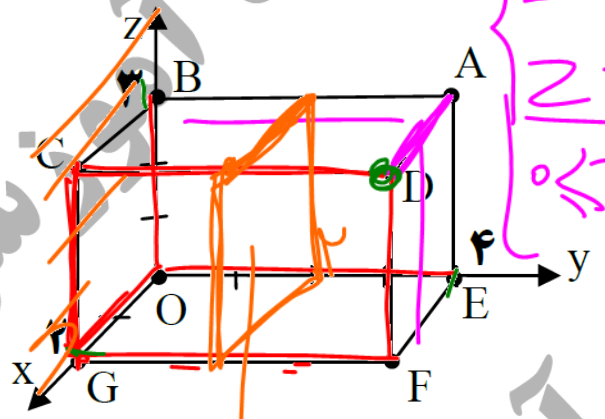
الف) معادلهٔ دو صفحه را بنویسید.

ب) معادلهٔ خطی که از تلاقی این دو صفحه به دست می‌آید را بنویسید.

۱۱	به سؤالات زیر پاسخ دهید .	۱/۵
	الف) معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسیدکه از نقطه $A=(۲,۳,۴)$ بگذرد و با صفحه xoy موازی باشد.	
	ب) معادلات $\begin{cases} x=۰ \\ z=۰ \end{cases}$ مربوط به کدام محور است؟	
	پ) در فضای $\mathbb{R}^۳$، نقطه A به طول ۲ روی محور طولها و نقطه $B=(-۴,۶,-۳)$ مفروض‌اند مختصات وسط AB را بیابید.	

۱۲	به سؤالات زیر پاسخ دهید .	۱/۵
	الف) اگر $y = b$ معادلهٔ صفحه‌ای در فضای R^3 باشدکه از نقطه $A = (2,-3,4)$ بگذرد،مقدار عددی b چقدر است؟	
	ب) معادلات $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ مربوط به کدام محور در دستگاه مختصات R^3 است؟	
	پ) در فضای R^3، نقطه A به عرض۲وارتفاع۳ روی صفحه yoz و نقطه $B = (-4,6,-3)$ مفروض‌اند مختصات وسط AB را بیابید.	

۱۱	شکل کلی (نمودار) مر بوط به رابطه $x^2 \leq y \leq 2$ را رسم کنید .	۰/۵
۱۲	با توجه به شکل، به سوالات زیر پاسخ دهید . الف)نام وجه از شکل که معادله آن به صورت زیر مشخص شده را بنویسید . $x = 2$,$0 \leq y \leq 4$,$0 \leq z \leq 3$ ب) معادلات مربوط به پاره خط (یال) AD را بنویسید پ)مختصات نقطه D را بنویسید. ت) معادله صفحه ای را بنویسید که موازی با صفحه xoz باشد و مکعب مستطیل را نصف کند .	۱/۵



نهایی
بندی
جمع
پیشرفت، یعنی موفقیت

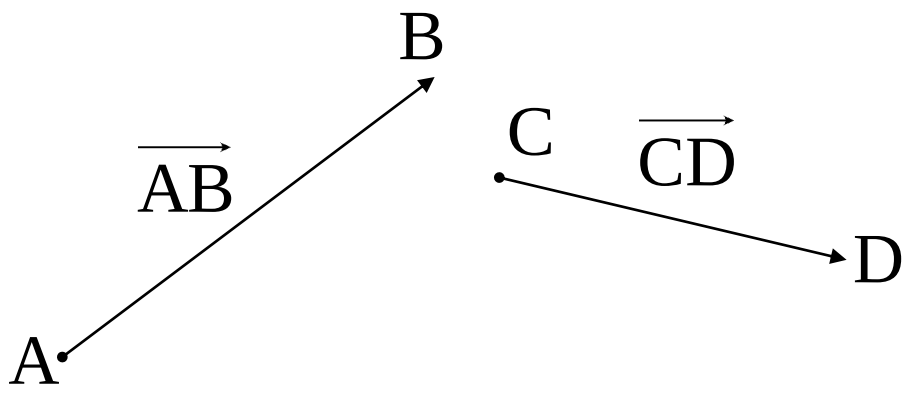
نهایی جمع بندی

هندسه دوازدهم

بردارها در صفحه و فضای R^3

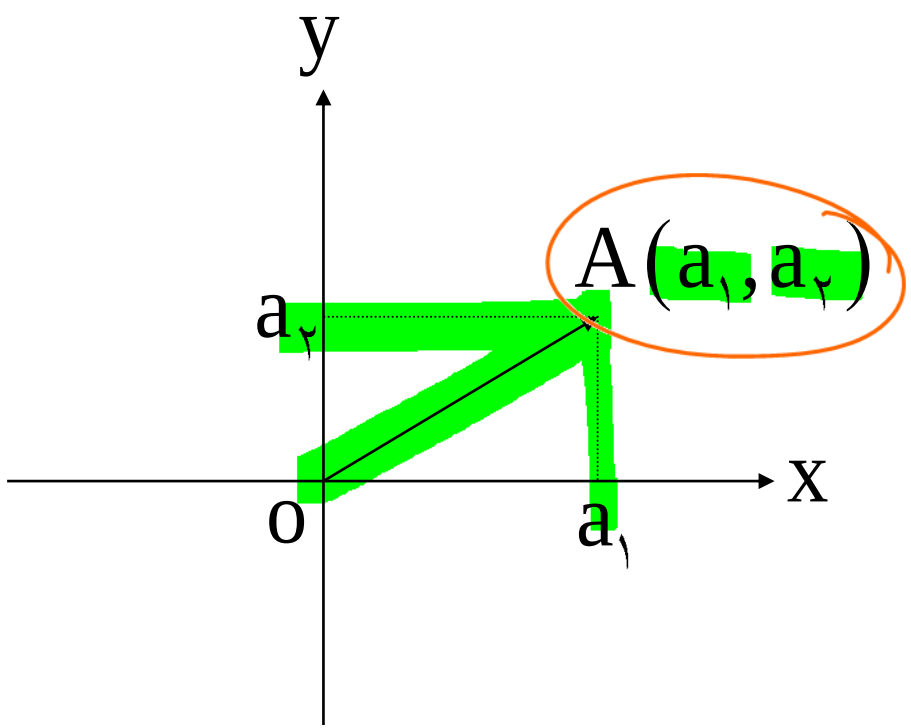
اپیزود ۱۴ : بردارها در صفحه و فضای $\mathbb{R}^3$

➢ **بردار** : هر پاره‌خط جهت‌دار مانند AB که ابتدای آن نقطهٔ A و انتهای آن نقطهٔ B باشد و آن را بصورت $\overrightarrow{AB}$ (یا برای سهولت با حرف کوچک مثلاً $\vec{a}$) نمایش می‌دهیم و اندازهٔ آن را با نماد $|\overrightarrow{AB}|$ یا $|\vec{a}|$ نشان می‌دهیم.



➢ با توجه به اینکه ابتدای بردارها را مبدأ مختصات در نظر می‌گیریم، مؤلفه‌های یک بـردار، مختصـات نقطـهٔ انتهایی آن می‌شود.

$\overrightarrow{OA} = \vec{a} = (a_1, a_2)$

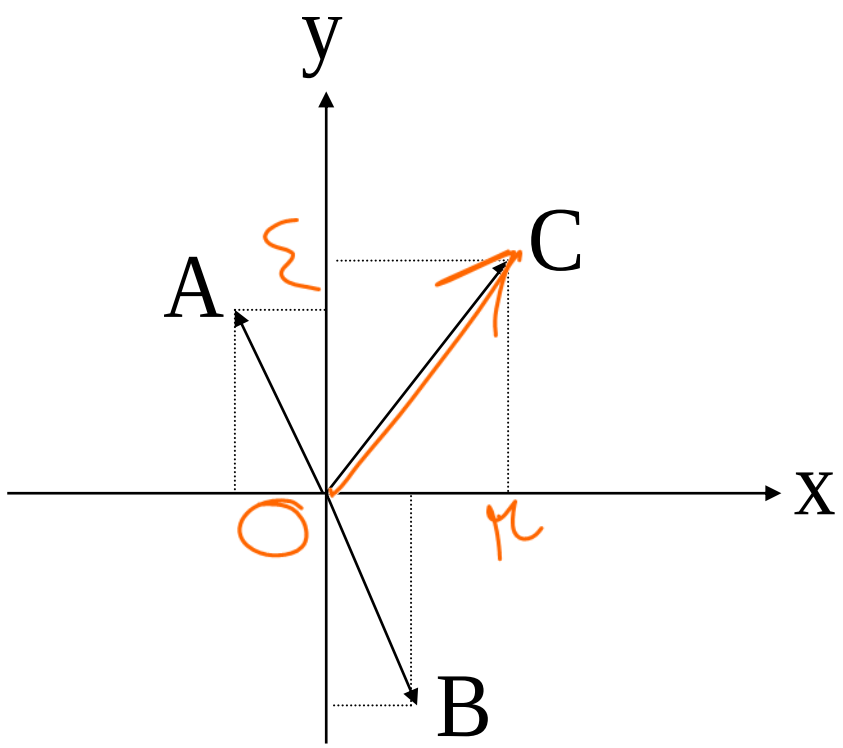


- هر نقطه از صفحه متناظر با یک بردار است و برعکس؛

$A(-۱,۳): \overrightarrow{OA} = \vec{a} = (-۱,۳)$

$B(۲,-۵): \overrightarrow{OB} = \vec{b} = (۲,-۵)$

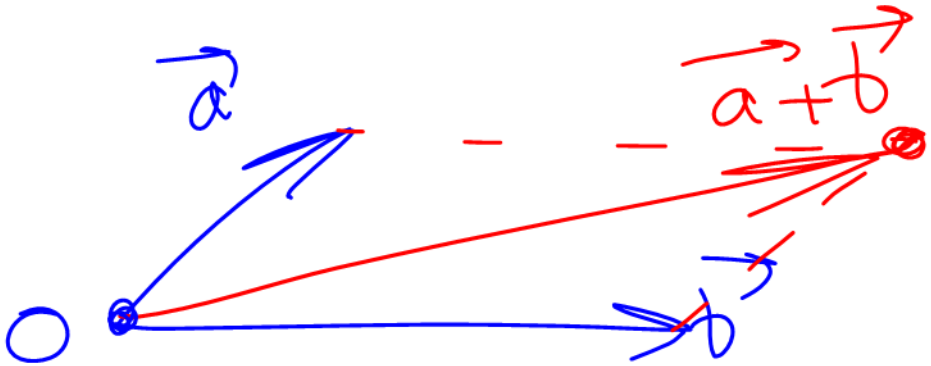
$C(۳,۴): \overrightarrow{OC} = \vec{c} = (۳,۴)$



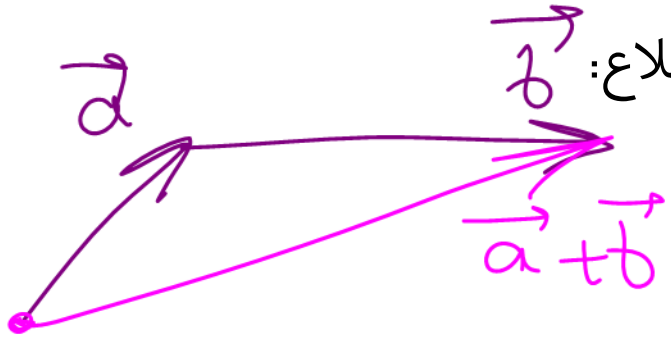
جمع دو بردار :

روش هندسی ←

۱) روش متوازی الاضلاع:



۲) روش مثلث:



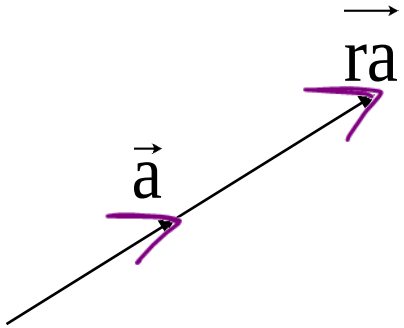
روش جبری ← مجموع مؤلفه‌های متناظر $\vec{a}=(a_1,a_2)\ ,\ \vec{b}=(b,b_2)$

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(a_1+b_1\ ,\ a_2+b_2)$$

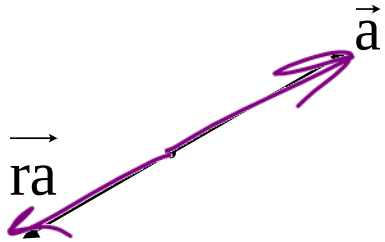
ضرب عدد حقیقی در بردار :

$$\vec{a} = (a_1, a_2) \; , \; r \in \mathbb{R}$$
$$r\vec{a} = r(a_1 \; , \; a_2) = (ra_1 \; , \; ra_2)$$

۱) اگر $r > 0$ باشد، $\vec{a}$ و $\overrightarrow{ra}$ هم‌راستا و هم‌جهت هستند.

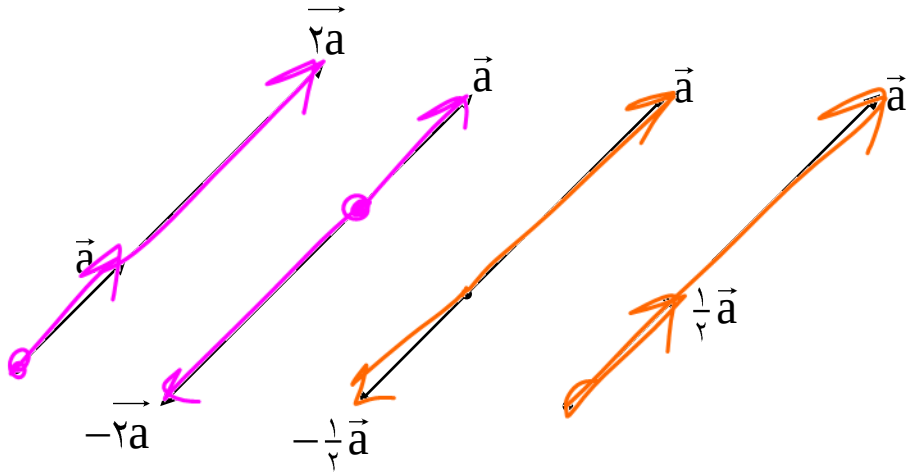


۲) اگر $r < 0$ باشد، $\vec{a}$ و $\overrightarrow{ra}$ هم‌راستا و مختلف‌الجهت هستند.



۳) اگر $|r| > ۱$ باشد، $|\overrightarrow{ra}|$ از $|\vec{a}|$ بزرگتر است.

۴) اگر $|r| < ۱$ باشد، $|\overrightarrow{ra}|$ از $|\vec{a}|$ کوچکتر است.

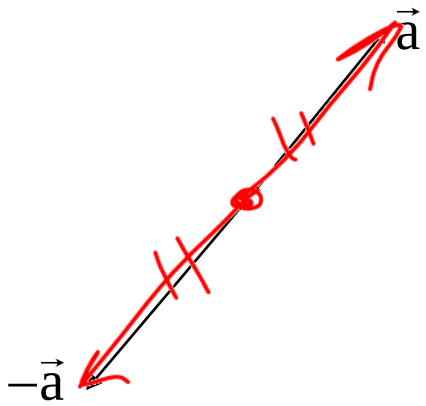


قرینهٔ بردار $\vec{a}$:

اگر $r = -1$ باشد، $\overrightarrow{ra}$ را قرینهٔ بردار $\vec{a}$ گوییم.

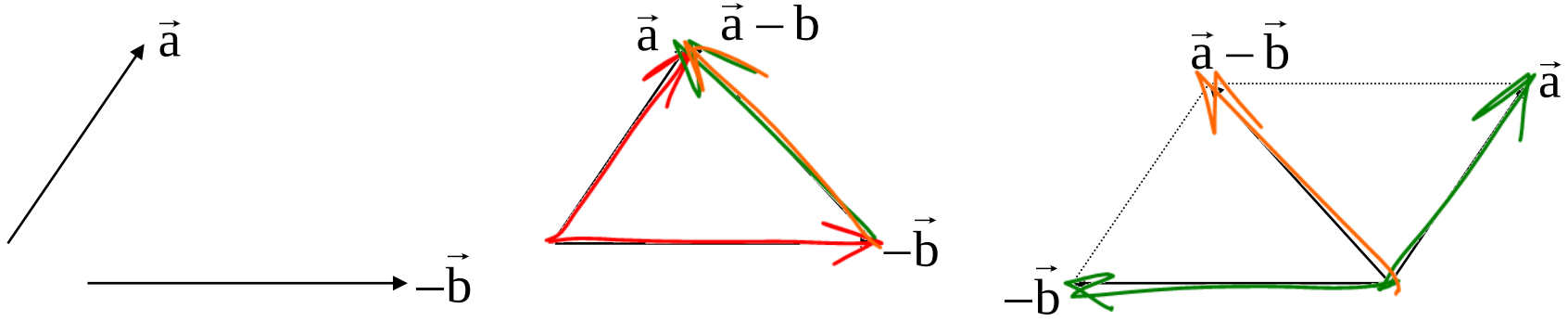
$$\vec{a} = (a_1, a_2)$$

$$\overrightarrow{ra} = -\vec{a} = (-a_1, -a_2)$$



تفاضل دو بردار به روش هندسی:

اگر هر دو بردار از یک نقطه رسم شده باشند، تفاضل $\vec{a}-\vec{b}$ برداری است که از انتهای $\vec{b}$ به انتهای $\vec{a}$ وصل شده باشد.

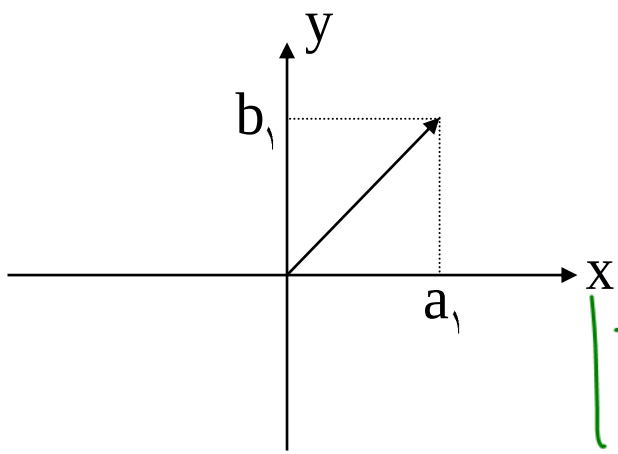


$$\vec{a}+(-\vec{b})=\vec{a}-\vec{b}$$

➢ **اندازه (طول) بردار $\vec{a}$:**

$$\vec{a} = (a_۱, a_۲)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_۱^۲ + a_۲^۲}$$



$\vec{u}(۳,۴)$

$|\vec{u}| = \sqrt{۹+۱۶} = \sqrt{۲۵} = ۵$

➢ **بردارهای یکه :**

بردار به طول واحد در جهت مثبت محور xها را با $\vec{i}$ نمایش داده و عبارت است از :

$$\vec{i} = (۱,۰)$$

بردار به طول واحد در جهت مثبت محور yها را با $\vec{j}$ نمایش داده و عبارت است از :

$$\vec{j} = (۰,۱)$$

هر بردار را می‌توان به صورت حاصل‌جمع مضاربی از بردارهای یکهٔ i و j نوشت :

$$\vec{a} = (a_1, a_2) = a_1(1,0) + a_2(0,1) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$$

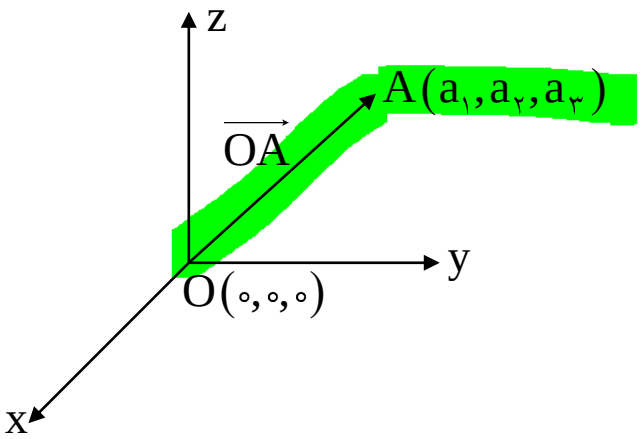
$$\vec{a} = (-2,5) = -2\vec{i} + 5\vec{j}$$

$$\vec{b} = (3,0) = 3\vec{i}$$

$$\vec{c} = (0,-4) = -4\vec{j}$$

$$(-2,2) = -2\vec{i} + 2\vec{j}$$

➢ **بردار در فضای $\mathbb{R}^3$** : مشابه بردارهای $\mathbb{R}^2$ به هر نقطه از فضای $\mathbb{R}^3$ می‌توان برداری نظیر کرد که از مبدأ مختصات شروع می‌شود.

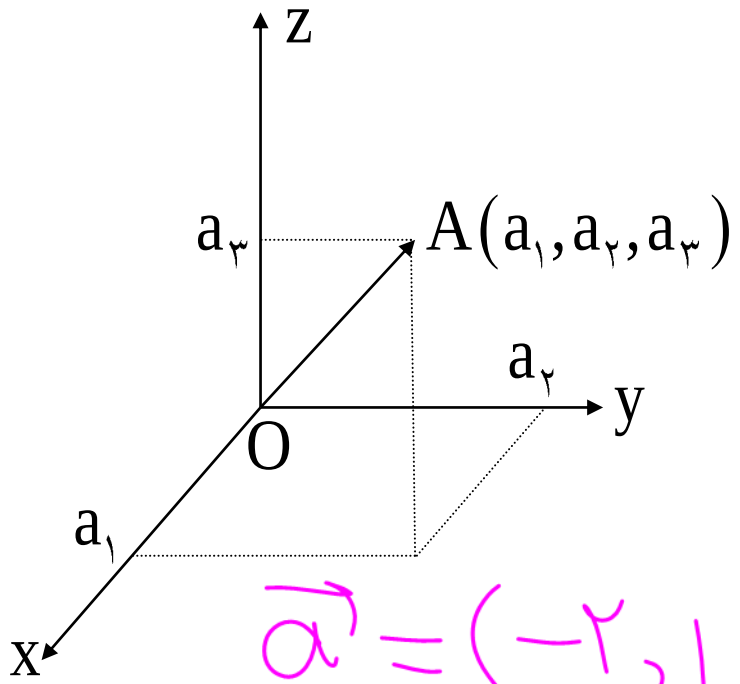


$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

➢ در بردار $\vec{a}$ مقادیر a_1, a_2, a_3 را مؤلفه‌های بردار $\vec{a}$ گوییم، همچنین مبدأ مختصات $o(0,0,0)$ نمایشگر بردار صفر $\vec{O}(0,0,0)$ است.

$\vec{O}$ ما بین صفر $\vec{0}$ بردار صفر

اندازهٔ بردار در فضای $\mathbb{R}^3$:



$$|\overrightarrow{OA}| = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$\vec{a} = (-2,1,2)$ $|\vec{a}| = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$

جمع و تفریق دو بردار : مشابه جمع و تفریق بردارها در صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ است.

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)\ ,\ \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1\ ,\ a_2 \pm b_2\ ,\ a_3 \pm b_3)$$

جمع هندسی دو بردار ← به روش متوازی‌الاضلاع و مثلث

تفاضل هندسی دو بردار ← اتصال از انتهای بردار دوم به انتهای بردار اول

➢ **ضرب عدد حقیقی در بردار** : مشابه ضرب عدد حقیقی در بردار در صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ است.

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$
$$\overrightarrow{ra} = r(a_1, a_2, a_3) = (ra_1, ra_2, ra_3)$$

در حالت خاص اگر $r = -1$ باشد، قرینهٔ بردار $\vec{a}$ به دست می‌آید؛

$$\overrightarrow{ra} = -(a_1, a_2, a_3) = (-a_1, -a_2, -a_3) = -a$$

- $r > 0$ هم‌جهت $\vec{a}$, $\overrightarrow{ra}$
  - $0 < r < 1$: $|\overrightarrow{ra}| < |\vec{a}|$
  - $r > 1$: $|\overrightarrow{ra}| > |\vec{a}|$
- $r < 0$ مختلف‌الجهت $\vec{a}$, $\overrightarrow{ra}$
  - $-1 < r < 0$: $|\overrightarrow{ra}| < |\vec{a}|$
  - $r < -1$: $|\overrightarrow{ra}| > |\vec{a}|$

بردارهای یکه در فضا :

$\vec{i}(۱,۰,۰)$ در جهت + x ها

$\vec{j}(۰,۱,۰)$ در جهت + y ها

$\vec{k}(۰,۰,۱)$ در جهت + z ها

$$\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)=a_۱(۱,۰,۰)+a_۲(۰,۱,۰)+a_۳(۰,۰,۱)$$

$$\Rightarrow \vec{a}=a_۱\vec{i}+a_۲\vec{j}+a_۳\vec{k}$$

$\vec{a}(۲,-۳,۵):\vec{a}=$

$\vec{b}(۰,۳,-۴):\vec{b}=$

$\vec{c}(-۴,۷,۰):\vec{c}=$

روابط و اعمال بین بردارها :

۱) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ خاصیت جابجایی جمع

۲) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ خاصیت شرکت‌پذیری جمع

۳) $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$ خاصیت عضو قرینه در جمع

۴) $\vec{a}+\vec{O}=\vec{O}+\vec{a}=\vec{a}$ خاصیت عضو خنثی در جمع «بردار صفر»

۵) $r(\vec{a}\pm\vec{b})=r\vec{a}\pm r\vec{b}$ $r\in\mathbb{R}$

۶) $(r\pm s)\vec{a}=r\vec{a}\pm s\vec{a}$ $r,s\in\mathbb{R}$

۷) $(rs)\vec{a}=r(s\vec{a})=s(r\vec{a})$ $r,s\in\mathbb{R}$

۸) $\vec{b}=r\vec{a}\Rightarrow|\vec{b}|=|r||\vec{a}|$

مثال : اگر $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ **و** $\vec{b}=(3,1,-1)$ **و** $r=-2$ **آنگاه بردار** $\overrightarrow{ra}+\vec{b}$ **و اندازهٔ آن را به دست آورید.**

$$-2(3,2,-1)+(3,1,-1)$$

$$(-6,-4,2)+(3,1,-1)$$

$$(-3,-3,1)\longrightarrow\sqrt{9+9+1}=\sqrt{19}$$

مثال : اگر $\vec{a}=(۴,۰,۳)$ **و** $\vec{b}=۴\vec{j}+۳\vec{k}$ **آنگاه اندازهٔ بردار** $|\vec{b}|\vec{a}-|\vec{a}|\vec{b}$ **را حساب کنید.**

$(۰,۴,۳)$

$|\vec{a}|=\sqrt{۱۶+۰+۹}=۵$

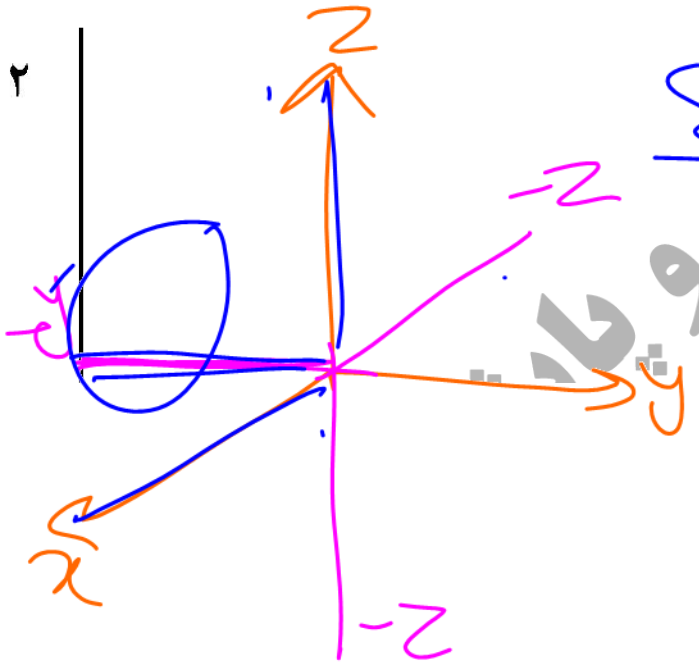
$|\vec{b}|=\sqrt{۱۶+۹}=۵$

$۵\vec{a}-۵\vec{b}=۵(\vec{a}-\vec{b})=۵(۴,۰-۴,۵)=(۲۰,۰-۲۲,۵)$

$\sqrt{۴۰۰+۴۵۰+۲۵}=\sqrt{۸۷۵}$

مثال : اگر $\vec{a}=۲\vec{i}+۳\vec{j}+\vec{k}$ **و** $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ **مطلوب است حاصل عبارت** $\dfrac{|\vec{a}-۲\vec{b}|}{|\vec{a}+۲\vec{b}|}$

۱۲	اگر $\vec{a}=۲\vec{i}-\vec{k}$ و $\vec{b}=(۱,۲,۱)$ باشد، طول بردار $\vec{a}-۲\vec{b}$ را به‌دست آورید.	۱
۱۵	دو بردار $\vec{a}=(۳,-۲,۱)$ و $\vec{b}=-۲\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ را در نظر بگیرید. الف) بردار $\vec{a}$ در کدام ناحیه از فضای $\mathbb{R}^۳$ واقع است؟ (شماره ناحیه ذکر شود). ب) طول بردار $\vec{a}+۲\vec{b}$ را حساب کنید.	۲



نهایی
بندی
جمع
پیشرفت، یعنی موفقیت

نهایی بندی جمع

هندسه دوازدهم

ضرب داخلی دو بردار

اپیزود ۱۵ : ضرب داخلی دو بردار

➢ **ضرب داخلی دو بردار** : ضرب داخلی یا نقطه‌ای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را با $\vec{a}.\vec{b}$ نمایش داده و بصورت زیر تعریف می‌شود؛

$\vec{a}=(a_1,a_2)\ ,\ \vec{b}=(b_1,b_2)\in\mathbb{R}^2\ ;\ \vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)\ ,\ \vec{b}=(b_1,b_2,b_3)\in\mathbb{R}^3\ ;\ \vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

برد

مثال : برای هر جفت از بردارهای زیر حاصلضرب داخلی دو بردار را حساب کنید.

الف) $\vec{a}=(۲,-۳)\ ,\ \vec{b}=(۳,۷)$ $\longrightarrow a\circ b=۶-۲۱=-۱۵$

ب) $\vec{a}=(-۱,۴,۵)\ ,\ \vec{b}=(۲,۸,-۶)$

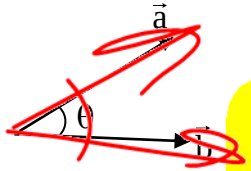
$a\circ b=-۲+۳۲-۳۰=۰$

- حاصلضرب داخلی دو بردار همواره عددی حقیقی است.

یعنی از ضرب داخلی دو بردار در هم دیگر برداری وجود نخواهد داشت و تنها یک عدد حقیقی باقی می‌ماند.

در حالت کلی : $\vec{a}.\vec{b} = \underbrace{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}_{\text{عدد}}$

- **محاسبهٔ ضرب داخلی دو بردار با داشتن اندازهٔ دو بردار و زاویهٔ بین آنها :**



اگر $|\vec{a}|$ و $|\vec{b}|$ اندازه‌های دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و θ زاویهٔ بین دو بردار باشد، آنگاه؛ $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

اندازه

مثال : اگر داشته باشیم $|\vec{b}| = ۲|\vec{a}| = ۸$ **و زاویهٔ بین دو بردار** $\vec{a}$ **و** $\vec{b}$ **برابر** ۶۰° **باشد، ضرب داخلی** a.b **را حساب کنید.**

$|\vec{a}| = ۴$

$|a \cdot b| = |a||b|\cos\theta = ۴ \times ۸ \times \frac{۱}{۲} = ۱۶$

$a \cdot b = |a||b|\cos\theta \rightarrow \cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$

محاسبهٔ زاویهٔ بین دو بردار :

زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بصورت زیر محاسبه می‌شود؛

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_۱b_۱ + a_۲b_۲ + a_۳b_۳}{\sqrt{a_۱^۲ + a_۲^۲ + a_۳^۲}\sqrt{b_۱^۲ + b_۲^۲ + b_۳^۲}}$$

مثال : زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}=(۲,-۱,۲)$ و $\vec{b}=(۱,-۱,۰)$ را به دست آورید.

$$\cos\theta=\frac{۲+۱+۰}{\sqrt{۴+۱+۴}\times\sqrt{۱+۱+۰}}=\frac{۳}{۳\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\rightarrow\theta=۴۵^\circ$$

مثال : اگر اندازهٔ دو بردار زیر برابر باشد، کسینوس زاویهٔ بین دو بردار را حساب کنید.

$$\vec{a} = (۲, a+۱, ۴) = (۲, ۳, ۴)$$

$$\vec{b} = (a, ۴, ۳) = (۲, ۴, ۳)$$

$$\sqrt{۴+(a+۱)^۲+۱۶} = \sqrt{a^۲+۱۶+۹}$$

$$۲۰+a^۲+۲a+۱ = a^۲+۲۵$$

$$۲a = ۴$$

$$a = ۲$$

$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{۴+۱۲+۱۲}{\sqrt{۴+۹+۱۶} \times \sqrt{۴+۹+۱۶}} = \frac{۲۸}{۲۹}$$

مثال : اگـر $\vec{a}=۲\vec{i}+۳\vec{j}+\vec{k}$ و $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ آنگـاه کسـینوس زاویـهٔ بـین دو بـردار $\vec{a}-\vec{b}$ و $\vec{a}+\vec{b}$ را بدست آورید.

$$a+b=(۳,۲,۲)$$

$$a-b=(۱,۴,۰)$$

$$\cos\theta=\frac{۳+۸+۰}{\sqrt{\frac{۹+۴+۴}{۱۷}}\times\sqrt{\frac{۱+۱۶+۰}{۱۷}}}=\frac{۱۱}{۱۷}$$

خواص ضرب داخلی دو بردار :

۱) $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ خاصیت جابجایی

اثبات :

$$a.b = a_۱b_۱ + a_۲b_۲ + a_۳b_۳$$
$$= b_۱a_۱ + b_۲a_۲ + b_۳a_۳$$
$$= \vec{b}.\vec{a}$$

خاصیت پخشی :

$$۲)\ \vec{a}.(\vec{b}\pm\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}\pm\vec{a}.\vec{c}$$

اثبات :

$$\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=a_۱(b_۱+c_۱)+a_۲(b_۲+c_۲)+a_۳(b_۳+c_۳)$$
$$=a_۱b_۱+a_۱c_۱+a_۲b_۲+a_۲c_۲+a_۳b_۳+a_۳c_۳$$
$$=(a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳)+(a_۱c_۱+a_۲c_۲+a_۳c_۳)$$
$$=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$$

$$۳)\ \vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}|^{۲}$$

اثبات :

$$\vec{a}.\vec{a} = a_۱a_۱ + a_۲a_۲ + a_۳a_۳$$

$$= a_۱^{۲} + a_۲^{۲} + a_۳^{۲}$$

$$= (\sqrt{a_۱^{۲} + a_۲^{۲} + a_۳^{۲}})^{۲} = |\vec{a}|^{۲}$$

پس در بردارهای یکه داریم :

$$\vec{i}.\vec{i} = |\vec{i}|^{۲} = ۱$$

$$\vec{j}.\vec{j} = |\vec{j}|^{۲} = ۱$$

$$\vec{k}.\vec{k} = |\vec{k}|^{۲} = ۱$$

۴) $\vec{a}.\vec{b}=0 \overset{\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0}}{\Leftrightarrow} \vec{a}\perp\vec{b}$

اثبات :

$$\vec{a}.\vec{b}=0 \Leftrightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=0$$

$$\overset{|\vec{a}|\neq 0}{\overset{|\vec{b}|\neq 0}{\Leftrightarrow}} \cos\theta=0 \Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$$

نتیجه: ضرب داخلی هر دو بردار عمود بر هم برابر صفر است.

مثال : مقدار m را طوری تعیین کنید که دو بـردار $\vec{a}=(m+۱,۵,-۱)$ و $\vec{b}=(۲,-m,۳)$ بـر هـم عمـود باشند.

$$a \cdot b = ۰ \longrightarrow ۲m+۲-۵m-۳=۰$$

$$-۳m=۱$$

$$m=-\frac{۱}{۳}$$

۵) $\vec{a}.\vec{0} = \vec{0}.\vec{a} = 0$

عضو خنثای ضرب داخلی

بردار صفر $\vec{0}$

مثال : اگر برای دو بردار عمود بر هم $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داشته باشیم $|a|=۳$ ،$|b|=۹$ آنگاه حاصل عبارت زیر را حساب کنید :

$|a|=۳$

$$(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})$$

$$a\circ a - a\circ b + b\circ a - b\circ b$$

$$|a|^۲ - |b|^۲ = ۹ - ۸۱ = -۷۲$$

مثال : اگر زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر 120° و داشته باشیم $|\vec{a}|=5$ و $|\vec{b}|=2$ آنگاه حاصل $(\vec{a}+2\vec{b}).(2\vec{a}-\vec{b})$ را به دست آورید.

$$(a+2b).(2a-b) = 2|a|^2 - a\cdot b + 4a\cdot b - 2|b|^2$$

$$= 2(25) + 3a\cdot b - 2(4)$$

$$= 50 + 3|a||b|\cos\theta - 8$$

$$= 42 + 3(5)(2)\left(\frac{-1}{2}\right) = 42 - 15 = 27$$

مثال : اگر زاویهٔ بین دو بردار a و b با اندازه‌های $|\vec{a}| = ۲|\vec{b}|$ برابر ۶۰° باشد، زاویهٔ بین بردارهای $\vec{a} - \vec{b}$ و $\vec{a}$ را حساب کنید.

۶) $|\vec{a}.\vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|$ نامساوی کُشی شوارتز

اثبات :

$$\times|\vec{a}||\vec{b}| \quad \cos\theta \le ۱ \Rightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \le |\vec{a}||\vec{b}|$$

$$\Rightarrow |\vec{a}.\vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|$$

۱۶	برای دو بردارغیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ثابت کنید دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برهم عمودند اگر وفقط اگر $\vec{a}.\vec{b}=0$.	۱

$$a \cdot b = 0 \iff \begin{matrix} |a| \neq 0 \\ |b| \neq 0 \end{matrix} \Rightarrow a \perp b$$

۱۷	زاویه بین دو بردار $\vec{a}=(۲,-۱,۲)$ و $\vec{b}=(۱,-۱,۰)$ را به دست آورید.	۱/۲۵

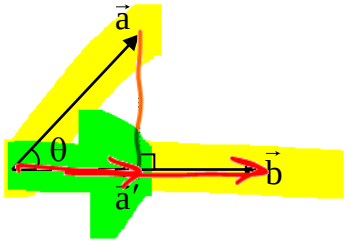
نهایی
بندی
جمع
پیشرفت، یعنی موفقیت

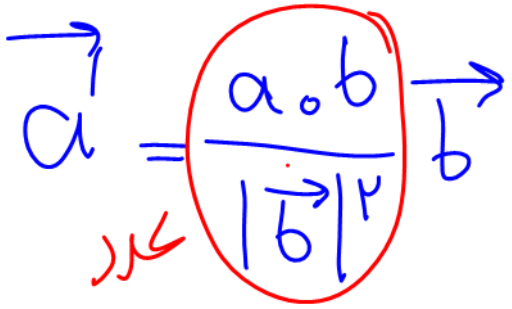
نهایی بندی جمع

هندسه دوازدهم

کاربردهای ضرب داخلی

اپیزود ۱۶ : کاربردهای ضرب داخلی





➢ **محاسبهٔ تصویر بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$:**

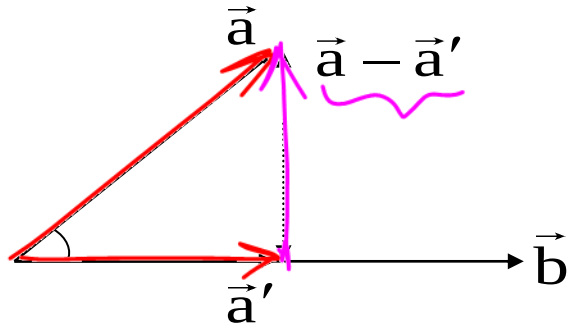
مطابق شکل، $\vec{a}'$ تصویر بردار $\vec{a}$ روی بردار $\vec{b}$ است.

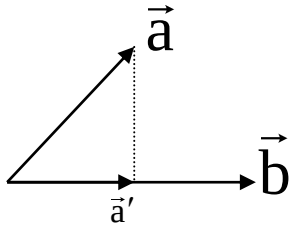
همانگونه که مشاهده می‌کنید :

اولاً : بردار $\vec{a}'$ موازی و هم‌جهت بردار $\vec{b}$ است پس $\vec{a}' = r\vec{b}$

ثانیاً : مطابق شکل بردار $\vec{a}-\vec{a}'$ بر $\vec{b}$ عمود است پس :

$$(\vec{a}-\vec{a}').\vec{b}=0 \Rightarrow (\vec{a}-r\vec{b}).\vec{b}=0 \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}-r|\vec{b}|^2 \Rightarrow r=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$





و درنتیجه خواهیم داشت :

$$\vec{a}'=r\vec{b} \Rightarrow \vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$$

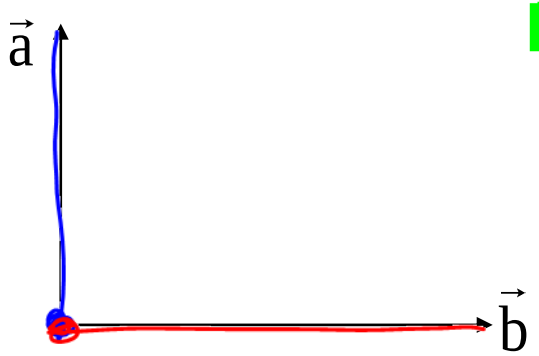
اندازهٔ تصویر : $|a'|=\frac{a.b}{|b|}$

مثال : تصویر قائم بردار $\vec{a}=(۲,-۱,۲)$ را بر امتداد بردار $\vec{b}=(۱,-۱,۰)$ به دست آورید.

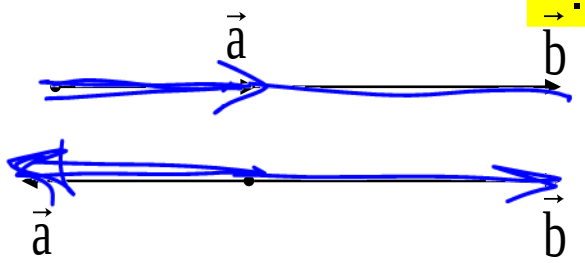
$$\vec{a'}=\frac{a\cdot b}{|b|^{۲}}\vec{b}=\frac{(۲+۱)^{۳}+۰}{(۱+۱)^{۲}+۰}(۱,-۱,۰)$$

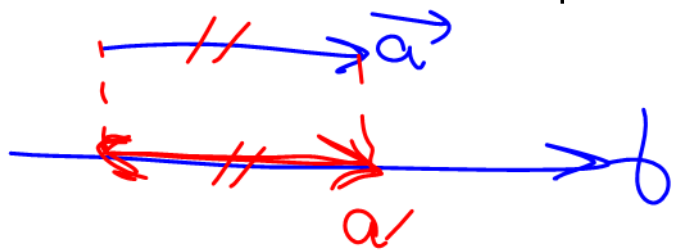
$$=\frac{۳}{۲}(۱,-۱,۰)=\left(\frac{۳}{۲},-\frac{۳}{۲},۰\right)$$

- اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند، تصویر هر کدام بر دیگری بردار صفر خواهد شد :



- اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هم‌راستا باشند، تصویر هر کدام بر دیگری برابر بردار اول خواهد بود.





مثال : تصویر بردار $\vec{i}=(۱,۰,۰)$ **را بر امتداد بردار** $\vec{j}=(۰,۱,۰)$ **بیابید.**

$\vec{i} \perp \vec{j}$: $\vec{i'} = \frac{\vec{i}\cdot\vec{j}}{|\vec{j}|^2}\vec{j} = \vec{0}$

مثال : تصویر قائم بردار $\vec{a} = (۱,۲,۲)$ را نسبت به بردار $\vec{b} = (۲,۱,۲)$ به دست آورید.

مثال : طول تصویر قائم بردار $\vec{a} = (-۵, ۳, -۷)$ را بر راستای محور yها بیابید.

تصویر روی yها

$(۰, ۳, ۰)$

اندازه $= ۳$

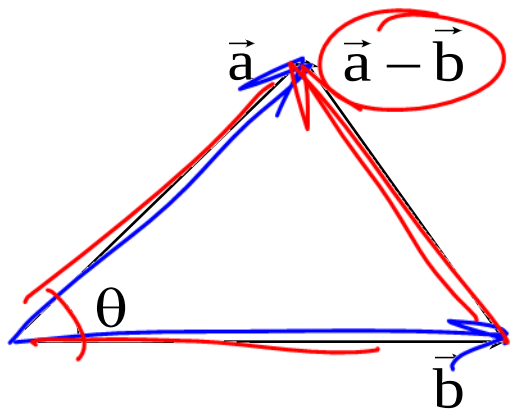
مثال : اگر $\vec{a}=(۱,-۳,۴)$ **و** $\vec{b}=(۳,-۴,۲)$ **و** $\vec{c}=(-۱,۱,۴)$ **آنگاه تصویر قائم بردار** $\vec{a}$ **بر امتداد** $\vec{b}+\vec{c}$ **را به دست آورید.**

$\vec{a}\ (۱,-۳,۴)$

$\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}=(۲,-۳,۶)$

$a'=\frac{a\cdot d}{|d|^۲}d$

مطابق شکل و به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث، اندازهٔ تفاضل دو بردار به صورت زیر قابل محاسبه است :



$$|a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2\overbrace{|a||b|\cos\theta}^{\vec{a}.\vec{b}}$$

همچنین اندازه مجموع دو بردار نیز بصورت زیر قابل محاسبه است:

$$|a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2\overbrace{|a||b|\cos\theta}^{\vec{a}.\vec{b}}$$

که به کمک روشهای متوازی الاضلاع و مثلث در مجموع دو بردار قابل محاسبه است.

مثال : اگر $|\vec{a}| = ۲$ **و** $|\vec{b}| = ۵$ **و** $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{۳۹}$ **باشد، زاویهٔ بین دو بردار** $\vec{a}$ **و** $\vec{b}$ **را به دست آورید.**

$$|a-b|^۲ = |a|^۲ + |b|^۲ - ۲|a||b|\cos\theta$$

$$۳۹ = ۴ + ۲۵ - ۲ \times ۲ \times ۵ \times \cos\theta \longrightarrow \cdots$$

مثال : اگر $|\vec{a}|=|\vec{b}|=۲$ **و** $|\vec{a}-\vec{b}|=۲\sqrt{۳}$ **آنگاه حاصل** $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-۲\vec{b})$ **را محاسبه کنید.**

(۱) $|a-b|^۲=|a|^۲+|b|^۲-۲a\circ b$

$۱۲=۴+۴-۲a\circ b$

$۴=-۲a\circ b \rightarrow a\circ b=-۲$

(۲) $|a|^۲-۲a\circ b+a\circ b-۲|b|^۲$

$۴-a\circ b-۸$

$۴-(-۲)-۸=-۲$

مثال : برای دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ اگر داشته باشیم : $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$ آنگاه بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ نسبت به هم چگونه‌اند؟

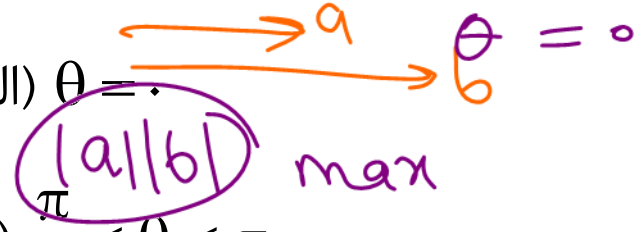
$|a-b|^2=|a|^2+|b|^2-2a\cdot b$

$\rightarrow a\cdot b=0 \rightarrow a\perp b$

a و b بر هم عمودند.

مسئله : برای هریک از حالات زیر، شکل دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و رابطهٔ ضرب داخلی دو بردار را بنویسید :

الف) $\theta = 0$



ب) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$|a||b|\cos\theta > 0$

پ) $\theta = \frac{\pi}{2}$

$|a||b| \times 0$

0

ت) $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

$|a||b|\cos\theta < 0$

ث) $\theta = \pi$

$-|a||b|$

min

مسئله : مجموع و تفاضل دو بردار را در حالت‌های زیر رسم کرده و ویژگی هریک را توصیف کنید.

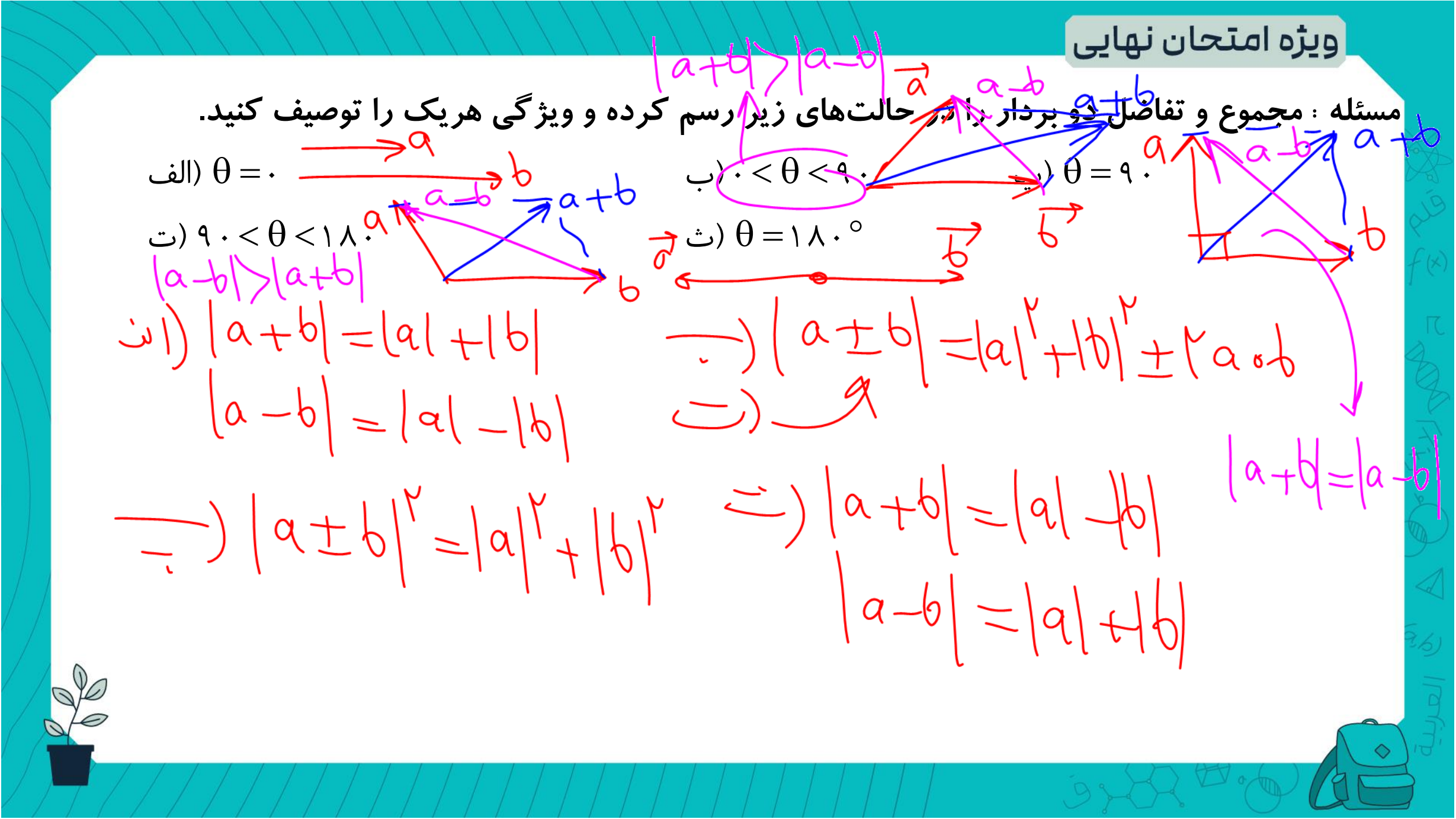
الف) $\theta = 0$

ب) $0 < \theta < 90$

پ) $\theta = 90$

ت) $90 < \theta < 180$

ث) $\theta = 180^\circ$



ث) $|a \pm b| = |a|^2 + |b|^2 \pm 2a \cdot b$

ت) $|a+b| = |a| - |b|$

$|a-b| = |a| + |b|$

پ) $|a \pm b|^2 = |a|^2 + |b|^2$

ب) $|a+b| = |a-b|$

الف) $|a+b| = |a| + |b|$

$|a-b| = |a| - |b|$

مسئله: اگر $|\vec{a}|=1$ **و** $|\vec{b}|=2$ **و** $|\vec{c}|=3$ **باشند و داشته باشیم** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ **آنگاه حاصل عبارت** $\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c}$ **را به دست آورید.**

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2(\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c})$$

A

A

$$0=1+4+9+2A$$

$$-14=2A \rightarrow A=-7$$

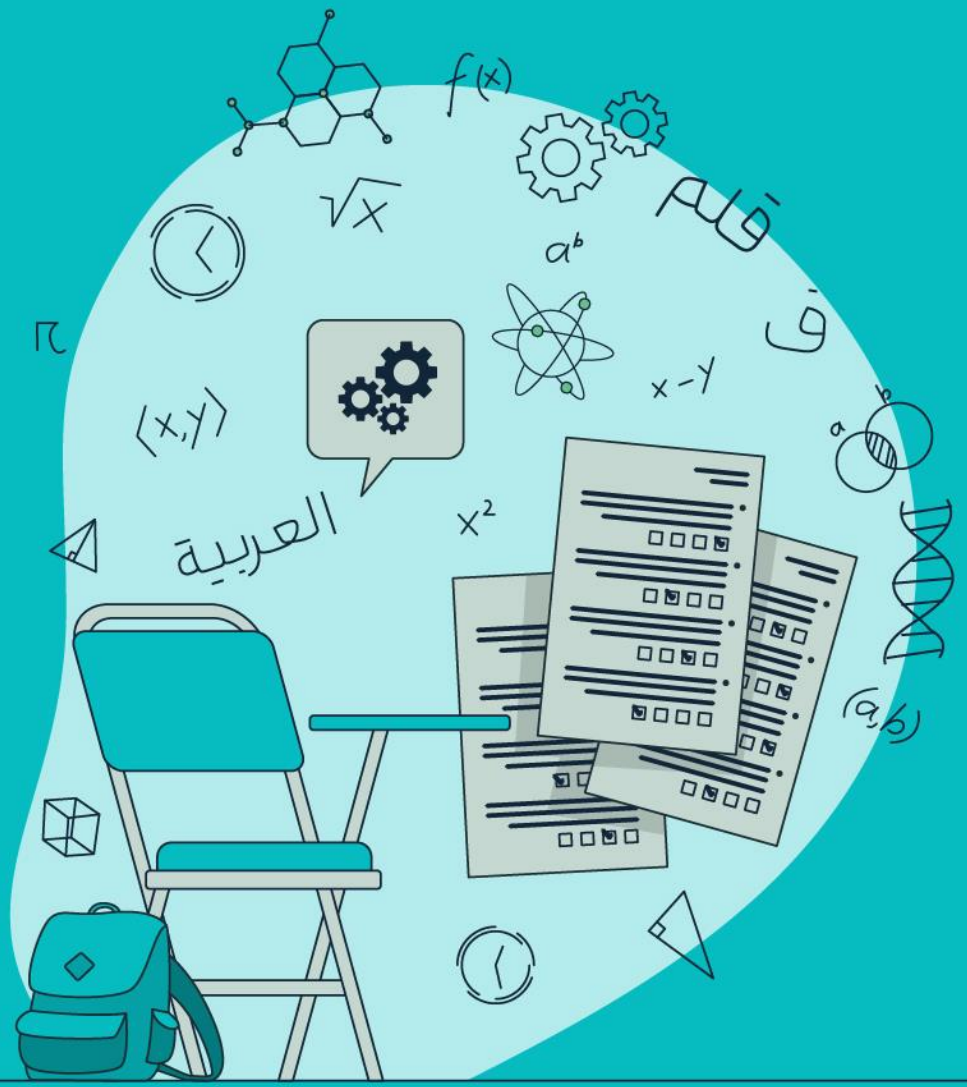
۱۳	بردارهای $\vec{a}=(۱,-۳,۲)$ و $\vec{b}=(-۲,۱,-۵)$ را در نظر بگیرید. الف) تصویر قائم بردار $\vec{a}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ به‌دست آورید. ب) برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بنویسید.	۱/۷۵

۱۶	بردارهای $\vec{a}=(-۲,۰,۲)$ و $\vec{b}=۲\vec{j}+۲\vec{k}$ را در نظر بگیرید. الف) زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به‌دست آورید. ب) تصویر قائم بردار $\vec{a}+\vec{b}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ به‌دست آورید.	۲

۱۳	اگر $\vec{a}=(۱,-۳,۴)$ ، $\vec{b}=(۳,-۴,۲)$ و $\vec{c}=(-۱,۱,۴)$ باشندآنگاه تصویرقائم بردار $\vec{a}$ برامتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را به دست آورید.	۱/۵
۱۴	اگر $\vec{a}$و $\vec{b}$و $\vec{c}$بردارهایی باشند به ترتیب باطول های ۱و۲و۳ بااین ویژگی که $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}$ ، مقدار عددی عبارت $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$ را به دست آورید.	۱/۲۵

مرکز سنجش و

نهایی
بندی
جمع
پیشرفت، یعنی موفقیت



جمع بندی نهایی

هندسه دوازدهم

ضرب خارجی بردارها

اپیزود ۱۷ : ضرب خارجی بردارها

➢ **ضرب خارجی دو بردار** : برای دو بردار $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ ضرب خارجی یـا بـرداری را با نماد $\vec{a}\times\vec{b}$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

بسط نسبت به سطر اول

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\vec{k}$$

مثال : ضرب خارجی دو بردار $\vec{a}=(-۱,۳,۴)$ **و** $\vec{b}=(۲,-۵,۰)$ **را به دست آورید.**

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -۱ & ۳ & ۴ \\ ۲ & -۵ & ۰ \end{vmatrix}$$

$$۲۰i+۸j-k$$

$$(۲۰,۸,-۱)$$

- حاصلضرب خارجی دو بردار، همواره یک بردار است.

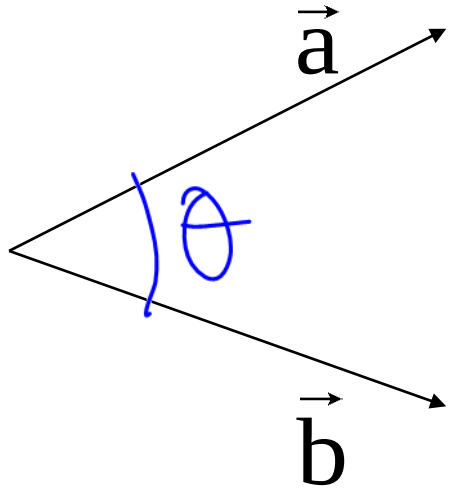
$$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3) \quad , \quad \vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$$

محاسبهٔ ضرب خارجی دو بردار با داشتن اندازهٔ دو بردار و زاویهٔ بین آنها :

اگر $|\vec{a}|$ و $|\vec{b}|$ اندازه‌های دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و θ زاویهٔ بین دو بردار باشد، آنگاه :

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$



$$|a\times b| = |a||b|\cos\theta$$

مثال : اگر $|\vec{a}| = \sqrt{3}$ $|b| = 2\sqrt{3}$ و زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر 60° باشد، اندازهٔ ضرب خـارجی $\vec{a} \times \vec{b}$ را حساب کنید.

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |a||b|\sin\underbrace{\theta}_{60} = \sqrt{3}\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

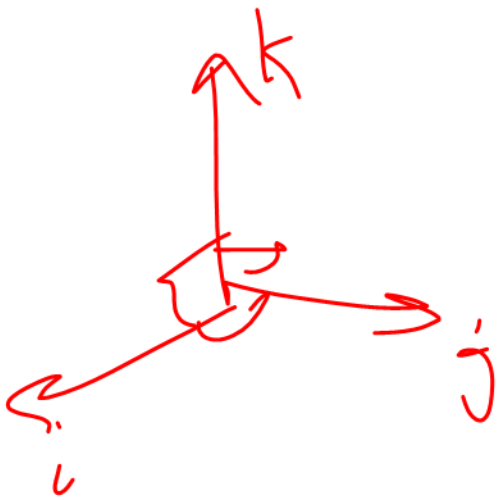
$|b| = 2$

مثال : اندازهٔ هریک از بردارهای زیر را حساب کنید.

$\vec{i}\times\vec{j}\ ,\ \vec{j}\times\vec{i}\ ,\ \vec{j}\times\vec{k}\ ,\ \vec{k}\times\vec{j}\ ,\ \vec{i}\times\vec{k}\ ,\ \vec{k}\times\vec{i}$

$|\vec{i}||\vec{j}|\sin 90^\circ = 1$

$|\vec{k}||\vec{i}|\sin 90^\circ = 1$



برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ رابطهٔ بین ضرب داخلی و ضرب خارجی به صورت زیر قابل اثبات است :

$$(\vec{a}.\vec{b})^2 + |\vec{a}\times\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2$$

اثبات :

$$(a.b)^2 + |a\times b|^2 = (|a||b|\cos\theta)^2 + (|a||b|\sin\theta)^2$$

$$= |a|^2\,|b|^2\cos^2\theta + |a|^2\,|b|^2\sin^2\theta$$

$$= |a|^2\,|b|^2\,(\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1}) = |a|^2\,|b|^2$$

مثال : بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروضند بطوریکه $|a|=۳$ و $|b|=۲۶$ و $|a\times b|=۷۲$ در اینصورت مقـدار $a.b$ را حساب کنید.

$$|a\times b|^{۲}+|a\cdot b|^{۲}=|a|^{۲}|b|^{۲}$$

$$۷۲^{۲}+|a\cdot b|^{۲}=۳^{۲}\times ۲۶^{۲}$$

➢ برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با زاویهٔ بین θ داریم :

$$\tan\theta = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}.\vec{b}|}$$

اثبات :

$$\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}.\vec{b}|} = \frac{|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta}{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

مثال : اگر $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{3}\left(\vec{a}.\vec{b}\right)$ **زاویهٔ بین دو بردار** a,b **چقدر است؟**

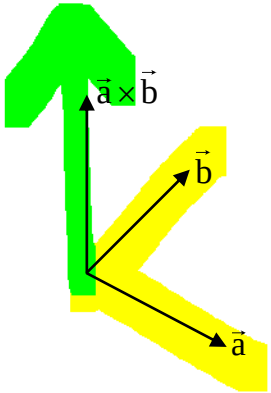
$$\tan\theta=\frac{|a\times b|}{|a\cdot b|}=\frac{\sqrt{3}|a\cdot b|}{|a\cdot b|}=\sqrt{3}$$

$$\theta=60^\circ$$

مثال : اگر $\vec{a}=(۲,-۳,۴)$ **و** $\vec{b}=(۱,۲,-۱)$ **آنگاه ضرب خارجی** $\vec{a}+\vec{b}$ **در** $\vec{a}-\vec{b}$ **را حساب کنید.**

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۳ & -۱ & ۳ \\ ۱ & -۸ & ۵ \end{vmatrix} = \text{- - -}$$

خواص ضرب خارجی دو بردار :



۱) حاصلضرب خارجی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برداری است عمود بر صفحهٔ دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$.

یعنی $\vec{a}\times\vec{b}$ بر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است.

نتیجهٔ ۱ :

$$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}\Rightarrow \vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b})=0$$
$$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}\Rightarrow \vec{b}.(\vec{a}\times\vec{b})=0$$

اثبات :

$$\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b})=$$
$$(a_1,a_2,a_3).(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)$$
$$=a_1a_2b_3-a_1a_3b_2+a_2a_3b_1-a_1a_2b_3+a_1a_3b_2-a_2a_3b_1=0$$

نتیجهٔ ۲ : برای بردارهای یکه $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ داریم :

$$i \times j = k \quad , \quad j \times k = i \quad , \quad k \times i = j$$

۲) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

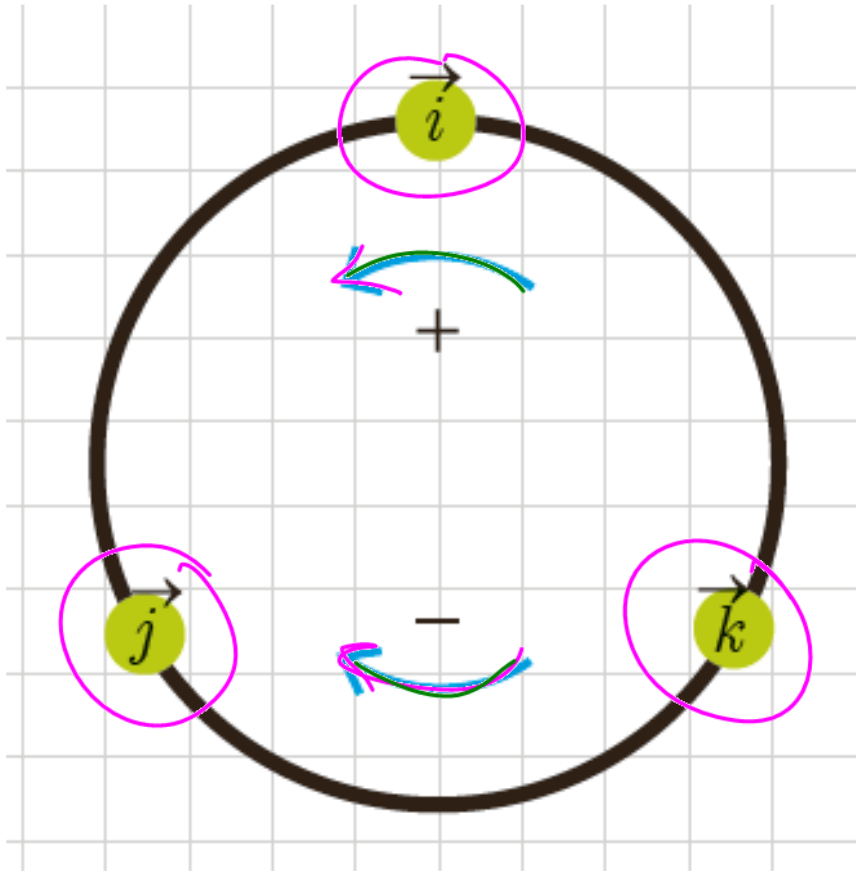
ضرب خارجی خاصیت جابجایی ندارد.

$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$

نتیجه :

$$j \times i = -k \quad , \quad k \times j = -i \quad , \quad i \times k = -j$$

برای ضرب خارجی بردارهای یکه $\mathrm{k}, \mathrm{j}, \mathrm{i}$ از دایرهٔ زیر می‌توان استفاده کرد :



$a \cdot a = |a|^2$

۳) $\vec{a} \times \vec{a} = 0$

اثبات : $\vec{a} \times \vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|\sin 0^\circ = 0$

۴) $\vec{a} \times (\vec{b} \pm \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \pm (\vec{a} \times \vec{c})$ خاصیت پخشی

۵) $r(\vec{a} \times \vec{b}) = \overrightarrow{ra} \times b = a \times \overrightarrow{rb} \;;\; r \in \mathbb{R}$

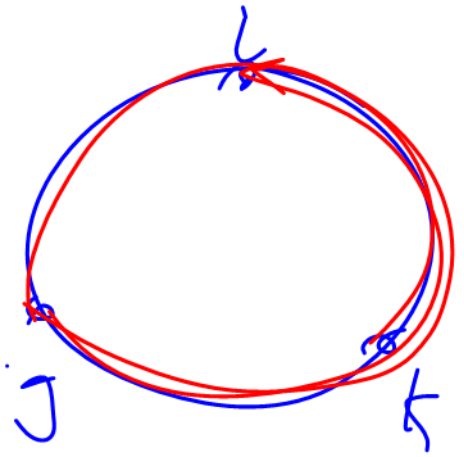
مثال : حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$k.(j\times i)+i.(j\times k)+j.(j\times k)$$

$-k$ $\quad i$

$$-|k|^2+|i|^2+j\cdot i$$

$$-1+1+0=0$$



مثال : اگر داشته باشیم $|\vec{a}| = ۳$ و $|\vec{b}| = ۴$ و زاویهٔ بین دو بردار ۱۵۰° باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید :

$$(۲a - ۳b) \times (۲a + ۳b)$$

$$۴a \times b - ۶b \times a$$

$$۴a \times b + ۶a \times b$$

$$۱۲a \times b = ۱۲|a||b|\sin\theta^{۱۵۰^\circ} = ۱۲ \times ۳ \times ۴ \times \frac{۱}{۲} = ۷۲$$

۶) $\vec{a}\times\vec{b}=0 \overset{\vec{a}\neq\vec{0}}{\underset{\vec{b}\neq\vec{0}}{\Leftrightarrow}} \vec{a}\parallel\vec{b}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \overset{|a|\neq 0}{\underset{|b|\neq 0}{\Leftrightarrow}} a\perp b$

اثبات :

$$\vec{a}\times\vec{b}=0 \Leftrightarrow |a||b|\sin\theta=0$$

$|a|\neq 0$

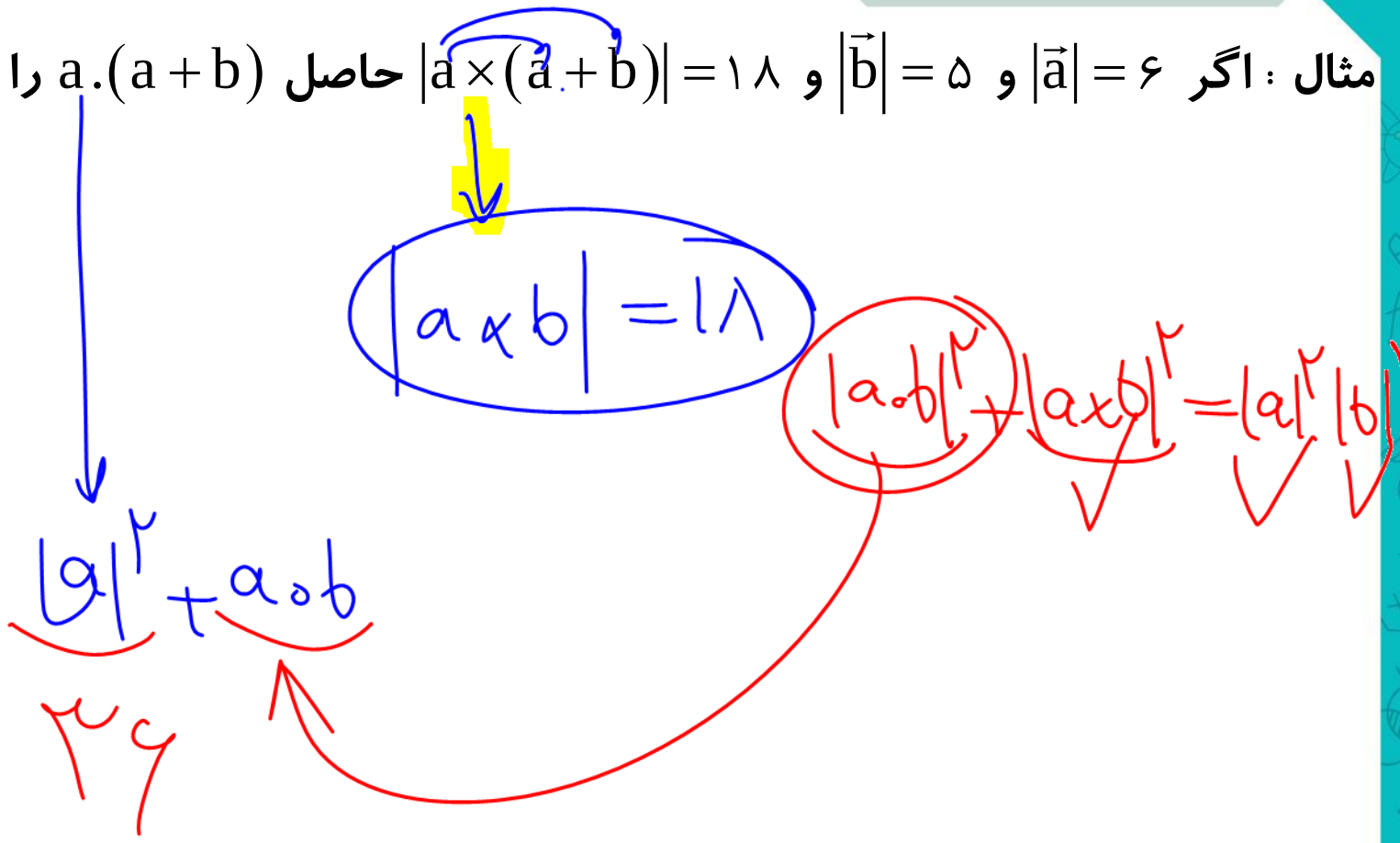
$$\Leftrightarrow \sin\theta=0 \Leftrightarrow \theta=0 \text{ یا } 180^\circ$$

$|b|\neq 0$

$$\Leftrightarrow \vec{a}\parallel\vec{b}$$

نتیجه: ضرب خارجی هر دو بردار موازی برابر صفر است.

مثال : اگر $|\vec{a}|=۶$ **و** $|\vec{b}|=۵$ **و** $|\vec{a}\times(\vec{a}+\vec{b})|=۱۸$ **حاصل** $a.(a+b)$ **را به دست آورید.**



مثال : برداری عمود بر دو بردار $(-۵,۱,-۲)$ **و** $(۲,-۳,۱)$ **بیابید.**

ضرب خارجی

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -۲ & ۱ & -۵ \\ ۱ & -۳ & ۲ \end{vmatrix} = \dots$$

مثال : اگر $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ **و** $\vec{b} = -\vec{i} + ۲\vec{j} - \vec{k}$ **آنگاه تصویر بردار** $a \times b$ **را بر امتداد بردار** a **را به دست آورید.**

$$a' = \frac{a \circ b}{|b|^۲} \vec{b}$$

مثال : برای دو بردار $\vec{a}=(۱,۰,-۱)$ **و** $\vec{b}=(۰,۲,۱)$ **حاصل** $(a-b)\times(a+b)$ **را به دست آورید.**

$a\times b - b\times a$

$a\times b$

$۲\,a\times b = ۲\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۲ & ۱ \end{vmatrix} =$

مثال : اگر $\vec{a}=2i-j+3k$ **و** $\vec{b}=-i+2k$ **آنگاه تصویر قائم بردار** $\vec{a}\times\vec{b}$ **را روی محور** y**ها به دست آورید.**

$(0,y,0)$

بررسی قانون حذف در ضرب داخلی و خارجی :

از رابطهٔ $a.b=a.c$ چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

$$\vec{a}.\vec{b}-\vec{a}.\vec{c}=0 \Rightarrow \vec{a}.(\vec{b}-\vec{c})=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{a}=\vec{0} \\ \vec{b}=\vec{c} \\ \vec{a}\perp\vec{b}-\vec{c} \end{cases}$$

یکی از سه حالت روبرو ممکن است رخ دهد :

از رابطهٔ $a\times b=a\times c$ چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

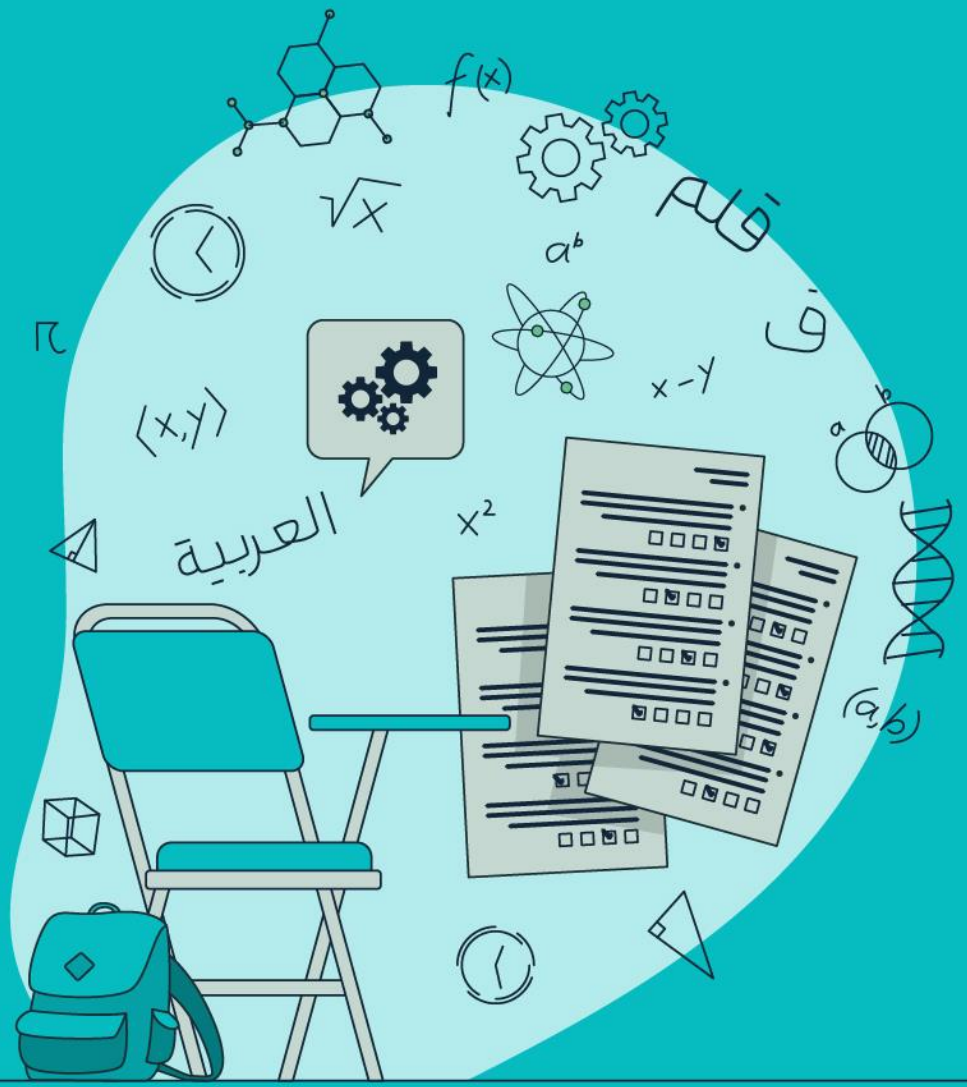
$$\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}=0 \Rightarrow \vec{a}\times(\vec{b}-\vec{c})=0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{a}=\vec{0} \\ \vec{b}=\vec{c} \\ \vec{a}\parallel b-c \end{cases}$$

۱۳	بردارهای $\vec{a}=(۱,-۳,۲)$ و $\vec{b}=(-۲,۱,-۵)$ را در نظر بگیرید. الف) تصویر قائم بردار $\vec{a}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ به‌دست آورید. ب) برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بنویسید.	۱/۷۵
۱۴	ثابت کنید : دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی هستند اگر و فقط اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}$.	۱

۱۵	ثابت کنید : دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی هستند، اگر و فقط اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}$.	۱/۲۵
۱۶	سه بردار $\vec{a}=(۲,۳,۱)$ و $\vec{b}=(-۱,۱,۰)$ و $\vec{c}=(۲,۱,-۲)$ مفروض‌اند. الف) برداری عمود بر دو بردار $-۲\vec{b}$ و $\vec{c}$ را به‌دست آورید.	۲
۱۴	دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض اند به طوری که $|\vec{a}|=۶$ و $|\vec{b}|=۴$ و زاویه بین آنها ۳۰ درجه است مقدارعبارت $|۲\vec{a}\times\vec{b}|$ را محاسبه کنید .	۱

$۲|۹\times۶|$

نهایی
بندی
جمع
پیشرفت، یعنی موفقیت



نهایی بندی جمع

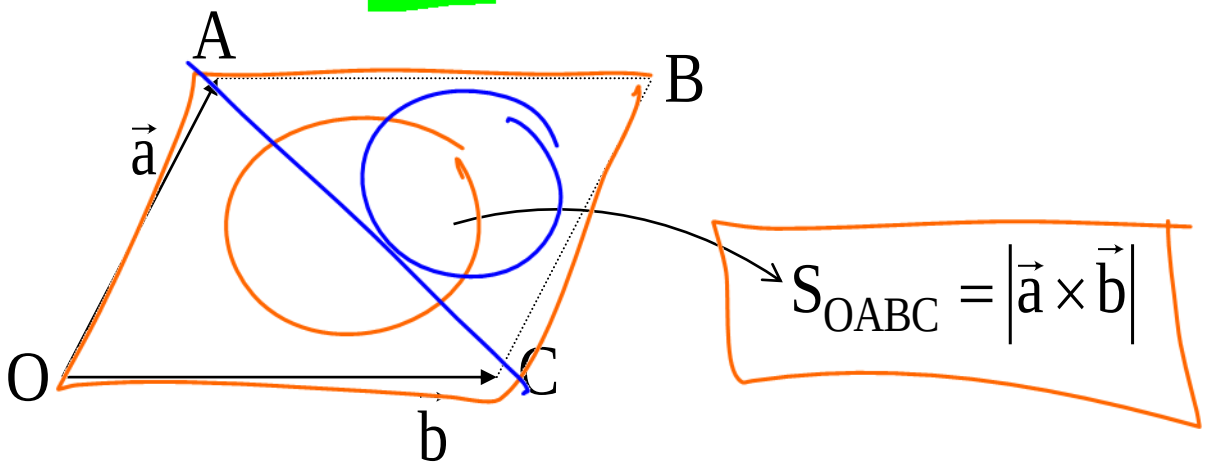
هندسه دوازدهم

کاربردهای ضرب خارجی بردارها

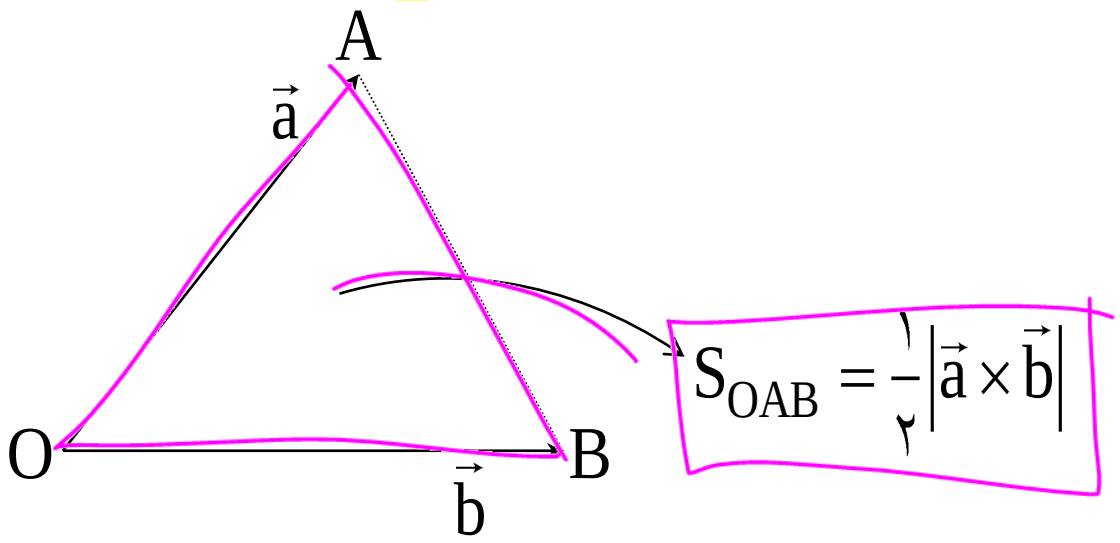
اپیزود ۱۸ : کاربردهای ضرب خارجی بردارها

➢ **کاربردهای ضرب خارجی دو بردار :**

۱) مساحت متوازی‌الاضلاعی که توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود برابر است با $|\vec{a}\times\vec{b}|$.



۲) مساحت مثلثی که توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ تشکیل می‌شود برابر است با $\frac{۱}{۲}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$.



مثال : اگر $\vec{a}=(-۲,۱,۲)$ و $\vec{b}=(۱,۲,۲)$ مساحت مثلثی که روی دو بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ ساخته می‌شود چقدر است؟

$a+b=(-۱, ۳, ٤)$

$a-b=(-۳, -۱, ٥)$

$\frac{1}{۲}\left|(a+b)\times(a-b)\right| = \frac{1}{۲}\begin{vmatrix} i & j & k \\ -۱ & ۳ & ٤ \\ -۳ & ۱ & ٥ \end{vmatrix}$

$S=\sqrt{٥^۲+٥^۲+٥^۲}$

مسئله : اگر $|a|=۳$ و $|b|=۲$ و $\vec{a}\cdot\vec{b}=۵$ مساحت مثلثی که روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود چقدر است؟

$$|a\cdot b|^۲+|a\times b|^۲=|a|^۲|b|^۲$$

$$۲۵+|a\times b|^۲=۹\times ۴$$

$$|a\times b|^۲=۱۱$$

$$|a\times b|=\sqrt{۱۱}$$

مثلث

$$S=\frac{۱}{۲}|a\times b|$$

$$=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۱}$$

مسئله : فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بردارهای به طول ۵ هستند که با هم زاویهٔ ۱۳۵ درجه می‌سازند. در این صورت مساحت مثلثی که توسط بردارهای $\vec{a}-2\vec{b}$ و $3\vec{a}+2\vec{b}$ تولید می‌شود را حساب کنید.

$$S=\frac{1}{2}\left|(a-2b)(3a+2b)\right|=\frac{1}{2}\left|2a\times b-6b\times a+6a\times b\right|=\frac{1}{2}\left|8a\times b\right|$$

$$=4|a\times b|=4|a||b|\sin\theta=4\times 5\times 5\times\frac{\sqrt{2}}{2}=50\sqrt{2}$$

مسئله : دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به طول‌های ۵ و ۸ مفروض‌اند به طوری که مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته شده توسط آنها ۲۴ واحد مربع است. اگر زاویهٔ بین دو بردار کمتر از قائمه باشد، اندازهٔ تفاضل دو بردار را حساب کنید.

$|a\times b| = ۲۴ \longrightarrow |a-b| = ?$

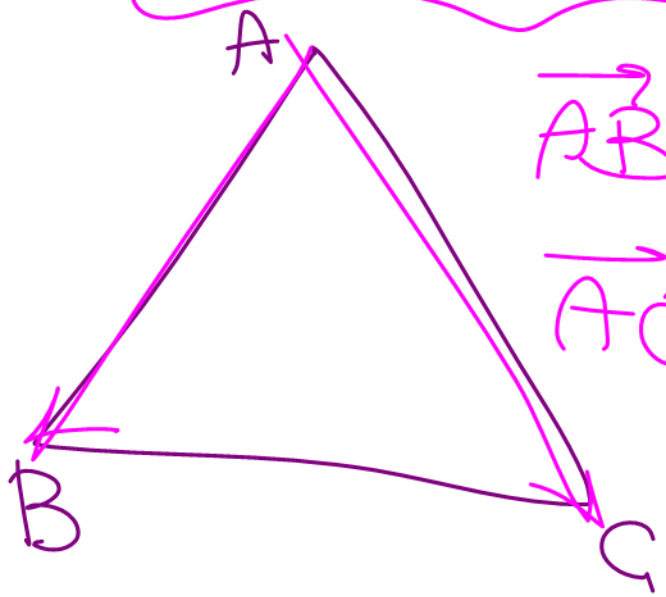
$|a-b|^۲ = |a|^۲ + |b|^۲ - ۲(a\cdot b)$

$|a\cdot b|^۲ + |a\times b|^۲ = |a|^۲|b|^۲$

$A(x_1,y_1,z_1)\ ,\ B(x_2,y_2,z_2) \longrightarrow \overrightarrow{AB} = (x_2-x_1\ ,\ y_2-y_1\ ,\ z_2-z_1)$

مسئله : مساحت مثلثی را حساب کنید که رئوس آن نقاط زیر باشد :

$A(3,5,7)\ ,\ B(5,5,0)\ ,\ C(-4,0,4)$



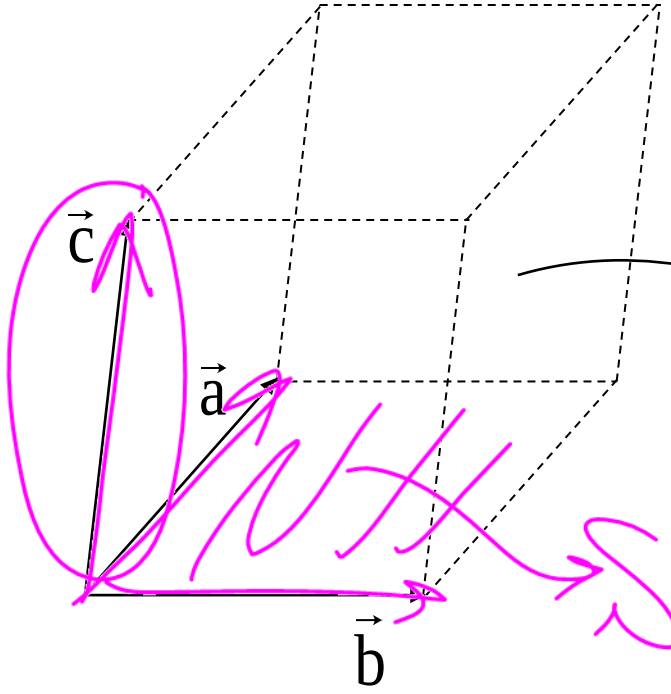
$\overrightarrow{AB}(2,0,-7)$

$\overrightarrow{AC}(-7,-5,-3)$

$$S = \frac{1}{2}\left|AB \times AC\right|$$

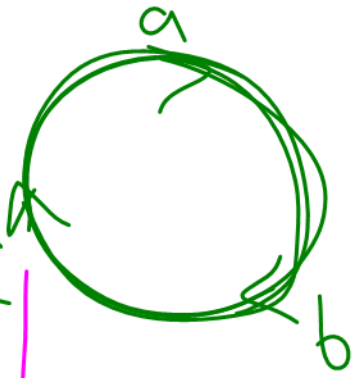
$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & -7 \\ -7 & -5 & -3 \end{vmatrix}$$

۳) حجم متوازی‌السطوحی که توسط ۳ بردار $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ساخته می‌شود برابر است با : $|a.(b\times c)|$ یا $|b.(a\times c)|$ یا $|c.(a\times b)|$



$V=|a.(b\times c)|=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

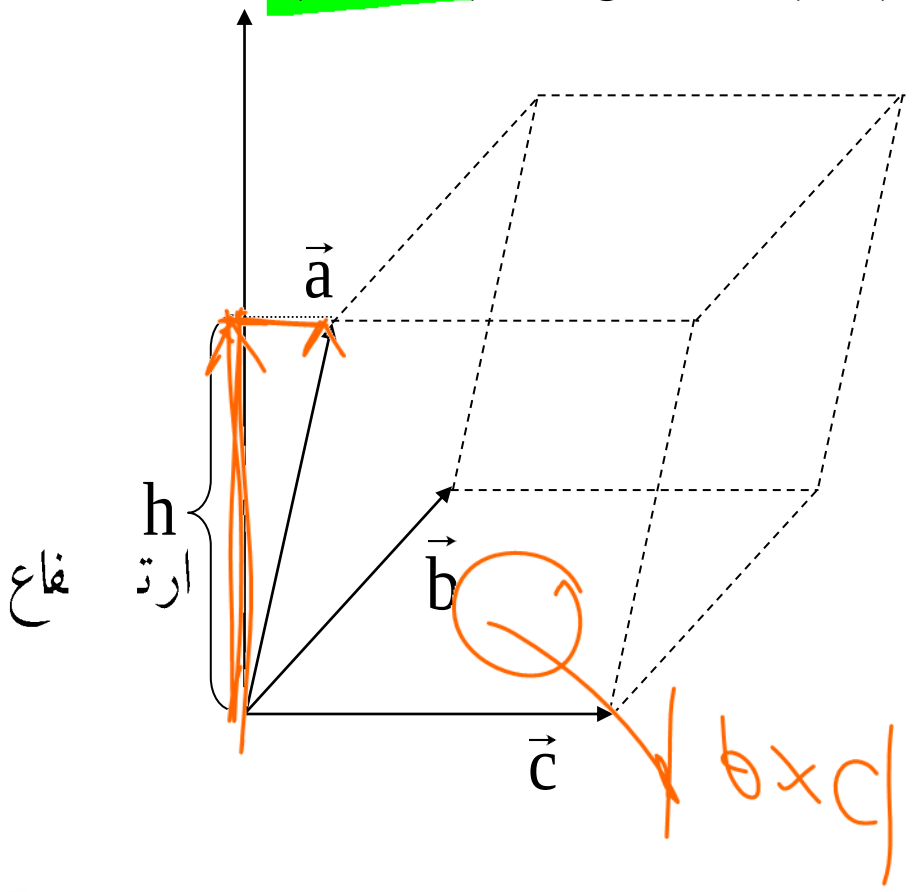
$S=|a\times b|\cdot c$



مثال : حجم متوازی‌السطوحی را به دست آورید که توسط بردارهای $(۱,۱,۰)$ و $(۱,۰,۱)$ و $(۰,۱,۱)$ تولید می‌شود.

$$|a\cdot(b\times c)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = |1-1-1+0| = ۲$$

ارتفاع متوازی‌السطوح برابر است با اندازهٔ تصویر قائم یک بردار بر ضرب خارجی دو بردار دیگر.



$$h = \frac{|a.(b\times c)|}{|b\times c|}$$

مثـال : ارتفـاع متوازی‌السـطوحی را بیابیـد کـه روی بردارهـای $\vec{a}=۳\vec{i}+\vec{j}+۳\vec{k}$ و $\vec{b}=-۲\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{c}=۴\vec{i}+۲\vec{k}$ **ساخته شده است.**

$$|a\cdot(b\times c)|=\begin{vmatrix}۳ & ۱ & ۳\\ -۲ & ۱ & -۱\\ ۴ & ۰ & ۲\end{vmatrix}=$$

$$|b\times c|=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -۲ & ۱ & -۱\\ ۴ & ۰ & ۲\end{vmatrix}=$$

مسئله : بر روی سه بردار $\vec{a}=۲\vec{i}-\vec{j}$ و $\vec{b}=\vec{j}+۳\vec{k}$ و $\vec{c}=۴\vec{i}-\vec{k}$ یک متوازی‌السطوح ساخته شده است.

اگر قاعدهٔ این متوازی‌السطوح بردارهای a و b باشند، ارتفاع متوازی‌السطوح را حساب کنید.

$$h=\frac{|a\cdot(b\times c)|}{|a\times b|}$$

۴) سه بردار $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ در یک صفحه قرار دارند اگر و فقط اگر حجم متوازی‌السطوح حاصل از آنها صفر باشد.

$|a.(b\times c)|=0 \Leftrightarrow$ هم صفحه‌اند $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$

مثال : نشان دهید بردارهای $(-1,9,1)$ و $(3,-1,1)$ و $(1,4,1)$ در یک صفحه قرار دارند.

$$|a\cdot(b\times c)|=0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 9 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

۱۵	مقدار m را طوری تعیین کنید که سه بردار $\vec{a}=(۱,m,-۱۱)$، $\vec{b}=(۲,۳,-۱)$ و $\vec{c}=(۱,-۱,۳)$ در یک صفحه باشند.	۱
۱۶	اگر طول بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به ترتیب ۶ و ۴ و $\vec{a}.\vec{b}=۱۲$ باشد، مساحت مثلث بنا شده توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به‌دست آورید.	۱/۲۵
۱۶	سه بردار $\vec{a}=(۲,۳,۱)$ و $\vec{b}=(-۱,۱,۰)$ و $\vec{c}=(۲,۱,-۲)$ مفروض‌اند. الف) برداری عمود بر دو بردار $-۲\vec{b}$ و $\vec{c}$ را به‌دست آورید. ب) حجم متوازی السطوحی که توسط سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید می‌شود را به‌دست آورید.	۲

۱۵	اگر $A=(۲,-۱,۳)$ و $B=(۳,۱,۴)$ و $C=(-۱,۱,۰)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت مثلث ABC را با استفاده از ضرب خارجی بردارها به‌دست آورید.	۱/۵

$$S=\frac{۱}{۲}|AB\times AC|$$

آموزش

نهایی
بندی
جمع
پیشرفت، یعنی موفقیت

اپیزود ۱۹ : سوالات امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۱

اپیزود ۲۰ : سوالات امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۲